BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TỔNG HỢP BREST

PHẠM HOÀNG HÀ

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA ÁNH XẠ PHÂN HÌNH VÀO KHÔNG GIAN XẠ ẢNH VÀ TÍNH RẼ NHÁNH CỦA ÁNH XẠ GAUSS CỦA MẶT CỰC TIỂU ĐẦY

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

CHUYÊN NGÀNH: Hình học và Tôpô
MÃ SỐ : 62.46.01.05

Hà Nội, 2013

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH Đỗ Đức Thái
GS.TSKH Gerd Eberhard Dethloff

Phản biện 1: GS. Pascal THOMAS..

Phản biện 2: GS. Carlo GASBARRI..

Phản biện 3: GS. TSKH. HA Huy Khoai...................................

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại........
....
vào hồi ....giờ..........ngày..........tháng..........năm ....

Có thể tìm hiểu luận án tại: -Thư viện Quốc gia
-Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

Các công trình được dùng trong luận án.

[1] P. H. Hà, S. Đ. Quang và Đ. Đ. Thái, *Unicity theorems with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables sharing small identical sets for moving targets*, Internt. J. Math. **21** (2010), 1095-1120.

[2] P. H. Hà, *A unicity theorem with truncated counting function for meromorphic mappings*, Acta Math. Vietnam, **35** (2010), 439-456.

[3] P. H. Hà và S. Đ. Quang, *Unicity theorems with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables for few fixed targets*, đang gửi đăng.

[4] G. Dethloff và P. H. Hà, *Ramification of Gauss map of complete minimal surfaces in R^3 and R^4 on annular ends*, đang gửi đăng.

Các công trình được trích dẫn.

[5] P. H. Ha, *An estimate for the Gaussian curvature of minimal surfaces in R^m whose Gauss map is ramified over a set of hyperplanes*, đang gửi đăng.

[6] G. Dethloff, P. H. Hà và P. Đ. Thoan, *Ramification of Gauss map of complete minimal surfaces in R^m on annular ends*, bản thảo.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những kết quả được trình bày trong luận án là mới, được công bố trên các tạp chí Toán học uy tín trong và ngoài nước. Các kết quả viết chung đã được sự đồng ý của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh: Phạm Hoàng Hà

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành với sự giúp đỡ và ủng hộ của nhiều người. Với lòng biết ơn chân thành nhất, tôi muốn gửi lời cảm ơn sâu sắc tới tất cả những ai đã ủng hộ và giúp đỡ tôi hoàn thành luận án này.

Trên hết tôi muốn gửi những lời biết ơn chân thành nhất tới hai người Thầy hướng dẫn của mình là GS. Đỗ Đức Thái và GS. Gerd Dethloff, những người đã hết lòng giúp đỡ, động viên và chỉ bảo tôi từ những bước đầu tiên cho đến những công việc cuối cùng của luận án. Đặc biệt GS. Đỗ Đức Thái còn là người dẫn dắt tôi những bước đi đầu tiên trong việc học tập và nghiên cứu toán học.

Tôi muốn gửi lời cảm ơn đến Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và Trường Đại học Tổng hợp Brest (Cộng hòa Pháp) vì sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi mà hai Trường dành cho tôi. Đặc biệt là Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, nơi mà tôi đã và đang học tập, công tác.

Tôi bày tỏ sự biết ơn chân thành đến Cục đào tạo với nước ngoài (Đề án 322) và Viện nghiên cứu cao cấp về Toán học Việt Nam đã giúp đỡ và ủng hộ tôi hoàn thành luận án.

Tôi muốn gửi lời cảm ơn tới Ban Chủ nhiệm Khoa Toán-Tin, các đồng nghiệp trong Khoa và các đồng nghiệp trong seminar nghiên cứu Hình học phức và Hình học đại số đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong suốt quá trình làm luận án.

Tôi cũng muốn bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Phòng Sau đại học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giúp tôi sớm hoàn thành các thủ tục cần thiết.

Cuối cùng tôi muốn bày tỏ sự biết ơn tới gia đình tôi, những người luôn bên tôi, động viên và chia sẻ với tôi những vất vả khó khăn trong quá trình hoàn thành luận án.

Mục lục

MỘT SỐ QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

Trong toàn bộ luận án, ta thống nhất một số kí hiệu như sau.

- $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$: không gian xạ ảnh phức $N-$ chiều.
- $\|z\| = \left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)^{1/2}$ với $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
- $B(r) := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < r\}$ là hình cầu mở bán kính r trong $\mathbb{C}^n$
- $S(r) := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| = r\}$ là mặt cầu bán kính r trong $\mathbb{C}^n$
- $d = \partial + \overline{\partial}, d^c := \dfrac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\overline{\partial} - \partial)$: các toán tử vi phân.
- $\upsilon := (dd^c\|z\|^2)^{n-1}$, $\sigma := d^c\log\|z\|^2 \wedge (dd^c\log\|z\|^2)^{n-1}$: các dạng vi phân.
- $O(1)$: hàm bị chặn đối với r.
- $O(r)$: vô cùng lớn cùng bậc với r khi $r \to +\infty$.
- $o(r)$: vô cùng bé bậc cao hơn r khi $r \to +\infty$.
- $\log^+ r = \max\{\log r, 0\}, x \geqslant 0$.
- $''\|\ P''$: có nghĩa là mệnh đề P đúng với mọi $r \in [0, +\infty)$ nằm ngoài một tập con Borel E của $[0, +\infty)$ thoả mãn $\int_E dr < +\infty$.
- $\sharp\ S$: lực lượng của tập hợp S.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết phân bố giá trị, hay còn gọi là Lý thuyết Nevanlinna, đã được R. Nevanlinna xây dựng từ cuối thập kỷ 20 của thế kỷ 20. Sau gần một thế kỷ phát triển, Lý thuyết Nevanlinna đã trở thành một trong những lý thuyết đẹp đẽ nhất của Toán học với nhiều ứng dụng vào những lĩnh vực khác nhau của Toán học. Luận án của chúng tôi tập trung tìm hiểu và nghiên cứu một vài vấn đề cụ thể trong Lý thuyết đó.

Luận án này gồm hai phần.

Phần đầu tiên của luận án tập trung vào vấn đề duy nhất của ánh xạ phân hình với điều kiện ràng buộc về nghịch ảnh của các divisor. Vấn đề này được nghiên cứu đầu tiên bởi R. Nevanlinna [69] vào năm 1926. Ông đã chỉ ra rằng nếu hai hàm phân hình khác hằng f và g trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ có cùng ảnh ngược của 5 giá trị phân biệt thì $f = g$.

Năm 1975, H. Fujimoto [18] tổng quát kết quả của Nevanlinna cho trường hợp các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Ông đã chứng minh được rằng đối với hai ánh xạ phân hình f và g từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, nếu một trong hai ánh xạ f hoặc g là không suy biến tuyến tính và chúng có cùng ảnh ngược tính cả bội của $(3N+2)$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, thì $f \equiv g$. Hơn nữa, nếu hai ánh xạ phân hình f và g từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ khác hằng và có cùng ảnh ngược tính cả bội của $(3N+1)$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thì tồn tại một biến đổi xạ ảnh L từ $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ vào chính nó thỏa mãn $g = L(f)$. Kể từ đó, vấn đề duy nhất đã được nghiên cứu một cách mạnh mẽ, sâu sắc bởi nhiều nhà toán học như H. Fujimoto ([18],[28],...), W. Stoll([56]), L. Smiley([55]), M. Ru([53]), G. Dethloff - T. V. Tấn([12], [13], [14]...), Đ. Đ. Thái - S. Đ. Quang([61], [62]) và nhiều người khác nữa.

Để hình thành các kết quả, chúng ta đưa vào một số khái niệm và định nghĩa sau: Giả sử f là ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Với mỗi siêu phẳng H trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, chúng ta kí hiệu $\nu_{(f,H)}(z), z \in \mathbb{C}^n$ là bội giao của ảnh của f với H tại $f(z)$.

Với mỗi $z \in \mathbb{C}^n$, ta kí hiệu

$$\nu_{(f,H),\leq k}(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \nu_{(f,H)}(z) > k, \\ \nu_{(f,H)}(z) & \text{nếu } \nu_{(f,H)}(z) \leq k, \end{cases}$$

$$\nu_{(f,H),>k}(z) = \begin{cases} \nu_{(f,H)}(z) & \text{nếu } \nu_{(f,H)}(z) > k, \\ 0 & \text{nếu } \nu_{(f,H)}(z) \leq k. \end{cases}$$

Giả sử k, d là các số nguyên dương hoặc là $+\infty$. Xét q siêu phẳng $H_1, \cdots, H_q$ ở vị trí tổng quát trong không gian $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thỏa mãn:

a) $\dim\{z : \nu_{(f,H_i),\leq k}(z) > 0 \quad \text{và} \quad \nu_{(f,H_j),\leq k}(z) > 0\} \leqslant n - 2$ với mọi $1 \leq i < j \leq q$.

Chúng ta kí hiệu $\mathcal{F}\big(\{H_j\}_{j=1}^q, f, k, d)$ là tập tất cả các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính g từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thỏa mãn hai điều kiện:

b) $\min\{\nu_{(g,H_j),\leq k}(z), d\} = \min\{\nu_{(f,H_j),\leq k}(z), d\}, \quad j \in \{1, \cdots, q\}$

(ta nói rằng bội được ngắt bởi k, d) và

c) $g = f$ trên $\bigcup\limits_{j=1}^{q} \{z : \nu_{(f,H_j),\leq k}(z) > 0\}$.

Nếu $k = +\infty$ thì ta dùng kí hiệu $\mathcal{F}\big(\{H_j\}_{j=1}^q, f, d)$ cho đơn giản các kí hiệu.

Vấn đề duy nhất của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là bài toán chúng ta cần phải tìm điều kiện của q và k, d sao cho tập $\mathcal{F}\big(\{H_j\}_{j=1}^q, f, k, d)$ chỉ chứa một ánh xạ (định lý duy nhất), hoặc theo nghĩa rộng hơn là chúng ta nghiên cứu lực lượng của tập $\mathcal{F}\big(\{H_j\}_{j=1}^q, f, k, d)$ và tìm ra các mối quan hệ giữa các ánh xạ trong tập hợp này. Một số câu hỏi tự nhiên được đặt ra như sau.

Câu hỏi 1. Số các siêu phẳng (hay các mục tiêu cố định) trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ cần thiết là bao nhiêu? Nói cách khác, số q càng bé càng tốt.

Câu hỏi 2. Tìm cách chặn bội d và k càng bé càng tốt.

Câu hỏi 3. Liệu các mục tiêu cố định (hay các siêu phẳng) có thể được mở rộng thành trường hợp mục tiêu di động (hay siêu phẳng di động) hoặc cho trường hợp siêu mặt?

Về các câu hỏi 1 và 2, chúng tôi liệt kê ở đây một vài kết quả tốt nhất đã được biết đến bao gồm:

+) Smiley [55] $\sharp\, \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+2}, 1) = 1$,

+) Thái-Quang [62] $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+1}, 1) = 1, N \geq 2$,

+) Dethloff-Tấn [15] $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{[2.75N]}, 1) = 1$ với $N \geq N_0$ (ở đó N_0 có công thức tính cụ thể) và

+) Chen-Yan [6] $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{2N+3}, 1) = 1$.

Khi $q < 2N + 3$, có một vài kết quả gần đây được đưa ra bởi Tấn [60] và Quang [49],[50]. Những kết quả này gợi mở đến câu hỏi tự nhiên là.

Chúng ta có thể nói gì về các định lý duy nhất với bội bị chặn trong trường hợp $q \leq 2N + 2$?

Mục tiêu đầu tiên của luận án là nghiên cứu vấn đề vừa nêu trên. Trước hết chúng tôi đưa ra những định lý duy nhất cho trường hợp $q = 2N + 2$.

Mặt khác, có nhiều kết quả thú vị về vấn đề duy nhất của ánh xạ phân hình trên $\mathbb{C}$ cho bởi điều kiện đạo hàm hoặc cho bởi điều kiện bội bị chặn rẽ nhánh. Chúng tôi cũng đã tổng quát và đưa ra một số kết quả về vấn đề này cho ánh xạ phân hình nhiều biến phức.

Mục đích thứ hai của luận án là đưa ra một số kết quả liên quan đến câu hỏi 3. Các kết quả của chúng tôi là những cải tiến thực sự của những kết quả trước đó của Ru [53], Dethloff-Tấn [14], Thái-Quang [61].

Song song với sự phát triển của lý thuyết Nevanlinna, lý thuyết phân bố giá trị của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu nhúng trong $\mathbb{R}^m$ được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học như R. Osserman [45], S.S. Chern [7], F. Xavier [65], H. Fujimoto [20]-[24], S. J. Kao [38], M. Ru [51]-[52] và nhiều người khác nữa.

Chúng ta xét M là một mặt cực tiểu không phẳng trong $\mathbb{R}^3$, cụ thể hơn là một mặt cực tiểu liên thông được định hướng trong $\mathbb{R}^3$. Theo định nghĩa cổ điển, ánh xạ Gauss G của mặt M là ánh xạ biến mọi điểm $p \in M$ thành véc tơ trực giao $G(p) \in S^2$ của M tại p. Thay cho nghiên cứu của G, chúng ta nghiên cứu ánh xạ $g := \pi \circ G : M \to \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} (= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ với phép chiếu nổi π từ S^2 lên $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Bằng cách dùng hệ tọa độ địa phương chỉnh hình $z = u + \sqrt{-1}v$ đối với mỗi hệ tọa độ đẳng nhiệt dương (u, v), ta có thể xem M như là một mặt Riemann mở với một mê-tríc bảo giác ds^2. Do đó, từ giả thiết về tính cực tiểu của M, g sẽ là một ánh xạ phân hình trên M. Bằng cách tương tự, chúng ta có thể định nghĩa được ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^m$. Cho đến nay các nhà toán học đã công bố nhiều kết quả đẹp đẽ về ánh xạ Gauss tương tự như những kết quả về ánh xạ phân hình trong lý thuyết Nevanlinna. Một trong những kết quả như thế là định lý Picard nhỏ.

Năm 1964, R. Osserman [45] chỉ ra rằng phần bù của ảnh của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu đầy không phẳng trong $\mathbb{R}^3$ có độ đo lô-ga-rít bằng không trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Năm 1981, một kết quả đột phá được chứng minh bởi F. Xavier [65] rằng ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu đầy không phẳng trong $\mathbb{R}^3$ chỉ có thể bỏ được nhiều nhất 6 điểm trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Năm 1988, H. Fujimoto [20] giảm số điểm từ 6 xuống 4. Như chúng ta đã biết, ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu Scherk chỉ bỏ được 4 điểm trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nên số 4 là tối ưu. Năm 1991, S. J. Kao [38] đã chứng minh được rằng ánh xạ Gauss tại tập dạng vành khuyên (tức là tập bảo giác với hình vành khuyên $\{z|\ 0 < 1/r < |z| < r\}$) của mặt cực tiểu đầy trong $\mathbb{R}^3$ cũng nhận mọi giá trị trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ trừ đi không quá 4 điểm. Năm 2007, Jin-Ru [37] mở rộng kết quả của Kao cho trường hợp $m > 3$.

Mặt khác, vào năm 1993, M. Ru [52] nghiên cứu ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$ với tính chất rẽ nhánh. Đó là một sự mở rộng của các kết quả vừa đề cập ở trên.

Một câu hỏi tự nhiên nảy sinh là liệu có thể nói gì về ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu tại các tập dạng vành khuyên với tính chất rẽ nhánh?

Mục đích cuối cùng của luận án là trả lời cho câu hỏi này khi $m = 3; 4$. Chúng tôi cũng giới thiệu đến kết quả của Dethloff-Hà-Thoan [10] cho trường hợp $m > 3$. Chúng tôi cũng lưu ý rằng cách tiếp cận cho trường hợp của chúng tôi khác so với kết quả của Dethloff-Hà-Thoan [10] cho trường hợp $m = 4$.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận án là nghiên cứu vấn đề duy nhất của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ đối với các trường hợp siêu phẳng cố định, siêu phẳng di động và có bội bị chặn. Ngoài ra, luận án cũng nghiên cứu tính rẽ nhánh của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^m$ $(m = 3; 4)$

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Như đã trình bày ở phần lý do chọn đề tài, đối tượng nghiên cứu của luận án là vấn đề duy nhất của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ và tính rẽ nhánh của ánh xạ

Gauss của mặt cực tiểu đầy trong $\mathbb{R}^m$ ($m = 3; 4$). Trong luận án, các kết quả đạt được là mở rộng các kết quả đã biết gần đây.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu của Lý thuyết phân bố giá trị, Giải tích phức, Hình học phức đồng thời chúng tôi cũng đưa ra những kĩ thuật mới để giải quyết vấn đề.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án được chia thành ba chương.

Chương 1 dành cho việc nghiên cứu các định lý duy nhất với bội bị chặn của các ánh xạ phân hình từ không gian phức nhiều chiều vào không gian xạ ảnh phức nhiều chiều cho mục tiêu cố định. Cụ thể là sau khi giới thiệu lại các khái niệm và kết quả cơ bản của lý thuyết Nevanlinna, chúng tôi chứng minh định lý duy nhất cho trường hợp $q = 2N + 2$. Sau đó, chúng tôi mở rộng một kết quả của Thái-Quang trong [62] cho trường hợp bội rẽ nhánh. Phần cuối của chương trình bày một định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình nhiều biến phức với điều kiện về đạo hàm.

Chương 2 dành cho việc nghiên cứu định lý duy nhất với bội bị chặn của ánh xạ phân hình cho mục tiêu di động. Ngoài ra, chúng tôi cũng đưa ra một định lý duy nhất của ánh xạ phân hình nhiều biến phức với điều kiện đạo hàm.

Trong chương 3, chúng tôi giới thiệu ánh xạ Gauss (mở rộng) của mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^m$ và chúng tôi nghiên cứu tính chất rẽ nhánh của ánh xạ Gaus tại các tập dạng vành khuyên của mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$. Cụ thể chúng tôi mở rộng các kết quả trước đó của S. J. Kao [38] trong trường hợp $m = 3$.

6. Cấu trúc luận án

Bố cục của luận án ngoài phần mở đầu và phần phụ lục gồm ba chương được viết theo tư tưởng kế thừa. Ba chương của luận án được viết dựa trên bốn công trình trong đó hai công trình đã được đăng và hai công trình đã được gửi đi công bố.

Chương 1: Định lý duy nhất với bội bị chặn của ánh xạ phân hình cho mục tiêu cố định

Chương 2: Định lý duy nhất với bội bị chặn của các ánh xạ phân hình cho mục tiêu di động

Chương 3: Sự phân bố giá trị của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu tại tập dạng vành khuyên

Chương 1

Định lý duy nhất với bội bị chặn của ánh xạ phân hình cho mục tiêu cố định

Như đã trình bày trong phần Mở đầu, vấn đề duy nhất cho ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ với bội bị chặn đối với một họ hữu hạn các siêu phẳng trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ đã được nghiên cứu sâu sắc bởi nhiều nhà toán học như H. Fujimoto, L. Smiley, S. Ji, M. Ru, D.D. Thai, G. Dethloff, T.V. Tan, S.D. Quang, Z. Chen, Q. Yan ... và đã trở thành một lĩnh vực lớn trong Lý thuyết Nevanlinna.

Bây giờ, chúng tôi muốn giới thiệu chi tiết hơn những kết quả chính trong lĩnh vực này. Bằng cách sử dụng lại các kí hiệu trong §1.1, ta có các kết quả sau.

Định lý A.(Smiley [55]) *Nếu* $q \geq 3N+2$ *thì* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{q}, 1) = 1$.

Định lý B.(Thái-Quang [62]) *Nếu* $N \geq 2$ *thì* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+1}, 1) = 1$.

Định lý C.(Dethloff-Tấn [15]) *Tồn tại một số nguyên dương* N_0 *(có thể đưa ra công thức tính tường minh) sao cho* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{q}, 1) = 1$ *với* $N \geq N_0$ *và* $q = [2.75N]$.

Định lý D.(Chen-Yan [6]) *Nếu* $N \geq 1$ *thì* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{2N+3}, 1) = 1$.

Định lý E.(Tấn [60]) *Cho ánh xạ phân hình* $g \in \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{2N+2}, N+1)$, *khi đó có* *một hằng số* $\alpha \in \mathbb{C}$ *và một cặp* (i,j) *với* $1 \leq i < j \leq q$*, thỏa mãn*

$$\frac{(H_i, f)}{(H_j, f)} = \alpha \frac{(H_i, g)}{(H_j, g)}.$$

Trong tất cả các kết quả về vấn đề duy nhất trên **(Định lý A-E)** của các ánh xạ phân hình vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ với bội bị chặn thì số siêu phẳng không vượt quá $2N+3$.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là liệu có thể giảm số siêu phẳng xuống dưới $2N+3$*?*

Gần đây S.D. Quang có đưa ra một cách tiếp cận cho vấn đề này như sau

Định lý F. (Quang [49]) *Cho* f_1 *và* f_2 *là hai ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ* $\mathbb{C}^n$ *vào* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ $(N \geq 2)$ *và* $H_1, ..., H_{2N+2}$ *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *sao cho*

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f_1,H_i)}(z) > 0 \text{ and } \nu_{(f_1,H_j)}(z) > 0\} \leq n-2$$

cho mọi $1 \leq i < j \leq 2N+2$*. Giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn.*

(a) $\min\{\nu_{(f_1,H_j),\leq N}, 1\} = \min\{\nu_{(f_2,H_j),\leq N}, 1\}$ $(1 \leq j \leq 2N+2)$,

(b) $f_1(z) = f_2(z)$ *trên tập* $\bigcup_{j=1}^{2N+2}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f_1,H_j)}(z) > 0\}$,

(c) $\min\{\nu_{(f_1,H_j),\geq N}, 1\} = \min\{\nu_{(f_2,H_j),\geq N}, 1\}$ $(1 \leq j \leq 2N+2)$,

Khi đó ta có $f_1 \equiv f_2$.

Ngoài ra S. D. Quang cũng đã chứng minh được một giả thuyết được đưa ra bởi Thái -Quang trong [62], cụ thể là định lý sau

Định lý G. (Quang [50]) *Nếu* $N \geq 2$*, thì* $\sharp\ \mathcal{F}\big(\{H_j\}_{j=1}^{2N+2}, f, 1\big) \leq 2$.

Tiếp tục hướng nghiên cứu này, trong phần đầu của chương chúng tôi đưa ra một vài định lý duy nhất cho trường hợp số các siêu phẳng $q \leq 2N+2$. Cụ thể là chúng tôi chứng minh định lý sau.

Định lý 1.0.1. *(Hà-Quang [33]) Giả sử* f^1 *và* f^2 *là hai ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ* $\mathbb{C}^n$ *vào* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ $(N \geq 2)$ *và* $H_1, ..., H_{2N+2}$ *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *thỏa mãn*

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_i)}(z) > 0 \text{ và } \nu_{(f^1,H_j)}(z) > 0\} \leq n-2$$

với mọi $1 \leq i < j \leq 2N+2$. *Giả sử* m *là số nguyên dương sao cho*

$$m > \binom{2N+2}{N+1}\left[\binom{2N+2}{N+1} - 2\right].$$

Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn

(a) $\min\{\nu_{(f^1,H_j)}, 1\} = \min\{\nu_{(f^2,H_j)}, 1\}$ $(1 \leq j \leq 2N+2)$,

(b) $f^1(z) = f^2(z)$ *trên* $\bigcup_{j=1}^{2N+2}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_j)}(z) > 0\}$,

(c) $\min\{\nu_{(f^1,H_j)}(z), \nu_{(f^2,H_j)}(z)\} > N$ *hoặc* $\nu_{(f^1,H_j)}(z) \equiv \nu_{(f^2,H_j)}(z) \pmod m$ *cho mọi* $z \in (f^1, H_j)^{-1}(0)$ $(1 \leq j \leq 2N+2)$.

Khi đó ta có $f^1 \equiv f^2$.

Trong [62], các tác giả đã chứng minh được các kết quả sau

Định lý H. (Thái-Quang [62])

(a) *Nếu* $N = 1$, *thì* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+1}, k, 2) \leq 2$ *với* $k \geq 15$.

(b) *Nếu* $N \geq 2$, *thì* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+1}, k, 2) \leq 2$ *với* $k \geq 3N + 3 + \dfrac{4}{N-1}$.

(c) *Nếu* $N \geq 4$, *thì* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N}, k, 2) \leq 2$ *với* $k > 3N + 7 + \dfrac{24}{N-3}$.

(d) *Nếu* $N \geq 6$, *thì* $\sharp\ \mathcal{F}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N-1}, k, 2) \leq 2$ *với* $k > 3N + 11 + \dfrac{60}{N-5}$.

Phần thứ hai của chương dành cho việc mở rộng Định lý H bằng cách chỉ ra định lý duy nhất trong trường hợp bội chặn là rẽ nhánh. Cụ thể là chúng tôi chứng minh định lý sau.

Định lý 1.0.2. *(Hà [31]) Giả sử* $f^1, f^2, f^3 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *là các ánh xạ phân hình và* $\{H_i\}_{i=1}^q$ *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. *Giả sử* $d, k, k_{1i}, k_{2i}, k_{3i}$ *là các số nguyên thỏa mãn*

$1 \leq k_{1i}, k_{2i}, k_{3i} \leq \infty$ $(1 \leq i \leq q)$. *Ta đặt* $M = max\{k_{ji}\}$, $m = min\{k_{ji}\}$ $(1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq q)$, $k = max\{\sharp\{i \in \{1, 2 \cdots, q\} \mid k_{ji} = m\} \mid 1 \leq j \leq 3\}$ *và quy ước* $d = 0$ *nếu* $M = m$ *và* $d = min\{k_{ji} - m > 0 \mid 1 \leq j \leq 3; 1 \leq i \leq q\}$ *nếu* $M \neq m$. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) $\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^j,H_i),\leq k_{ji}} > 0$ *và* $\nu_{(f^j,H_l),\leq k_{jl}} > 0\} \leq n-2$

$(1 \leq j \leq 3; 1 \leq i < l \leq q)$

(ii) $\min(\nu_{(f^j,H_i),\leq k_{ji}}, 2) = \min(\nu_{(f^t,H_i),\leq k_{ti}}, 2)$ $(1 \leq j < t \leq 3; 1 \leq i \leq q)$

(iii) $f^1 \equiv f^j$ *trên* $\bigcup_{\alpha=1}^q\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_\alpha),\leq k_{1\alpha}}(z) > 0\}$ $\quad (1 \leq j \leq 3)$.

Thế thì $f^1 \equiv f^2$ *hoặc* $f^2 \equiv f^3$ *hoặc* $f^3 \equiv f^1$ *nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn:*

1) $N \geq 2, 3N-1 \leq q \leq 3N+1, m > 3N+1+\dfrac{16}{3(N-1)}$ *và*

$(2q-5N-3) > \dfrac{2Nk}{m+1} + \dfrac{2N(q-k)}{m+d+1} - \dfrac{3N^2+N}{M+1}.$

2) $N = 1, q = 4$ *và* $\dfrac{3(2k+1)}{m+1} + \dfrac{6(4-k)}{m+d+1} + \dfrac{6k}{M(m+1)} + \dfrac{24-6k}{M(m+d+1)} < 1 + \dfrac{12}{M}.$

Như chúng ta đã biết, vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ với điều kiện đạo hàm được quan tâm nghiên cứu từ lâu. Tuy nhiên, theo chúng tôi biết, không có kết quả nào như thế cho các ánh xạ phân hình nhiều biến phức. Có thể thấy ngay một khó khăn đó là ta không định nghĩa được đạo hàm của ánh xạ phân hình. Vượt qua những khó khăn về mặt kỹ thuật, chúng tôi đưa ra một định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình trên $\mathbb{C}^n$ với điều kiện về đạo hàm ở phần cuối của chương. Cụ thể, chúng tôi chứng minh kết quả sau.

Định lý 1.0.3. *(Hà-Quang [33]) Nếu* $N \geq 4$, $2 \leqslant d \leqslant N-1$ *và* $k > \dfrac{3dN^2 - 2N^2 + 2Nd - 2Nd^2}{2(d-1)N + d - 2d^2} - 1$, *thì*

$$\sharp\, \mathcal{G}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+2-2d}, k, d) = 1.$$

1.1 Các kiến thức và kết quả cơ bản của lý thuyết Nevanlinna

Chúng ta kí hiệu $||z|| = \big(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\big)^{1/2}$ với mỗi $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ và định nghĩa

$$B(r) := \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < r\}, \quad S(r) := \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| = r\}\ (0 < r < \infty),$$

$$v_{n-1}(z) := \big(dd^c||z||^2\big)^{n-1} \quad \text{và}$$

$$\sigma_n(z) := d^c \log||z||^2 \wedge \big(dd^c \log||z||^2\big)^{n-1} \text{trên} \quad \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Giả sử F là hàm chỉnh hình không đồng nhất bằng không trên miền Ω trong $\mathbb{C}^n$. Với mỗi bộ chỉ số các số nguyên không âm $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, ta đặt $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ và $\mathcal{D}^\alpha F = \dfrac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial^{\alpha_1} z_1 ... \partial^{\alpha_n} z_n}$.

Xét ánh xạ $\nu_F : \Omega \to \mathbb{Z}$ xác định bởi công thức

$$\nu_F(z) := \max\, \{n : \mathcal{D}^\alpha F(z) = 0 \text{ với mọi } \alpha \text{ thoả mãn } |\alpha| < n\}, z \in \Omega$$

Định nghĩa 1.1.1. *Một divisor trên miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ là một ánh xạ $\nu : \Omega \to \mathbb{Z}$ thoả mãn với mỗi $a \in \Omega$, tồn tại các hàm chỉnh hình khác không F và G xác định trên một lân cận mở liên thông $U \subset \Omega$ của a sao cho $\nu(z) = \nu_F(z) - \nu_G(z)$ với mỗi $z \in U$, ngoài một tập con giải tích có chiều $\leqslant n-2$.*

Hai divisor được xem là giống nhau nếu chúng đồng nhất với nhau bên ngoài một tập giải tích có chiều $\leqslant n-2$. Với mỗi divisor ν trên Ω ta đặt $|\nu| := \overline{\{z : \nu(z) \neq 0\}}$. Khi đó, $|\nu|$ là một tập con giải tích có chiều thuần tuý $(n-1)$ của Ω hoặc là một tập rỗng.

Giả sử φ là hàm phân hình khác không trên miền Ω trong $\mathbb{C}^n$. Với mỗi $a \in \Omega$, chúng ta chọn các hàm chỉnh hình khác không F và G xác định trên một lân cận $U \subset \Omega$ của a sao cho $\varphi = \dfrac{F}{G}$ trên U và $\dim(F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0)) \leqslant n-2$. Khi đó chúng ta định nghĩa divisor ν_φ bởi $\nu_\varphi(z) := \nu_F(z), \nu_\varphi^\infty(z) := \nu_G(z)$ với mọi $z \in U$. Dễ thấy khái niệm trên không phụ thuộc vào việc chọn các hàm F và G. Do vậy, nó hoàn toàn được xác định trên toàn bộ Ω.

Giả sử ν là một divisor trong $\mathbb{C}^n$ và k, d là các số nguyên dương hoặc $+\infty$. Đặt

$$\nu^{(d)}(z) = \min\{d, \nu(z)\},$$

$$\nu^{(d)}_{\le k}(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \nu(z) > k, \\ \nu^{(d)}(z) & \text{nếu } \nu(z) \le k, \end{cases}$$

$$\nu^{(d)}_{> k}(z) = \begin{cases} \nu^{(d)}(z) & \text{nếu } \nu(z) > k, \\ 0 & \text{nếu } \nu(z) \le k. \end{cases}$$

Chúng ta định nghĩa

$$n(t) = \begin{cases} \int\limits_{|\nu| \cap B(t)} \nu(z) v_{n-1} & \text{nếu } n \ge 2, \\ \sum\limits_{|z| \le t} \nu(z) & \text{nếu } n = 1. \end{cases}$$

Tương tự trên ta cũng định nghĩa được $n^{(d)}(t),\ n^{(d)}_{\le k}(t),\ n^{(d)}_{>k}(t)$.

Định nghĩa

$$N(r, \nu) = \int_1^r \frac{n(t)}{t^{2n-1}} dt \quad (1 < r < \infty).$$

Cũng tương tự ta định nghĩa $N(r,\nu^{(d)})$, $N(r,\nu^{(d)}_{\le k})$, $N(r,\nu^{(d)}_{>k})$ và kí hiệu lại chúng lần lượt là $N^{(d)}(r,\nu)$, $N^{(d)}_{\le k}(r,\nu)$, $N^{(d)}_{>k}(r,\nu)$.

Với hàm chỉnh hình $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, ta định nghĩa
$N_\varphi(r) = N(r,\nu_\varphi)$, $N^{(d)}_\varphi(r) = N^{(d)}(r,\nu_\varphi)$, $N^{(d)}_{\varphi,\le k}(r) = N^{(d)}_{\le k}(r,\nu_\varphi)$, $N^{(d)}_{\varphi,>k}(r) = N^{(d)}_{>k}(r,\nu_\varphi)$.

Để tiện cho kí hiệu ta sẽ bỏ chỉ số trên $^{(d)}$ nếu $d = \infty$.

Bây giờ ta xét một ánh xạ phân hình f từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$ và q siêu phẳng $H_1, ..., H_q$ trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát thỏa mãn

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,H_i),\leqslant k}(z) > 0 \text{ và } \nu_{(f,H_j),\leqslant k}(z) > 0\} \le n-2 \ (1 \le i < j \le q).$$

Ta kí hiệu $\mathcal{F}(f, \{H_j\}_{j=1}^q, k, d)$ là tập tất cả các ánh xạ phân hình $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thỏa mãn các điều kiện sau

(a) g không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$,

(b) $\min\ (\nu_{(f,H_j),\le k}, d) = \min\ (\nu_{(g,H_j),\le k}, d)$ $(1 \le j \le q)$,

(c) $f(z) = g(z)$ trên $\bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,H_j),\le k}(z) > 0\}$.

Khi $k = \infty$, để cho tiện kí hiệu ta thay kí hiệu $\mathcal{F}(f, \{H_j\}_{j=1}^q, \infty, d)$ bởi kí hiệu $\mathcal{F}(f, \{H_j\}_{j=1}^q, d)$.

Trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ cố định một tọa độ thuần nhất $(w_0 : \cdots : w_N)$. Giả sử $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là một ánh xạ phân hình có một biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : \cdots : f_N)$ của f, tức là các f_i là những hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}^n$ thỏa mãn $f(z) = \big(f_0(z) : \cdots : f_N(z)\big)$ bên ngoài tập giải tích $I(f) = \{z \in \mathbb{C}^n : f_0(z) = \cdots = f_N(z) = 0\}$ có đối chiều $\geqslant 2$. Đặt $\|f\| = \big(|f_0|^2 + \cdots + |f_N|^2\big)^{1/2}$.

Hàm đặc trưng của f được định nghĩa như sau

$$T(r,f) = \int\limits_{S(r)} \log\|f\|\sigma_n - \int\limits_{S(1)} \log\|f\|\sigma_n.$$

Cho H là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ cho bởi phương trình $H = \{a_0\omega_0 + ... + a_N\omega_N = 0\}$, ở đó $A := (a_0, ..., a_N) \ne (0, ..., 0)$. Chúng ta đặt $(f,H) = \sum_{i=0}^N a_i f_i$. Thế thì ta có thể định nghĩa divisor tương ứng là $\nu_{(f,H)}$, được gọi là bội giao của ảnh của f với H

tại $f(z)$. Hơn nữa ta có thể định nghĩa **hàm xấp xỉ** của H như sau

$$m_{f,H}(r) = \int_{S(r)} \log \frac{||f|| \cdot ||H||}{|(f,H)|}\sigma_n - \int_{S(1)} \log \frac{||f|| \cdot ||H||}{|(f,H)|}\sigma_n,$$

ở đó $||H|| = (\sum_{i=0}^N |a_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Cho φ là một hàm phân hình khác không trên $\mathbb{C}^n$, khi đó nó có thể được xem như là một ánh xạ chỉnh hình vào $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Thế thì **hàm xấp xỉ** của φ được định nghĩa bởi công thức sau

$$m(r,\varphi) := \int_{S(r)} \log \max\,(|\varphi|, 1)\sigma_n.$$

Tiếp đến chúng tôi giới thiệu một số kết quả đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết Nevanlinna (Noguchi-Ochiai [44], Stoll [56],[57]).

Định lý cơ bản thứ nhất cho siêu phẳng. *Cho $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính và H là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Thế thì ta có*

$$N_{(f,H)}(r) + m_{f,H}(r) = T(r,f) \ (r > 1).$$

Định lý cơ bản thứ hai cho siêu phẳng. *Cho $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là một ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính và $H_1, ..., H_q$ $(q \geq N+1)$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Thế thì ta có*

$$|| \quad (q - N - 1)T(r,f) \leq \sum_{i=1}^{q} N^{(N)}_{(f,H_i)}(r) + o(T(r,f)).$$

Bổ đề 1.1.2. *(Thái-Quang [62]) Cho $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính và $H_1, H_2, ..., H_q$ là q siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Giả sử $k \geq N-1$. Khi đó ta có*

$$\Big|\Big| \left(q - N - 1 - \frac{Nq}{k+1}\right) T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q} \left(1 - \frac{N}{k+1}\right) N^{(N)}_{(f,H_j),\leq k}(r) + o(T(r,f)) \ .$$

Bổ đề đạo hàm lô-ga-rít. *Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}^n$. Khi đó ta có*

$$\Big|\Big| \quad m\left(r, \frac{\mathcal{D}^{\alpha}(f)}{f}\right) = O(\log^+ T(r,f)) \ (\alpha \in \mathbb{Z}^n_+).$$

Chúng ta kí hiệu $\mathcal{M}^*{}_n$ nhóm nhân giao hoán của các hàm phân hình khác không trên $\mathbb{C}^n$. Thế thì nhóm nhân $\mathcal{M}^*{}_n/\mathbb{C}^*$ là một nhóm giao hoán không xoắn.

Định nghĩa 1.1.3. *Cho G là một nhóm giao hoán không xoắn và $A = (a_1, a_2, ..., a_q)$ một q-bộ gồm các phần tử a_i trong G. Giả sử $q \geq r > s > 1$. Ta nói q-bộ A có tính chất $(P_{r,s})$ nếu bất kì r phần tử $a_{l(1)}, ..., a_{l(r)}$ trong A thỏa mãn điều kiện sau: Với bất kì bộ chỉ số $i_1, ..., i_s$ $(1 \leq i_1 < ... < i_s \leq r)$, tồn tại bộ chỉ số $j_1, ..., j_s$ $(1 \leq j_1 < ... < j_s \leq r)$ với $\{i_1, ..., i_s\} \neq \{j_1, ..., j_s\}$ sao cho $a_{l(i_1)}...a_{l(i_s)} = a_{l(j_1)}...a_{l(j_s)}$.*

Mệnh đề 1.1.4. *(Fujimoto [18]) Cho G là một nhóm giao hoán không xoắn và $A = (a_1, ..., a_q)$ là q-bộ các phần tử a_i của G. Nếu A có tính chất $(P_{r,s})$ với cặp r, s nào đó và $q \geq r > s > 1$ thì tồn tại các chỉ số $i_1, ..., i_{q-r+2}$ với $1 \leq i_1 < ... < i_{q-r+2} \leq q$ sao cho $a_{i_1} = a_{i_2} = ... = a_{i_{q-r+2}}$.*

Lấy ba ánh xạ phân hình f^1, f^2, f^3 với biểu diễn rút gọn $f^k := (f_0^k : ... : f_N^k)$ và đặt $T(r) := \sum_{k=1}^{3} T(r, f^k)$. Với mỗi phần tử $c = (c_0, ..., c_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$, ta định nghĩa $(f^k, c) := \sum_{i=0}^{N} c_i f_i^k$ $(1 \leq k \leq 3)$.

Ta kí hiệu $\mathcal{C}$ là tập tất cả các phần tử $c \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ sao cho

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : (f^k, H_j)(z) = (f^k, c)(z) = 0\} \leq n - 2.$$

Bổ đề 1.1.5. *Cho $H_1, H_2, ..., H_q$ là q siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Giả sử $\min(\nu_{(f^j,H_i)}, d) = \min(\nu_{(f^1,H_i)}, d)(1 \leq j \leq 3), 1 \leq d \leq N$ và $q \geq N + 2$. Khi đó ta có*

$$|| \ T(r, f^k) = O(T(r, f^1)) \ (1 \leq k \leq 3).$$

Chứng minh. Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$|| \quad (q-N-1)T(r, f^k) \leq \sum_{i=1}^{q} N_{(f^k,H_i)}^{(N)}(r) + o(T(r, f^k)) \leq \sum_{i=1}^{q} \frac{N}{d} \cdot N_{(f^k,H_i)}^{(d)}(r) + o(T(r, f^k))$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \frac{N}{d} \cdot N_{(f^1,H_i)}^{(d)}(r) + o(T(r, f^k)) \leq q\frac{N}{d}T(r, f^1) + o(T(r, f^k)).$$

Do đó $\quad || \quad T(r, f^k) = O(T(r, f^1))$. Tương tự ta cũng có
$||T(r, f^1) = O(T(r, f^k))$. □

Bổ đề 1.1.6. *(Ji [35]) $\mathcal{C}$ trù mật trong $\mathbb{C}^{N+1}$.*

Bổ đề 1.1.7. *(Fujimoto [28]) Với mỗi phần tử $c \in \mathcal{C}$, chúng ta đặt $F_c^{jk} = \dfrac{(f^k, H_j)}{(f^k, c)}$. Khi đó ta có*

$$T(r, F_c^{jk}) \leq T(r, f^k) + o(T(r)).$$

Định nghĩa 1.1.8. *(Fujimoto [28]) Cho $F_0, ..., F_M$ là các hàm phân hình trên $\mathbb{C}^n$ với $M \geq 1$. Đặt $\alpha := (\alpha^0, ..., \alpha^{M-1})$ với các thành phần α^k là bộ thứ tự của n số nguyên không âm và đặt $|\alpha| = |\alpha^0| + ... + |\alpha^{M-1}|$. Chúng ta định nghĩa hàm bổ trợ như sau*

$$\Phi^\alpha \equiv \Phi^\alpha(F_0, ..., F_M) := F_0 F_1 \cdots F_M \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathcal{D}^{\alpha^0}(\frac{1}{F_0}) & \mathcal{D}^{\alpha^0}(\frac{1}{F_1}) & \cdots & \mathcal{D}^{\alpha^0}(\frac{1}{F_M}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}^{\alpha^{M-1}}(\frac{1}{F_0}) & \mathcal{D}^{\alpha^{M-1}}(\frac{1}{F_1}) & \cdots & \mathcal{D}^{\alpha^{M-1}}(\frac{1}{F_M}) \end{vmatrix}$$

Mệnh đề 1.1.9. *(Fujimoto [19]) Cho $\alpha = (\alpha^0, \cdots, \alpha^N)$ là một tập thích hợp cho $F = (f_0, \cdots, f_N)$ và cho h là một hàm chỉnh hình. Thế thì*

$$det\Big(D^{\alpha^0}(hF), \cdots, D^{\alpha^N}(hF)\Big) = h^{N+1} det\Big(D^{\alpha^0}(F), \cdots, D^{\alpha^N}(F)\Big).$$

Bổ đề 1.1.10. *(Fujimoto [28]) Nếu $\Phi^\alpha(F, G, H) = 0$ và $\Phi^\alpha(\frac{1}{F}, \frac{1}{G}, \frac{1}{H}) = 0$ với mọi α mà $|\alpha| \leq 1$. Thế thì một trong các khẳng định sau đúng*

(i) $F = G, G = H$ *hoặc* $H = F$.

(ii) $\frac{F}{G}, \frac{G}{H}$ *và* $\frac{H}{F}$ *đều là hàm hằng.*

Bổ đề 1.1.11. *Giả sử rằng $\Phi^\alpha(F_0, ..., F_M) \not\equiv 0$ với $|\alpha| \leq \dfrac{M(M-1)}{2}$. Nếu*

$$\nu^{([d])} := \min\,\{\nu_{F_0, \leq k_0}, d\} = \min\,\{\nu_{F_1, \leq k_1}, d\} = \cdots = \min\,\{\nu_{F_M, \leq k_M}, d\}$$

với một số $d \geq |\alpha|$ thì $\nu_{\Phi^\alpha}(z_0) \geq \min\,\{\nu^{([d])}(z_0), d - |\alpha|\}$ với mọi $z_0 \in \{z : \nu_{F_0, \leq k_0}(z) > 0\} \setminus A$, ở đó A là một tập con giải tích đối chiều ≥ 2.

Chứng minh. Đặt $H_s := \{z : \nu_{F_s, \leq k_s}(z) > 0\}$. Thế thì từ giả thiết ta có $H_0 = H_1 = ... = H_M := H$. Gọi A là tập tất cả các điểm kì dị của H. Ta có A là tập giải tích có chiều $\leq n-2$. Giả sử $z_0 \in H \setminus A$. Ta chọn một hàm chỉnh hình khác hằng h trên một lân cận U của z_0 sao cho dh không có không điểm và $H \cap U = \{z \in U; h(z) = 0\}$. Đặt $m_s := \nu_{F_s}(z_0)$ và $\varphi_s := \dfrac{1}{F_s}$ với $0 \leq s \leq M$. Ta có thể viết $\varphi_s = h^{-m_s}\widetilde{\varphi}_s$ trên một lân cận $V(\subset U)$ của z_0, ở đó $\widetilde{\varphi}_s$ không đâu bằng không trên V.

Trước hết chúng ta xét trường hợp $\nu^{[d]}(z_0) = d$. Khi đó ta có

$$\Phi^\alpha = \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_M \\ F_0.\mathcal{D}^{\alpha^0}(\frac{1}{F_0}) & F_1.\mathcal{D}^{\alpha^0}(\frac{1}{F_1}) & \cdots & F_M.\mathcal{D}^{\alpha^0}(\frac{1}{F_M}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_0.\mathcal{D}^{\alpha^{M-1}}(\frac{1}{F_0}) & F_1.\mathcal{D}^{\alpha^{M-1}}(\frac{1}{F_1}) & \cdots & F_M.\mathcal{D}^{\alpha^{M-1}}(\frac{1}{F_M}) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^M (-1)^i F_i\psi_i,$$

ở đó $\psi_i := det\Big(\dfrac{D^{\alpha^l}\varphi_k}{\varphi_k}; k = 0,...,i-1,i+1,...,M;\ l = 0,1,...,M-1\Big)$ là các hàm phân hình.

Bằng chứng minh quy nạp theo $\mid \alpha^l \mid$ ta có thể viết $\dfrac{D^{\alpha^l}\varphi_k}{\varphi_k}$ thành $\dfrac{D^{\alpha^l}\varphi_k}{\varphi_k} = \dfrac{\psi_{k,l}}{h^{|\alpha^l|}}$, ở đó $\psi_{k,l}$ là một hàm chỉnh hình và

$$\psi_i = \sum_{l=(l_1,...,l_M)} \epsilon(l)\frac{D^{\alpha^{l_1}}\varphi_0}{\varphi_0}\cdots\frac{D^{\alpha^{l_i}}\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-1}}.\frac{D^{\alpha^{l_{i+1}}}\varphi_{i+1}}{\varphi_{i+1}}\cdots\frac{D^{\alpha^{l_M}}\varphi_M}{\varphi_M},$$

ở đó $l = (l_1,...,l_M)$ chạy trên toàn bộ các hoán vị của $\{0,1,...,M-1\}$ và $\epsilon(l)$ là kí hiệu dấu của hoán vị l. Điều này suy ra $\nu^\infty_{\psi_i} \leq\mid \alpha \mid$. Từ giả thiết $\nu_{F_i,\leq k_i}(z_0) \geq \nu^{[d]}(z_0) = d$, ta có $\nu_{\Phi^\alpha}(z_0) \geq d- \mid \alpha \mid$.

Trường hợp còn lại là $1 \leq \nu^{[d]}(z_0) < d$. Khi đó, theo giả thiết, ta có

$$m^* := m_0 = m_1 = \cdots = m_M = \nu^{[d]}(z_0).$$

Bây giờ ta viết

$$\Phi^\alpha = \frac{1}{\varphi_0\varphi_1\cdots\varphi_M}\det\Big(D^{\alpha^l}(\varphi_k-\varphi_0); k = 1,...,M;\ l = 0,1,....,M-1\Big),$$

và $\varphi_k - \varphi_0 = h^{-m^*}(\widetilde{\varphi}_k - \widetilde{\varphi}_0)$ với $\widetilde{\varphi}_k - \widetilde{\varphi}_0$ là hàm chỉnh hình.

Áp dụng Mệnh đề 1.1.9, ta có

$$\Phi^\alpha = \frac{h^{m^*(M+1)}}{\widetilde{\varphi}_0\widetilde{\varphi}_1...\widetilde{\varphi}_M}.\frac{1}{h^{m^*M}}\det\Big(D^{\alpha^l}(\widetilde{\varphi}_k-\widetilde{\varphi}_0); k = 1,...,M;\ l = 0,1,....,M-1\Big)$$

và do đó

$$\Phi^\alpha = \frac{h^{m^*}}{\widetilde{\varphi}_0\widetilde{\varphi}_1...\widetilde{\varphi}_M}\det\Big(D^{\alpha^l}(\widetilde{\varphi}_k-\widetilde{\varphi}_0); k = 1,...,M;\ l = 0,1,....,M-1\Big).$$

Vậy ta có $\nu_{\Phi^\alpha}(z_0) \geq m^*$. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 1.1.12. *Cùng với giả thiết như trong Bổ đề 1.1.11, nếu* $F_0 = \cdots = F_M \not\equiv 0, \infty$ *trên một tập con giải tích* H *với chiều thuần túy* $n-1$*, thì* $\nu_{\Phi^\alpha}(z_0) \geq M,\ \forall\ z_0 \in H$.

Chứng minh. Sử dụng cách chứng minh và kí hiệu như trong Bổ đề 1.1.11 chúng ta giờ chỉ cần chứng minh rằng $\nu_{\Phi^\alpha}(z_0) \geq M$ cho tất cả các điểm chính quy z_0 của H với $F_k(z_0) \neq 0, \infty$ $(0 \leq k \leq M)$. Lấy một hàm chỉnh hình h trên một lân cận U của z_0 sao cho dh không có không điểm và $H \cap U = \{z \in U |\ h(z) = 0\}$. Ta viết $\psi_k := \dfrac{1}{F_k} - \dfrac{1}{F_0} = h\widetilde{\psi}_k$ $(1 \leq k \leq M)$ với hàm chỉnh hình khác không $\widetilde{\psi}_k$ trên một lân cận của z_0. Bây giờ sử dụng Mệnh đề 1.1.9 chúng ta có

$$\begin{aligned}\Phi^\alpha &= F_0F_1...F_M \det\Big(D^{\alpha^l}\widetilde{\psi}_k; k = 1, ..., M;\ l = 0, 1, ..., M-1\Big)\\ &= F_0F_1...F_M h^M \det\Big(D^{\alpha^l}\psi_k; k = 1, ..., M;\ l = 0, 1, ..., M-1\Big).\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra $\nu_{\Phi^\alpha}(z_0) \geq M$. □

Bổ đề 1.1.13. *Cho $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính và $H_1, H_2, ..., H_q$ là q siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Giả sử $k_j \geq N - 1$ $(1 \leq j \leq q)$. Thế thì ta có*

$$\Big\|\Big(q - N - 1 - \sum_{j=1}^{q}\frac{N}{k_j+1}\Big)T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{q}\Big(1 - \frac{N}{k_j+1}\Big)N^{(N)}_{(f,H_j),\leq k_j}(r) + o(T(r,f))\ .$$

Chứng minh. Sử dụng định lý cơ bản thứ hai chúng ta có

$$\begin{aligned}\|\quad (q - N - 1)T(r,f) &\leq \sum_{j=1}^{q} N^{(N)}_{(f,H_j)}(r) + o(T(r,f))\\
&= \sum_{j=1}^{q} N^{(N)}_{(f,H_j),\leq k_j}(r) + \sum_{j=1}^{q} N^{(N)}_{(f,H_j),>k_j}(r) + o(T(r,f))\\
&\leq \sum_{j=1}^{q} N^{(N)}_{(f,H_j),\leq k_j}(r) + \sum_{j=1}^{q}\frac{N}{k_j+1}N_{(f,H_j),>k_j}(r) + o(T(r,f))\\
&= \sum_{j=1}^{q} N^{(N)}_{(f,H_j),\leq k_j}(r) + \sum_{j=1}^{q}\frac{N}{k_j+1}\Big(N_{(f,H_j)}(r) - N_{(f,H_j),\leq k_j}(r)\Big) + o(T(r,f))\\
&\leq \sum_{j=1}^{q}\big(1 - \frac{N}{k_j+1}\big)N^{(N)}_{(f,H_j),\leq k_j}(r) + \sum_{j=1}^{q}\frac{N}{k_j+1}T(r,f) + o(T(r,f)).\end{aligned}$$

Do đó chúng ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 1.1.14. *Giả sử tồn tại $\Phi^\alpha = \Phi^\alpha(F_c^{j_0 0}, ..., F_c^{j_0 M}) \not\equiv 0$ với phần tử $c \in \mathcal{C}, |\alpha| \leq \dfrac{M(M-1)}{2}, 2 \geq |\alpha|$ và giả thiết như trong Bổ đề 1.1.11 được thỏa mãn. Thế thì với* *mỗi* $0 \leq i \leq M$, *các khẳng định sau đúng:*

$$|| \ N^{(2-|\alpha|)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + M\sum_{j\neq j_0} N^{(1)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) \leq N(r,\nu_{\Phi^\alpha}) \leq T(r) + \sum_{l=0}^{M} N^{(\frac{M(M-1)}{2})}_{(f^l,H_{j_0}),>k_{l j_0}}(r) + o(T(r)).$$

Chứng minh. Vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra trực tiếp từ các Bổ đề 1.1.11 và Bổ đề 1.1.12. Mặt khác ta cũng có

$$N(r,\nu_{\Phi^\alpha}) \leq T(r,\Phi^\alpha) + O(1) = N(r,\nu^\infty_{\Phi^\alpha}) + m(r,\Phi^\alpha) + O(1). \qquad (1.1.1)$$

Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng cực của Φ^α sẽ là không điểm hoặc cực điểm của các $F_c^{j_0 l}$ nào đó và Φ^α chỉnh hình tại tất cả các không điểm với bội $\leq k_{l j_0}$ của $F_c^{j_0 l}$ theo Bổ đề 1.1.11($l \in \{0, ..., M\}$). Giả sử z_0 là không điểm của $F_c^{j_0 l}$ với bội $> k_{l j_0}$. Chúng ta cũng nhận thấy rằng nếu z_0 là cực của $\dfrac{\mathcal{D}^{\alpha_i}(1/F_c^{j_0 l})}{(1/F_c^{j_0 l})}$ thì nó vẫn có bội $\leq |\alpha_i|$. Vậy nếu z_0 là cực của Φ^α thì nó có bội $\leq |\alpha| = \sum_{i=0}^{M-1}|\alpha_i| \leq \frac{M(M-1)}{2}$. Điều này suy ra

$$N(r,\nu^\infty_{\Phi^\alpha}) \leq \sum_{i=0}^{M} N^{(\frac{M(M-1)}{2})}_{(f^i,H_{j_0}),>k_{ij_0}}(r) + \sum_{i=0}^{M} N(r,\nu^\infty_{F_c^{j_0 i}}) \qquad (1.1.2)$$

và

$$\begin{aligned} m(r,\Phi^\alpha) &\leq \sum_{i=0}^{M} m(r,F_c^{j_0 i}) + O\left(\sum m\left(r, \frac{\mathcal{D}^{\alpha_i}(\varphi_c^{j_0 k})}{\varphi_c^{j_0 k}}\right)\right) + O(1) \\ &\leq \sum_{i=0}^{M} m(r,F_c^{j_0 i}) + o(T(r)) \qquad (1.1.3), \end{aligned}$$

ở đó $\varphi_c^{j_0 k} = 1/F_c^{j_0 k}$. Kết hợp (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) và Bổ đề 1.1.7, ta thu được

$$\begin{aligned} N(r,\nu_{\Phi^\alpha}) &\leq \sum_{i=0}^{M} N^{(\frac{M(M-1)}{2})}_{(f^i,H_{j_0}),>k_{ij_0}}(r) + \sum_{i=0}^{M} T(r,F_c^{j_0 i}) + o(T(r)) \\ &\leq T(r) + \sum_{i=0}^{M} N^{(\frac{M(M-1)}{2})}_{(f^i,H_{j_0}),>k_{ij_0}}(r) + o(T(r)). \end{aligned}$$

□

1.2 Định lý duy nhất của các ánh xạ phân hình với $2N+2$ siêu phẳng và bội bị chặn

Trong mục này chúng ta chứng minh định lý sau.

Định lý 1.2.1. *(Hà-Quang [33]) Giả sử f^1 và f^2 là hai ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ $(N \geq 2)$ và $H_1, ..., H_{2N+2}$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thỏa mãn*

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_i)}(z) > 0 \text{ và } \nu_{(f^1,H_j)}(z) > 0\} \leq n - 2$$

với mọi $1 \leq i < j \leq 2N + 2$. Giả sử m là số nguyên dương sao cho

$$m > \begin{pmatrix} 2N+2 \\ N+1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2N+2 \\ N+1 \end{pmatrix} - 2 \right].$$

Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn.

(a) $\min\{\nu_{(f^1,H_j)}, 1\} = \min\{\nu_{(f^2,H_j)}, 1\}$ $(1 \leq j \leq 2N + 2)$,

(b) $f^1(z) = f^2(z)$ *trên* $\bigcup_{j=1}^{2N+2}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_j)}(z) > 0\}$,

(c) $\min\{\nu_{(f^1,H_j)}(z), \nu_{(f^2,H_j)}(z)\} > N$ *hoặc* $\nu_{(f^1,H_j)}(z) \equiv \nu_{(f^2,H_j)}(z) \pmod m$ *với mọi* $z \in (f^1, H_j)^{-1}(0)$ $(1 \leq j \leq 2N + 2)$.

Khi đó ta có $f^1 \equiv f^2$.

Chứng minh. Giả sử $f^1 \not\equiv f^2$. Khi đó với mỗi chỉ số $i \in \{1, ..., q\}$, ta định nghĩa một divisor ν_i như sau

$$\nu_i(z) := \begin{cases} 1 & \text{nếu } \min\{\nu_{(f^1,H_i)}(z), \nu_{(f^2,H_i)}(z)\} > N, \\ 1 & \text{nếu } \nu_{(f^1,H_i)}(z) = \nu_{(f^2,H_i)}(z)) < N, \\ 0 & \text{cho các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Để chứng minh định lý chính ta cần một số các bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.2. *Giả sử cặp chỉ số $i, j \in \{1, 2, ..., 2N + 2\}$ thỏa mãn*

$$P_{ij} = \frac{(f^1, H_i)}{(f^1, H_j)} - \frac{(f^2, H_i)}{(f^2, H_j)} \not\equiv 0.$$

Khi đó ta có

$$\sum_{s=1}^{2} \sum_{v=i,j} \big(2N^{(N)}_{(f^s,H_v)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_j)}(r) + N(r, \nu_v)\big) + \sum_{s=1}^{2} \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq i,j}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)$$
$$\leq 2 \sum_{s=1}^{2} T(r, f^s) + O(1) \quad (1.2.1)$$

Chứng minh. Giả sử $z \in (f^1, H_v)^{-1}(0)$. Chúng ta xét ba trường hợp sau.

Trường hợp 1: $\min\,\{\nu_{(f^1,H_v)}(z), \nu_{(f^2,H_v)}(z)\} > N$.

Ta có

$$\begin{aligned}\min\{\nu_{(f^1,H_v)}(z), \nu_{(f^2,H_v)}(z)\} &\geq N+1\\ &= \sum_{s=1}^{2} \min\{\nu_{(f^s,H_v)}(z), N\} - N + \nu_v(z).\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $\nu_{(f^1,H_v)}(z) = \nu_{(f^2,H_v)}(z) < N$.

Ta có

$$\begin{aligned}\min\{\nu_{(f^1,H_v)}(z), \nu_{(f^2,H_v)}(z)\} &= \sum_{s=1}^{2} \min\{\nu_{(f^s,H_v)}(z), N\} - \nu_{(f^1,H_v)}(z)\\ &\geq \sum_{s=1}^{2} \min\{\nu_{(f^s,H_v)}(z), N\} - N + \nu_v(z).\end{aligned}$$

Trường hợp 3: z không thỏa mãn hai trường hợp trên.

Thế thì ta có $\nu_v(z) = 0$. Khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned}\min\{\nu_{(f^1,H_v)}(z), \nu_{(f^2,H_v)}(z)\} &\geq \sum_{s=1}^{2} \min\{\nu_{(f^s,H_v)}(z), N\} - N\\ &= \sum_{s=1}^{2} \min\{\nu_{(f^s,H_v)}(z), N\} - N + \nu_v(z).\end{aligned}$$

Từ 3 trường hợp trên ta có nếu $z \in (f^1, H_v)^{-1}(0)$ thì

$$\min\{\nu_{(f^1,H_v)}(z), \nu_{(f^2,H_v)}(z)\} \geq \sum_{s=1}^{2} \min\{\nu_{(f^s,H_v)}(z), N\} - N + \nu_v(z).$$

Kết hợp thêm với định nghĩa của P_{ij} ta suy ra

$$\begin{aligned}\nu_{P_{ij}}(z) &\geq \min\{\nu_{(f^1,H_i)}(z), \nu_{(f^2,H_i)}(z)\} + \sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} \nu^{(1)}_{(f^1,H_v)}(z)\\ &\geq \sum_{s=1}^{2} \nu^{(N)}_{(f^s,H_v)}(z) - N\nu_{(f^s,H_i)}(z) + \nu_i(z) + \sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} \nu^{(1)}_{(f^1,H_v)}(z)\end{aligned}$$

Cho $s = 1, 2$ ta suy ra

$$\nu_{P_{ij}}(z) \geq \sum_{s=1}^{2} \left(\nu^{(N)}_{(f^s,H_i)}(z) - \frac{N}{2}\nu^{(1)}_{(f^s,H_i)}(z) + \nu_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} \nu^{(1)}_{(f^s,H_v)}(z).$$

Do đó ta có

$$2N_{P_{ij}}(r) \geq \sum_{s=1}^{2} \big(2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r) + N(r,\nu_i)\big)$$
$$+ \sum_{s=1}^{2} \sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r) \quad (1.2.2).$$

Mặt khác ta cũng có

$$\begin{aligned} m(r,P_{ij}) &\leqslant m\bigg(r, \frac{(f^1,H_i)}{(f^1,H_j)}\bigg) + m\bigg(r, \frac{(f^2,H_i)}{(f^2,H_j)}\bigg) + O(1) \\ &\leqslant T\bigg(r, \frac{(f^1,H_i)}{(f^1,H_j)}\bigg) - N\bigg(r, \frac{(f^1,H_j)}{(f^1,H_i)}\bigg) + T\bigg(r, \frac{(f^2,H_i)}{(f^2,H_j)}\bigg) \\ &- N\bigg(r, \frac{(f^2,H_i)}{(f^2,H_j)}\bigg) + O(1) \\ &\leqslant T(r,f^1) + T(r,f^2) - N_{\frac{(f^1,H_j)}{(f^1,H_i)}}(r) - N_{\frac{(f^2,H_j)}{(f^2,H_i)}}(r) + O(1) \\ &= T(r,f^1) + T(r,f^2) - N_{(f^1,H_j)}(r) - N_{(f^2,H_j)}(r) + O(1) \end{aligned}$$

và

$$N_{\frac{1}{P_{ij}}}(r) \leq N(r,\mu_j), \quad \text{với } \mu_j(z) = \max\{\nu_{(f^1,H_j)}(z), \nu_{(f^2,H_j)}(z)\}.$$

Xét $z \in (f^1,H_j)^{-1}(0)$, ta dễ dàng chỉ ra rằng

$$\begin{aligned} \nu_{(f^1,H_j)}(z) + \nu_{(f^2,H_j)}(z) - \mu_j(z) &= \min\{\nu_{(f^1,H_j)}(z), \nu_{(f^2,H_j)}(z)\} \\ &\geq \min\{\nu_{(f^1,H_j)}(z), N\} + \min\{\nu_{(f^2,H_j)}(z), N\} - N + \nu_j(z). \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{s=1}^{2} \big(2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r) + N(r,\nu_i)\big) + \sum_{s=1}^{2} \sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)$$
$$\leq 2N_{P_{ij}}(r) \leq 2T(r,P_{ij}) = 2N_{\frac{1}{P_{ij}}}(r) + 2m(r,P_{ij}) + O(1).$$

$$\leq 2\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) + 2(N(r,\mu_j) - N_{(f^1,H_j)}(r) - N_{(f^2,H_j)}(r)) + O(1)$$
$$\leq 2\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) - 2(N^{(N)}_{(f^1,H_j)}(r) + N^{(N)}_{(f^2,H_j)}(r) - NN^{(1)}_{(f^1,H_j)}(r) + N(r,\nu_j))$$
$$+ O(1)$$
$$\leq 2\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) - \sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_j)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_j)}(r) + N(r,\nu_j)\big) + O(1).$$

Từ đó ta có

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{v=i,j}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_v)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_j)}(r) + N(r,\nu_v)\big) + \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)$$
$$\leq 2\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) + O(1).$$

Vậy Bổ đề 1.2.2 được chứng minh. $\square$

Bổ đề 1.2.3. *Với mỗi chỉ số $1 \leq i \leq 2N+2$, ta có*

$$\Big|\Big| \quad N(r,\nu_i) = o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)).$$

Chứng minh. Bằng cách thay đổi chỉ số nếu cần thiết ta có thể giả sử rằng

$$\underbrace{\frac{(f^1,H_1)}{(f^2,H_1)} \equiv \frac{(f^1,H_2)}{(f^2,H_2)} \equiv \cdots \equiv \frac{(f^1,H_{k_1})}{(f^2,H_{k_1})}}_{\text{nhóm 1}} \not\equiv \underbrace{\frac{(f^1,H_{k_1+1})}{(f^2,H_{k_1+1})} \equiv \cdots \equiv \frac{(f^1,H_{k_2})}{(f^2,H_{k_2})}}_{\text{nhóm 2}}$$
$$\not\equiv \underbrace{\frac{(f^1,H_{k_2+1})}{(f^2,H_{k_2+1})} \equiv \cdots \equiv \frac{(f^1,H_{k_3})}{(f^2,H_{k_3})}}_{\text{nhóm 3}} \not\equiv \cdots \not\equiv \underbrace{\frac{(f^1,H_{k_{s-1}+1})}{(f^2,H_{k_{s-1}+1})} \equiv \cdots \equiv \frac{(f^1,H_{k_s})}{(f^2,H_{k_s})}}_{\text{nhóm } s},$$

với $k_s = 2N+2$.

Với mỗi chỉ số $1 \leq i \leq 2N+2$, ta đặt

$$\chi(i) = \begin{cases} i+N & \text{nếu } i \leq N+2, \\ i-N-2 & \text{nếu } i > N+2. \end{cases}$$

Do $f^1 \not\equiv f^2$ nên số phần tử của mỗi nhóm nhiều nhất là N. Do đó $\dfrac{(f^1,H_i)}{(f^2,H_i)}$ và $\dfrac{(f^1,H_{\chi(i)})}{(f^2,H_{\chi(i)})}$

thuộc hai nhóm khác nhau. Vậy ta có $\dfrac{(f^1,H_i)}{(f^2,H_i)} \not\equiv \dfrac{(f^1,H_{\chi(i)})}{(f^2,H_{\chi(i)})}$ $(1 \le i \le 2N+2)$. Suy ra

$$P_{\chi(i)i} = \frac{(f^1,H_{\chi(i)})}{(f^1,H_i)} - \frac{(f^2,H_{\chi(i)})}{(f^2,H_i)} \not\equiv 0 \ (1 \le i \le 2N+2).$$

Bây giờ sử dụng Bổ đề 1.2.2, ta lấy tổng hai vế của (1.2.1) cho tất cả các cặp $(i,\chi(i))$, ta có

$$\sum_{s=1,2}\sum_{i=1}^{2N+2}\Big(4N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) + 2N(r,\nu_i)\Big) \le 2(2N+2)\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) + O(1) \quad (1.2.3)$$

Thế thì theo định lý cơ bản thứ hai ta thu được

$$\begin{aligned} || \ 2(2N+2)\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) &\ge \sum_{s=1,2}\sum_{i=1}^{2N+2}\Big(4N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) + 2N(r,\nu_i)\Big) + O(1) \\ &\ge 4(N+1)\sum_{s=1,2} T(r,f^s) + 4\sum_{i=1}^{2N+2} N(r,\nu_i) \\ &+ o(\sum_{s=1,2} T(r,f^s)) \quad (1.2.4). \end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$|| \ N(r,\nu_i) = o(\sum_{s=1,2} T(r,f^s)).$$

Vậy Bổ đề 1.2.3 được chứng minh. □

Bổ đề 1.2.4. *Với mỗi $i = 1,...,2N+2$ thì các khẳng định sau đúng*

$$\begin{aligned} (i) \ || \ &\sum_{s=1}^{2}\sum_{v=\chi(i),i}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_v)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_j)}(r)) + \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq\chi(i),i}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r) \\ &= 2\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \quad (1.2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \ || \ 2N_{P_{\chi(i)i}}(r) &= \sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_{\chi(i)})}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_{\chi(i)})}(r) \\ &+ \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq\chi(i),i}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \quad (1.2.6) \end{aligned}$$

Chứng minh. Do bất đẳng thức (1.2.4) xảy ra dấu bằng nên các bất đẳng thức (1.2.1) và (1.2.2) cũng phải xảy ra dấu bằng với mọi $P_{\chi(i)i}$. Hơn nữa chúng ta cũng có

$\parallel N(r,\nu_{\chi(i)}) = N(r,\nu_i) = o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s))$. Điều này suy ra Bổ đề 1.2.4 được chứng minh. $\square$

Bổ đề 1.2.5. *Cho $i,j \in \{1,...,2N+2\}$ sao cho $P_{ij} \not\equiv 0$. Thế thì các khẳng định sau đúng*

$$(i) \parallel \sum_{s=1}^{2}\sum_{v=i,j}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_v)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)) + \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)$$
$$= 2\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \quad (1.2.7)$$
$$(ii) \parallel 2N_{P_{ij}}(r) = \sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r))$$
$$+ \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,j}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \quad (1.2.8)$$

Chứng minh. Do $P_{ij} \not\equiv 0$ và $\frac{(f^1,H_i)}{(f^1,H_j)}, \frac{(f^2,H_i)}{(f^2,H_j)}$ thuộc hai nhóm phân biệt nên ta có thể thay đổi chỉ số để $i = \chi(j)$. Áp dụng Bổ đề 1.2.4 ta suy ra Bổ đề 1.2.5. $\square$

Bây giờ chúng ta trở lại chứng minh định lý chính. Ta xét hai chỉ số bất kì $i,j \in \{1,...,2N+2\}$. Do $f^1 \not\equiv f^2$ nên tồn tại chỉ số k sao cho $P_{ik} \not\equiv 0$ và $P_{jk} \not\equiv 0$. Sử dụng (1.2.7), ta có

$$\parallel \sum_{s=1}^{2}\sum_{v=i,k}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_v)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)) + \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq i,k}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)$$
$$= \sum_{s=1}^{2}\sum_{v=j,k}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_v)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)) + \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq j,k}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)$$
$$+ o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) = 2\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)).$$

Do đó

$$\parallel \sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) - (N+1)N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r)) = \sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_j)}(r)$$
$$- (N+1)N^{(1)}_{(f^s,H_j)}(r)) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \quad (1.2.9)$$

Kết hợp với (1.2.7) và (1.2.9), chúng ta thu được

$$\| \ 2\sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r)-(N+1)N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r)\big)+\sum_{s=1}^{2}\sum_{v=1}^{2N+2}N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r)$$
$$=2\sum_{s=1}^{2}T(r,f^s)+o\Big(\sum_{s=1}^{2}T(r,f^s)\Big) \quad (1.2.10)$$

Giả sử rằng $H_i=\{a_{i0}\omega_0+\cdots+a_{iN}\omega_N=0\}$. Ta đặt $h_i=\dfrac{(f^1,H_i)}{(f^2,H_i)}$ $(1\le i\le 2N+2)$. Thế thì $\dfrac{h_i}{h_j}=\dfrac{(f^1,H_i)\cdot(f^2,H_j)}{(f^1,H_j)\cdot(f^2,H_i)}$ không phụ thuộc vào biểu diễn rút gọn của f^1 và f^2 tương ứng. Ta lại có $\sum_{k=0}^{N}a_{ik}f_{1k}-h_i\cdot\sum_{k=0}^{N}a_{ik}f_{2k}=0$ $(1\le i\le 2N+2)$, nên suy ra $\det(a_{i0},...,a_{iN},a_{i0}h_i,...,a_{iN}h_i;1\le i\le 2N+2)=0$.

Bây giờ với mỗi tập con $I\subset\{1,2,...,2N+2\}$, ta đặt $h_I=\prod_{i\in I}h_i$. Kí hiệu $\mathcal{I}$ là tập tất cả các tập $I=(i_1,...,i_{N+1})$ với $1\le i_1<...<i_{N+1}\le 2N+2$.

Với mỗi tập con $I=(i_1,...,i_{N+1})\in\mathcal{I}$, ta định nghĩa

$$A_I=(-1)^{\frac{(N+1)(N+2)}{2}+i_1+...+i_{N+1}}\cdot\det(a_{i_rl};1\le r\le N+1,0\le l\le N)\cdot$$
$$\det(a_{j_sl};1\le s\le N+1,0\le l\le N),$$

ở đó $J=(j_1,...,j_{N+1})\in\mathcal{I}$ sao cho $I\cup J=\{1,2,...,2N+2\}$.

Thế thì ta có $\sum_{I\in\mathcal{I}}A_Ih_I=0$.

Lấy $I_0\in\mathcal{I}$, ta có

$$A_{I_0}h_{I_0}=-\sum_{I\in\mathcal{I},I\ne I_0}A_Ih_I,\ \text{hay}\ h_{I_0}=-\sum_{I\in\mathcal{I},I\ne I_0}\frac{A_I}{A_{I_0}}h_I.$$

Chú ý rằng với mỗi $I\in\mathcal{I}$, thì $\frac{A_I}{A_{I_0}}\not\equiv 0$.

Gọi t là số nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện sau:

Tồn tại t phần tử $I_1,...,I_t\in\mathcal{I}\setminus\{I_0\}$ và t hằng số khác không $b_i\in\mathbb{C}$ sao cho $h_{I_0}=\sum_{i=1}^{t}b_ih_{I_i}$.

Ta dễ dàng nhận thấy $t\le\begin{pmatrix}2N+2\\N+1\end{pmatrix}-1$.

Do $h_{I_0}\not\equiv 0$ và do tính chất nhỏ nhất của t nên họ các hàm $\{h_{I_1},...,h_{I_t}\}$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$.

Giả sử phản chứng rằng $t \geq 2$.

Khi đó ta xét ánh xạ phân hình $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^{t-1}(\mathbb{C})$ với biểu diễn rút gọn $h = (dh_{I_1} : ... : dh_{I_t})$, ở đó d là ánh xạ phân hình trên $\mathbb{C}^n$.

Nếu z là không điểm (tương ứng là cực điểm) của h_i thì $\nu_{(f^1,H_i)}(z) \neq \nu_{(f^2,H_i)}(z)$. Do đó $\max\{\nu_{(f^1,H_i)}(z), \nu_{(f^2,H_i)}(z)\} > N$ hoặc $|\nu_{(f^1,H_i)}(z) - \nu_{(f^2,H_i)}(z)| > m$. Vậy $\nu_i(z) = 1$ hoặc z là không điểm hoặc cực điểm của h_i với bội lớn hơn hoặc bằng m. Ta dễ thấy rằng nếu z là không điểm của dh_I thì $\nu_i(z) = 1$ với một chỉ số $i \in \{1, ..., 2N+2\}$ hoặc z là không điểm của dh_I với bội lớn hơn hoặc bằng m. Vậy ta có, với mỗi $z \notin (f^1)^{-1}(H_i) \cap (f^1)^{-1}(H_j) (1 \leq i < j \leq 2N+2)$. thì

$$\min\{1, \nu_{dh_I}(z)\} \leq \sum_{i=1}^{2N+2} \nu_i(z) + \frac{1}{m}\nu_{dh_I}(z).$$

Điều này suy ra rằng

$$|| \ N^{(1)}_{dh_I}(r) \leq \sum_{i=1}^{2N+2} N(r, \nu_i)(r) + \frac{1}{m} N_{dh_I}(r) \leq \frac{1}{m} T(r,h) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r, f^s))$$

với mọi $I \in \mathcal{I}$.

Sử dụng định lý cơ bản thứ hai ta có

$$\begin{aligned} || \quad T(r,h) &\leq \sum_{i=1}^{t} N^{(t-1)}_{dh_{I_i}}(r) + N^{(t-1)}_{dh_{I_0}}(r) + o(T(r,h)) \\ &\leq (t-1)\big(\sum_{i=1}^{t} N^{(1)}_{dh_{I_i}}(r) + N^{(1)}_{dh_{I_0}}(r)\big) + o(T(r,h)) \\ &\leq \frac{(t-1)(t+1)}{m} T(r,h) + o(T(r,h)) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r, f^s)). \end{aligned}$$

Suy ra $|| \quad T(r,h) = o(\sum_{s=1}^{2} T(r, f^s))$.

Ta xét các siêu phẳng $\tilde{H}_1 = \{w_1 = 0\}, \ \tilde{H}_2 = \{w_2 = 0\}, \ \tilde{H}_3 = \{b_1 w_1 + ... + b_t w_t = 0\}$ trong $\mathbb{P}^{t-1}(\mathbb{C})$. Thế thì

$$\begin{aligned} T(r,h) &\geq T\Big(r, \frac{(h,\tilde{H}_1)}{(h,\tilde{H}_2)}\Big) + O(1) = T\Big(r, \frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}\Big) + O(1) \geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}-1} + O(1), \\ T(r,h) &\geq T\Big(r, \frac{(h,\tilde{H}_2)}{(h,\tilde{H}_3)}\Big) + O(1) = T\Big(r, \frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}\Big) + O(1) \geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}-1} + O(1), \\ T(r,h) &\geq T\Big(r, \frac{(h,\tilde{H}_3)}{(h,\tilde{H}_1)}\Big) + O(1) = T\Big(r, \frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}\Big) + O(1) \geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}-1}(r) + O(1). \end{aligned}$$

Suy ra $3T(r,h) \geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}-1}(r) + N^{(1)}_{\frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}-1}(r) + N^{(1)}_{\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}-1}(r) + O(1)$.

Lại có $\dfrac{h_I}{h_J} = 1$ trên tập $\bigcup_{j\in((I\cup J)\setminus(I\cap J))^c} E_j$,
ở đó $E_j = \{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,H_j)}(z) > 0\}$ và $((I_1 \cup I_2) \setminus (I_1 \cap I_2))^c \cup ((I_2 \cup I_0) \setminus (I_2 \cap I_0))^c \cup ((I_0 \cup I_1) \setminus (I_0 \cap I_1))^c = \{1, ..., 2N+2\})$, nên ta suy ra

$$N^{(1)}_{\frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}-1}(r) + N^{(1)}_{\frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}-1}(r) + N^{(1)}_{\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}-1}(r) \geq \sum_{i=1}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r).$$

Do đó $||\ 3T(r,h) \geq \sum_{i=1}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r) + O(1) = \dfrac{N+1}{N}\cdot T(r,f^s) + o(T(r,f^s))$ $(s = 1,2)$. Suy ra $||\ T(r,f^s) = 0$ $(s = 1,2)$. Điều này là mâu thuẫn. Vậy $t = 1$.

Do vậy $\dfrac{h_{I_0}}{h_{I_1}} =$ hằng số $\neq 0$. Suy ra, với mỗi $I \in \mathcal{I}$, có tập $J \in \mathcal{I} \setminus \{I\}$ sao cho $\dfrac{h_I}{h_J} =$ hằng số $\neq 0$. Xét nhóm aben không xoắn sinh bởi họ các lớp $\{[h_1], ..., [h_{2N+2}]\}$ của nhóm aben không xoắn $\mathcal{M}^*{}_n/\mathbb{C}^*$. Thế thì họ $\{[h_1], ..., [h_{2N+2}]\}$ có tính chất $P_{2N+2,N+1}$. Điều này suy ra rằng có $2N + 2 - 2N = 2$ phần tử, mà không mất tính tổng quát ta giả sử chúng là $[h_1], [h_2]$, sao cho $[h_1] = [h_2]$. Thế thì $\dfrac{h_1}{h_2} = \chi \in \mathbb{C}^*$.

Bây giờ ta giả sử $\chi \neq 1$.

Do $\dfrac{h_1(z)}{h_2(z)} = 1$ với mỗi $z \in \bigcup_{i=3}^{2N+2} (f^1)^{-1}(H_i) \setminus ((f^1)^{-1}(H_1) \cup (f^1)^{-1}(H_2)$, nên $\bigcup_{i=3}^{2N+2} (f^1)^{-1}(H_i) = \emptyset$. Sử dụng định lý cơ bản thứ hai ta có

$$||\quad (2N - N - 1)T(r,f^1) \leq \sum_{i=3}^{2N+2} N^{(N)}_{(f^1,H_i)}(r) + o(T(r,f^1)) = o(T(r,f^1)).$$

Điều này là mâu thuẫn. Vậy $\chi = 1$, hay $h_1 = h_2$.

Bằng cách thay đổi biểu diễn rút gọn của f^1, f^2 nếu cần thiết, chúng ta có thể giả sử rằng $(f^1, H_1) = (f^2, H_1)$. Suy ra ta có $(f^1, H_2) = (f^2, H_2)$ (1.2.11).

Bây giờ ta xét

$$\begin{aligned} P_{\chi(N+3)(N+3)} = P_{1(N+3)} &= \frac{(f^1,H_1)}{(f^1,H_{N+3})} - \frac{(f^2,H_1)}{(f^2,H_{N+3})} \\ &= \frac{(f^1,H_1)((f^2,H_{N+3}) - (f^1,H_{N+3}))}{(f^1,H_{N+3})(f^2,H_{N+3})} \not\equiv 0. \end{aligned}$$

Do $(f^1, H_i)(z) = (f^2, H_i)(z)$ trên $\bigcup_{j=1}^{2N+2} (f^1)^{-1}(H_j) \setminus ((f^1)^{-1}(H_1) \cap (f^1)^{-1}(H_2))$ với mỗi $1 \leq i \leq 2N+2$ nên

$$2N_{P_{1(N+3)}}(r) \geq 2N_{(f^1,H_1)}(r) + \sum_{\substack{v=1\\ v\neq N+3}}^{2N+2} 2N^{(1)}_{(f^1,H_v)}(r)$$

$$\geq \sum_{s=1}^{2}(2N_{(f^s,H_1)}(r) - NN^{(1)}_{(f^s,H_1)}(r)) + \sum_{s=1}^{2}\sum_{\substack{v=1\\ v\neq N+3}}^{2N+2} N^{(1)}_{(f^s,H_v)}(r) \quad (1.2.12)$$

Kết hợp thêm với (1.2.8) và (1.2.12), chúng ta suy ra

$$||N^{(1)}_{(f^1,H_1)}(r)) = N^{(1)}_{(f^2,H_1)}(r)) = o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \quad (1.2.13)$$

Từ (1.2.9) và (1.2.13), với mỗi $i \in \{1,...,2N+2\}$ ta có

$$|| \sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) - (N+1)N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r)) = o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \quad (1.2.14)$$

Mặt khác, với mỗi $z \in (f^1,H_i)^{-1}(0)$, nếu $\nu_i(z) = 0$ thì hoặc $\nu_{(f^1,H_i)}(z) = \nu_{(f^2,H_i)}(z) = N$ hoặc $|\nu_{(f^1,H_i)}(z) - \nu_{(f^2,H_i)}(z)| \geq m$. Suy ra

$$\nu_{(f^1,H_i)}(z) + \nu_{(f^2,H_i)}(z) \geq 2N.$$

Do đó

$$|| \sum_{s=1}^{2} 2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) \geq \sum_{s=1}^{2} 2NN^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r) + 2NN(r,\nu_i)$$

$$= \sum_{s=1}^{2} 2NN^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)).$$

Điều này suy ra

$$|| \sum_{s=1}^{2}\big(2N^{(N)}_{(f^s,H_i)}(r) - (N+1)N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r) \geq (N-1)\sum_{s=1}^{2} N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r))$$

$$+ o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)).$$

Kết hợp bất đẳng thức vừa thu được và (1.2.14), ta có

$$\sum_{s=1}^{2} N^{(1)}_{(f^s,H_i)}(r) = o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) \ (1 \leq i \leq 2N+2).$$

Áp dụng định lý cơ bản thứ hai, ta có

$$|| \sum_{s=1}^{2}(N+1)T(r,f^s) \leq \sum_{s=1}^{2}\sum_{v=1}^{2N+2} N^{(N)}_{(f^s,H_v)}(r) + o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)) = o(\sum_{s=1}^{2} T(r,f^s)).$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy $f^1 \equiv f^2$. Định lý được chứng minh. $\square$

1.3 Định lý duy nhất của các ánh xạ phân hình với mục tiêu cố định và chặn bội có rẽ nhánh

Trong mục này chúng tôi chứng minh kết quả sau.

Định lý 1.3.1. *(Hà [31]) Giả sử $f^1, f^2, f^3 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là các ánh phân hình và $\{H_i\}_{i=1}^q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Giả sử $d, k, k_{1i}, k_{2i}, k_{3i}$ là các số nguyên thỏa mãn*
$1 \le k_{1i}, k_{2i}, k_{3i} \le \infty$ $(1 \le i \le q)$. Ta đặt $M = max\{k_{ji}\}$, $m = min\{k_{ji}\}$ $(1 \le j \le 3, 1 \le i \le q)$, $k = max\{\sharp\{i \in \{1, 2 \cdots, q\} \mid k_{ji} = m\} \mid 1 \le j \le 3\}$ và quy ước $d = 0$ nếu $M = m$ và $d = min\{k_{ji} - m > 0 \mid 1 \le j \le 3; 1 \le i \le q\}$ nếu $M \ne m$. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn
(i) $\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^j,H_i),\le k_{ji}} > 0$ và $\nu_{(f^j,H_l),\le k_{jl}} > 0\} \le n-2$
$(1 \le j \le 3; 1 \le i < l \le q)$
(ii) $\min(\nu_{(f^j,H_i),\le k_{ji}}, 2) = \min(\nu_{(f^t,H_i),\le k_{ti}}, 2)$ $(1 \le j < t \le 3; 1 \le i \le q)$
(iii) $f^1 \equiv f^j$ trên $\bigcup_{\alpha=1}^q \{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_\alpha),\le k_{1\alpha}}(z) > 0\}$ $\quad (1 \le j \le 3)$.

Khi đó ta có $f^1 \equiv f^2$ hoặc $f^2 \equiv f^3$ hoặc $f^3 \equiv f^1$ nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn:
1) $N \ge 2, 3N - 1 \le q \le 3N + 1, m > 3N + 1 + \dfrac{16}{3(N-1)}$ và
$(2q - 5N - 3) > \dfrac{2Nk}{m+1} + \dfrac{2N(q-k)}{m+d+1} - \dfrac{3N^2+N}{M+1}$.
2) $N = 1, q = 4$ và $\dfrac{3(2k+1)}{m+1} + \dfrac{6(4-k)}{m+d+1} + \dfrac{6k}{M(m+1)} + \dfrac{24-6k}{M(m+d+1)} < 1 + \dfrac{12}{M}$.

Trước khi chứng minh Định lý 1.3.1, chúng ta đưa ra một số hệ quả của định lý như sau.

***)** Định lý G là hệ quả của Định lý 1.3.1 khi chọn $M = m$ và $k = q$.

***)** Khi $k = 1, M = m + d$ và hoặc $d = 1$ hoặc $d = 2$, sử dụng trường hợp 1 của Định lý 1.3.1, chúng ta có kết quả sau

Hệ quả 1.3.2. *Giả sử $f^1, f^2, f^3 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là ba ánh xạ phân hình và $\{H_i\}_{i=1}^{3N+1}$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Giả sử k_i là các số nguyên dương thỏa* *mãn* $1 \leq i \leq 3N+1$. *Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) $\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^j,H_i),\leq k_i} > 0$ *và* $\nu_{(f^j,H_l),\leq k_l} > 0\} \leq n-2 (1 \leq i < l \leq 3N+1)$

(ii) $\min(\nu_{(f^j,H_i),\leq k_i}, 2) = min(\nu_{(f^t,H_i),\leq k_i}, 2)$ $(1 \leq j < t \leq 3; 1 \leq i \leq 3N+1)$

(iii) $f^1 \equiv f^j$ *trên* $\bigcup_{\alpha=1}^{3N+1}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_\alpha),\leq k_\alpha}(z) > 0\} \quad (1 \leq j \leq 3)$.

Thế thì hoặc $f^1 \equiv f^2$ *hoặc* $f^2 \equiv f^3$ *hoặc* $f^3 \equiv f^1$ *nếu một trong các điều kiện sau thỏa mãn*

a) $N \geq 2, k_j = k_1 + 1$ *với* $2 \leq j \leq 3N+1$ *và* $k_1 > 3N + 2 + \dfrac{14}{3(N-1)}$.

b) $N \geq 2, k_j = k_1 + 2$ *với* $2 \leq j \leq 3N+1$ *và* $k_1 > 3N + 1 + \dfrac{16}{3(N-1)}$.

***)** Khi $k = 1$ và $M = m + d$, bằng cách áp dụng chứng minh của trường hợp 2 trong Định lý 1.3.1, chúng ta thu được kết quả sau

Hệ quả 1.3.3. *Cho* $f^1, f^2, f^3 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *là ba ánh xạ phân hình và* $\{H_i\}_{i=1}^4$ *là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. *Gọi* k_i $(1 \leq i \leq 4)$ *là các số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện sau*

(i) $\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^j,H_i),\leq k_i} > 0$ *và* $\nu_{(f^j,H_l),\leq k_l} > 0\} \leq n-2$

($1 \leq j \leq 3; 1 \leq i < l \leq 4$*)*

(ii) $\min(\nu_{(f^j,H_i),\leq k_i}, 2) = min(\nu_{(f^t,H_i),\leq k_i}, 2)$ $(1 \leq j < t \leq 3; 1 \leq i \leq 4$*)*

(iii) $f^1 \equiv f^j$ *trên* $\bigcup_{\alpha=1}^{4}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^1,H_\alpha),\leq k_\alpha}(z) > 0\} \quad (1 \leq j \leq 3)$

Giả sử rằng một trong các điều kiện sau thỏa mãn

a) $k_1 = 9, k_2 = k_3 = k_4 = 66$.

b) $k_1 = 10, k_2 = k_3 = k_4 = 36$.

c) $k_1 = 11, k_2 = k_3 = k_4 = 26$.

d) $k_1 = 12, k_2 = k_3 = k_4 = 21$.

e) $k_1 = 13, k_2 = k_3 = k_4 = 18$.

f) $k_1 = 14, k_2 = k_3 = k_4 = 16$.

Thế thì chúng ta có hoặc $f^1 \equiv f^2$ *hoặc* $f^2 \equiv f^3$ *hoặc* $f^3 \equiv f^1$.

Bây giờ ta đi chứng minh Định lý 1.3.1.

Chứng minh. **Trường hợp 1.** $N \geq 2, 3N - 1 \leq q \leq 3N + 1, m > 3N + 1 + \dfrac{16}{3(N-1)}$ và

$$(2q-5N-3) > \frac{2Nk}{m+1} + \frac{2N(q-k)}{m+d+1} - \frac{3N^2+N}{M+1}.$$

Trước hết chúng ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 1.3.4. *Kí hiệu $\mathcal{Q}$ là tập tất cả các chỉ số $j_0 \in \{1,2,...,q\}$ thỏa mãn điều kiện sau: Tồn tại $c \in \mathcal{C}$ và $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ với $|\alpha| \leq 1$ sao cho $\Phi^{\alpha}(F_c^{j_01}, F_c^{j_02}, F_c^{j_03}) \not\equiv 0$.*

Khi đó ta có $\mathcal{Q}$ là một tập rỗng.

Chứng minh. Giả sử rằng $\mathcal{Q}$ là tập khác rỗng. Với mỗi $1 \leq i \leq 3$ và $j_0 \in \mathcal{Q}$, áp dụng Bổ đề 1.1.14, chúng ta có

$$\Big\| \quad N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + 2\sum_{j\neq j_0} N^{(1)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) \leq T(r) + \sum_{l=1}^{3} N^{(1)}_{(f^l,H_{j_0}),>k_{lj_0}}(r) + o(T(r)),$$

và suy ra

$$\Big\| \quad N^{(N)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + 2\sum_{j\neq j_0} N^{(N)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) \leq N\cdot T(r) + N\sum_{l=1}^{3} N^{(1)}_{(f^l,H_{j_0}),>k_{lj_0}}(r) + o(T(r)).$$

Từ đó ta có

$$\Big\| \sum_{i=1}^{3}\Big(N^{(N)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + 2\sum_{j\neq j_0} N^{(N)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r)\Big) \leq 3NT(r) + 3N\sum_{i=1}^{3} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),>k_{ij_0}}(r) + o(T(r))$$

$$\leq 3NT(r) + \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{3N}{k_{ij_0}+1}\Big) N_{(f^i,H_{j_0}),>k_{ij_0}}(r) + o(T(r))$$

$$\leq 3NT(r) + \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{3N}{k_{ij_0}+1}\Big)\Big(N_{(f^i,H_{j_0})}(r) - N_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r)\Big) + o(T(r)) (1.3.1).$$

Suy ra

$$\Big\| \sum_{i=1}^{3}\Big(2\sum_{j=1}^{q} N^{(N)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r)\Big) \leq 3NT(r) + \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{3N}{k_{ij_0}+1}\Big) N_{(f^i,H_{j_0})}(r) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3}(1 - \frac{3N}{k_{ij_0}+1}) N^{(N)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + o(T(r)) \quad (1.3.2).$$

Mặt khác, do $1 - \dfrac{3N}{k_{ij_0}+1} > 0$ và $\max\{N^{(N)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r); N_{(f^i,H_{j_0})}(r)\} \leq T(r,f^i) + o(T(r,f^i))$ với mọi $1 \leq i \leq 3$ (1.3.3) nên ta có

$$\Big\| \quad 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{q} N^{(N)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) \leq (3N+1)T(r) + o(T(r)) (1.3.4).$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.13, ta có

$$\Big\|\Big(q-N-1-\sum_{j=1}^{q}\frac{N}{k_{ij}+1}\Big)T(r,f^i)\le\sum_{j=1}^{q}\Big(1-\frac{N}{k_{ij}+1}\Big)N^{(N)}_{(f^i,H_j),\le k_{ij}}(r)+o(T(r,f^i)).$$

$$\Rightarrow\Big(q-N-1-\frac{Nk}{m+1}-\frac{N(q-k)}{m+d+1}\Big)T(r,f^i)\le\Big(1-\frac{N}{M+1}\Big)\sum_{j=1}^{q}N^{(N)}_{(f^i,H_j),\le k_{ij}}(r)+o(T(r,f^i)).$$

$$\Rightarrow\Big(q-N-1-\frac{Nk}{m+1}-\frac{N(q-k)}{m+d+1}\Big)T(r)\le\Big(1-\frac{N}{M+1}\Big)\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{q}N^{(N)}_{(f^i,H_j),\le k_{ij}}(r)+o(T(r)).\quad(1.3.5)$$

Kết hợp (1.3.4) và (1.3.5), ta có khẳng định sau

$$\Big\|\ 2\Big(q-N-1-\frac{Nk}{m+1}-\frac{N(q-k)}{m+d+1}\Big)T(r)\le(3N+1)(1-\frac{N}{M+1})T(r)+o(T(r)).$$

Cho r tiến ra $+\infty$, chúng ta thu được

$$\Big\|\ 2\Big(q-N-1-\frac{Nk}{m+1}-\frac{N(q-k)}{m+d+1}\Big)\le(3N+1)(1-\frac{N}{M+1}),$$

và do đó

$$(2q-5N-3)\le\frac{2Nk}{m+1}+\frac{2N(q-k)}{m+d+1}-\frac{3N^2+N}{M+1}(1.3.6).$$

Điều này là mâu thuẫn. Vậy chúng ta có $\sharp\mathcal{Q}=0$

Bổ đề 1.3.5. *Nếu* $\sharp\Big(\{1,2,...,q\}\setminus\mathcal{Q}\Big)\ge 3N-1$ *và* $N\ge2$ *thì hoặc* $f^1\equiv f^2$, *hoặc* $f^2\equiv f^3$, *hoặc* $f^3\equiv f^1$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử rằng $1,...,3N-1\notin\mathcal{Q}$. Thế thì theo tính chất trù mật của $\mathcal{C}$ ta suy ra

$$\Phi^\alpha(F_j^{i1},F_j^{i2},F_j^{i3})=0\ (1\le i,j\le 3N-1,|\alpha|\le1).$$

Do đó tồn tại $\chi_{ij}\ne0$ sao cho hoặc $F_j^{i1}=\chi_{ij}F_j^{i2}$, hoặc $F_j^{i2}=\chi_{ij}F_j^{i3}$, hoặc $F_j^{i3}=\chi_{ij}F_j^{i1}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $F_j^{i1}=\chi_{ij}F_j^{i2}$.

Giả sử phản chứng rằng $\chi_{ij}\ne1$. Thế thì ta có: Nếu $\nu_{(f^1,H_l),\le k_{1l}}(z)>0$ $(l\ne i,j)$ thì $\nu_{(f^1,H_i)}(z)>0$ or $\nu_{(f^1,H_j)}(z)>0$.

Do đó ta có

$\sum_{l\ne i,j}\nu^{(1)}_{(f^1,H_l),\le k_{1l}}(z)\le\nu^{(1)}_{(f^1,H_i),>k_{1i}}(z)+\nu^{(1)}_{(f^1,H_j),>k_{1j}}(z)$ ngoài hợp hữu hạn của cá tập con giải tích chiều $\le n-2$. Suy ra

$$\sum_{l\ne i,j}N^{(1)}_{(f^1,H_l),\le k_{1l}}(r)\le N^{(1)}_{(f^1,H_i),>k_{1i}}(r)+N^{(1)}_{(f^1,H_j),>k_{1j}}(r)$$

$$\leq \frac{1}{k_{1i}+1} N_{(f^1,H_i),>k_{1i}}(r) + \frac{1}{k_{1j}+1} N_{(f^1,H_j),>k_{1j}}(r)$$
$$\leq \frac{1}{k_{1i}+1} N_{(f^1,H_i)}(r) + \frac{1}{k_{1j}+1} N_{(f^1,H_j)}(r) \leq \frac{2}{m+1} T(r,f^1).$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.13 và $k_{1l} \geq N-1$, ta có

$$\Big\|\Big(q - N - 3 - \sum_{l \neq i,j} \frac{N}{k_{1l}+1} \Big) T(r,f^1) \leq \sum_{l \neq i,j} \Big(1 - \frac{N}{k_{1l}+1} \Big) N^{(N)}_{(f^1,H_l),\leq k_{1l}}(r) + o(T(r,f^1)).$$

Do đó ta suy ra

$$\begin{aligned}
\Big(q - N - 3 - \sum_{l \neq i,j} \frac{N}{m+1} \Big) T(r,f^1) &\leq \sum_{l \neq i,j} \Big(1 - \frac{N}{M+1} \Big) N^{(N)}_{(f^1,H_l),\leq k_{1l}}(r) + o(T(r,f^1)) \\
&\leq N \Big(1 - \frac{N}{M+1} \Big) \sum_{l \neq i,j} N^{(1)}_{(f^1,H_l),\leq k_{1l}}(r) + o(T(r,f^1)) \\
&\leq \Big(1 - \frac{N}{M+1} \Big) \frac{2N}{m+1} T(r,f^1) + o(T(r,f^1)).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\Big(q - N - 3 - \frac{N(q-2)}{m+1} \Big) \leq \Big(1 - \frac{N}{M+1} \Big) \frac{2N}{m+1} \\
&\Rightarrow q - N - 3 - \frac{N(q-2)}{m+1} \leq \frac{2N}{m+1} - \frac{2N^2}{(m+1)(M+1)} \\
&\Rightarrow q - N - 3 \leq \frac{Nq}{m+1} - \frac{2N^2}{(m+1)(M+1)} \ (1.3.7)
\end{aligned}$$

Hơn nữa vì $N \geq 2,\ 3N+1 \geq q$ và $m > 3N+1+\dfrac{16}{3(N-1)}$, chúng ta có

$$\frac{(3N-3)}{2} \geq \frac{Nq}{m+1} \text{ và } \frac{Nk}{m+1} + \frac{N(q-k)}{m+d+1} \geq \frac{Nq}{m+d+1} \geq \frac{Nq}{M+1} \geq \frac{3N^2+N}{2(M+1)}.$$

Vậy ta suy ra

$$\frac{5N+3}{2} + \frac{Nk}{m+1} + \frac{N(q-k)}{m+d+1} - \frac{3N^2+N}{2(M+1)} > N+3 + \frac{Nq}{m+1} - \frac{2N^2}{(m+1)(M+1)}.$$

Kết hợp với giả thiết và (1.3.7), chúng ta có điều mâu thuẫn. Vậy ta có $\chi_{ij} = 1$.

Chúng ta định nghĩa các tập con I_1, I_2 và I_3 như sau

$I_1 = \{i : \ 1 \leq i \leq 3N-2 \text{ và } \ F^{i1}_{3N-1} = F^{i2}_{3N-1}\}$,

$I_2 = \{i : \ 1 \leq i \leq 3N-2 \text{ và } \ F^{i2}_{3N-1} = F^{i3}_{3N-1}\}$,

$I_3 = \{i : \ 1 \leq i \leq 3N-2 \text{ và } \ F^{i3}_{3N-1} = F^{i1}_{3N-1}\}$.

Khi đó một trong các tập chứa ít nhất N chỉ số. Chúng ta giả sử là $\sharp I_1 \geq N$. Thế thì ta có $f^1 \equiv f^2$. Điều này chứng minh bổ đề.

Sử dụng Bổ đề 1.3.4, Bổ đề 1.3.5 và điều kiện $q \geq 3N-1$, trường hợp 1 được chứng minh.

Trường hợp 2. Giả sử $N = 1$ và $q = 4$.

Với mỗi chỉ số $j_0 \in \mathcal{Q}$, sử dụng (1.3.1) chúng ta suy ra

$$\Big\| \sum_{i=1}^{3}\left(2\sum_{j=1}^{q} N^{(1)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r)\right) \leq 3T(r) + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{3}{k_{ij_0}+1}\right)(N_{(f^i,H_{j_0})}(r) - N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{3} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + o(T(r))$$

và $N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) \leq N_{(f^i,H_{j_0})}(r) \leq T(r,f^i) + o(T(r))$ $(1 \leq i \leq 3)$.

Suy ra

$$\Big\| 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} N^{(1)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) \leq 3(1+\frac{1}{m_{j_0}+1})T(r) + \sum_{i=1}^{3}(1-\frac{3}{m_{j_0}+1})N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + o(T(r))$$

$$\leq 3(1+\frac{1}{m_{j_0}+1})T(r) + \sum_{i=1}^{3}(1-\frac{3}{m_{j_0}+1})N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + o(T(r)), \quad (1.3.8)$$

ở đó $m_j = min\{k_{ij} \mid 1 \leq i \leq 3\}(1 \leq j \leq 4)$.

Mặt khác, áp dụng Bổ đề 1.1.13 chúng ta có

$$\Big\| \left(2 - \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{k_{ij}+1}\right)T(r,f^i) \leq \sum_{j=1}^{4}\left(1-\frac{1}{k_{ij}+1}\right)N^{(1)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) + o(T(r,f^i)).$$

Điều này suy ra

$$\left(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1}\right)T(r,f^i) \leq \sum_{j=1}^{4}\left(1-\frac{1}{M+1}\right)N^{(1)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) + o(T(r,f^i)).$$

Suy ra

$$\left(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1}\right)T(r) \leq \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\left(1-\frac{1}{M+1}\right)N^{(1)}_{(f^i,H_j),\leq k_{ij}}(r) + o(T(r)) \quad (1.3.9)$$

Kết hợp (1.3.8) và (1.3.9), chúng ta có

$$\Big\| 2\left(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1}\right)(\frac{M+1}{M})T(r) \leq 3(1+\frac{1}{m_{j_0}+1})T(r) +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}(1-\frac{3}{m_{j_0}+1})N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\leq k_{ij_0}}(r) + o(T(r)).$$

Từ đó ta có

$$\sum_{i=1}^{3} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\le k_{ij_0}}(r) \ge \left(\frac{m_{j_0}+1}{m_{j_0}-2}\right)\left(2(2-\frac{k}{m+1}-\frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M})-3(1+\frac{1}{m_{j_0}+1})\right)T(r)$$

$$+o(T(r)).$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{3} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_0}),\le k_{ij_0}}(r) \ge \left(\frac{m_{j_0}+1}{m_{j_0}-2}\right)\left(2(2-\frac{k}{m+1}-\frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M})-3(1+\frac{1}{m_{j_0}+1})\right)T(r)+$$

$$+o(T(r)) \quad (1.3.10)$$

Bây giờ ta giả sử phản chứng rằng $\sharp\mathcal{Q} \ge 3$, tức là $\mathcal{Q} \supset \{j_0, j_1, j_2\}$.

Áp dụng (1.3.10), ta có

$$\Bigg\| \sum_{i=1}^{3}\sum_{s=0}^{2} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_s}),\le k_{ij_s}}(r)$$

$$\ge \sum_{s=0}^{2}\left(\frac{m_{j_s}+1}{m_{j_s}-2}\right)\left(2(2-\frac{k}{m+1}-\frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M})-3(1+\frac{1}{m_{j_s}+1})\right)T(r)+o(T(r)) \quad (1.3.11)$$

Do tồn tại $c \in \mathcal{C}$ sao cho $F_c^{j_01} - F_c^{j_02} \not\equiv 0$ nên suy ra

$$\sum_{s=0}^{2} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_s}),\le k_{ij_s}}(r) \le N_{F_c^{j_01}-F_c^{j_02}}(r) \le T(r,f^1)+T(r,f^2)+O(1).$$

Lập luận tương tự ta cũng có

$$\sum_{s=0}^{2} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_s}),\le k_{ij_s}}(r) \le T(r,f^2)+T(r,f^3)+O(1)$$

và

$$\sum_{s=0}^{2} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_s}),\le k_{ij_s}}(r) \le T(r,f^3)+T(r,f^1)+O(1).$$

Kết hợp các kết quả vừa có ta suy ra

$$\sum_{s=0}^{2} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_s}),\le k_{ij_s}}(r) \le \frac{2}{3}\cdot T(r)+O(1) \ (1 \le i \le 3)$$

và

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=0}^{2} N^{(1)}_{(f^i,H_{j_s}),\le k_{ij_s}}(r) \le 2.T(r)+O(1) \ (1.3.12)$$

Từ (1.3.11) và (1.3.12), ta thu được

$$2.T(r) \geq \sum_{s=0}^{2} \left(\frac{m_{j_s}+1}{m_{j_s}-2} \right) \left(2(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M}) - 3(1 + \frac{1}{m_{j_s}+1}) \right) T(r) + o(T(r)).$$

Cho r tiến ra $+\infty$, ta suy ra

$$2 \geq \sum_{s=0}^{2} \left(\frac{m_{j_s}+1}{m_{j_s}-2} \right) \left(2(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M}) - 3(1 + \frac{1}{m_{j_s}+1}) \right).$$

Mặt khác ta dễ có hàm số sau là hàm tăng theo biến $t > 2$

$$f(t) = \left(\frac{t+1}{t-2} \right) \left(2(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M}) - 3(1 + \frac{1}{t+1}) \right)$$

Do đó ta có

$$2 \geq 3. \left(\frac{m+1}{m-2} \right) \left(2(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M}) - 3(1 + \frac{1}{m+1}) \right).$$

Điều này suy ra

$$\frac{2(m-2)}{3(m+1)} \geq \left(2(2 - \frac{k}{m+1} - \frac{4-k}{m+d+1})(\frac{M+1}{M}) - 3(1 + \frac{1}{m+1}) \right).$$

Vậy ta có

$$\frac{3(2k+1)}{m+1} + \frac{6(4-k)}{m+d+1} + \frac{6k}{M(m+1)} + \frac{24-6k}{M(m+d+1)} \geq 1 + \frac{12}{M}.$$

Điều này là vô lí (lưu ý rằng đẳng thức không thể xảy ra nếu $\max_{1 \leq j \leq 4}\{m_j\} > m$.) Vậy $\sharp \mathcal{Q} \leq 2$.

Bây giờ chúng ta sử dụng lại cách lập luận như trong [62] để kết thúc trường hợp 2.

Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử $1, 2 \notin \mathcal{Q}$. Do tính chất trù mật của $\mathcal{C}$ trong $\mathbb{C}^2$ nên ta suy ra $\Phi^{\alpha}(F_j^{i0}, F_j^{i1}, F_j^{i2}) = 0$ với mỗi $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$ và mỗi $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ với $|\alpha| \leq 1$, ở đó $F_j^{ik} = \dfrac{(f^k, H_i)}{(f^k, H_j)}$.

Áp dụng Bổ đề 1.1.10 cho $i = 1, j = 2$, chúng ta có hai trường hợp sau.

(i) Tồn tại $0 \leq l_1 < l_2 \leq 2$ sao cho $F_2^{1l_1} = F_2^{1l_2}$. Thế thì ta có $f^{l_1} \equiv f^{l_2}$.

(ii) Có các hằng số phân biệt $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sao cho $F_2^{10} = \alpha F_2^{11} = \beta F_2^{12}$.

Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả sử như sau

$H_1 = \{\omega_0 = 0\},\ H_2 = \ \{\omega_1 = 0\},\ \ H_3 = \{\omega_0 - c\omega_1 = 0\}$ $(c \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$. Thế thì

$$\frac{f_0^0}{f_1^0} = \alpha \frac{f_0^1}{f_1^1} = \beta \frac{f_0^2}{f_1^2},$$

$$(f^1, H_3) = 0 \Leftrightarrow f_0^1 - cf_1^1 = 0 \Leftrightarrow (f_0^0 - c\alpha f_1^0)\left(\frac{f_1^1}{\alpha f_1^0}\right) = 0$$

$$(f^2, H_3) = 0 \Leftrightarrow f_0^2 - cf_1^2 = 0 \Leftrightarrow (f_0^0 - c\beta f_1^0)\left(\frac{f_1^2}{\beta f_1^0}\right) = 0.$$

Suy ra $\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(z) > 0\} \subset \bigcup_{i=0}^{2} I(f^i)$. Do đó $N^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(r) = 0$,

và

$\nu_{(f^1,H_3)}(z) = \nu_{f_0^0 - c\alpha f_1^0}(z)$ và $\nu_{(f^2,H_3)}(z) = \nu_{f_0^0 - c\beta f_1^0}(z)$ với $z \notin I(f^0) \cup I(f^1) \cup I(f^2)$

Do đó ta có $\nu_{(f^1,H_3)}(z) = \nu_{f_0^0 - c\alpha f_1^0}(z)$ $(z \in \mathbb{C}^n)$ và $\nu_{(f^2,H_3)}(z) = \nu_{f_0^0 - c\beta f_1^0}(z)$ $(z \in \mathbb{C}^n)$.

Đặt $H_3' = \{\omega_0 - c\alpha\omega_1 = 0\}, H_3'' = \{\omega_0 - c\beta\omega_1 = 0\}$. Thế thì ta có:

- H_3, H_3', H_3'' ở vị trí tổng quát.
- $\nu_{(f^0,H_3')}(z) = \nu_{(f^1,H_3)}(z)$, suy ra $\nu^{(1)}_{(f^0,H_3'),\leq k_{13}}(z) = \nu^{(1)}_{(f^1,H_3),\leq k_{13}}(z) = \nu^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(z)$
- $\nu_{(f^0,H_3'')}(z) = \nu_{(f^2,H_3)}(z)$, suy ra $\nu^{(1)}_{(f^0,H_3''),\leq k_{23}}(z) = \nu^{(1)}_{(f^2,H_3),\leq k_{23}}(z) = \nu^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(z)$

Giờ sử dụng Bổ đề 1.1.13, ta có

$$\Big\|\left(3-1-1-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{k_{j3}+1}\right)T(r,f^0) \leq (1-\frac{1}{1+k_{03}})N^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(r) + (1-\frac{1}{1+k_{13}})N^{(1)}_{(f^0,H_3'),\leq k_{13}}(r) +$$

$$+(1-\frac{1}{1+k_{23}})N^{(1)}_{(f^0,H_3''),\leq k_{23}}(r) + o(T(r,f^0))$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{3}{m+1}\right)T(r,f^0) \leq \left(1-\frac{1}{M+1}\right)\left(N^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(r) + N^{(1)}_{(f^0,H_3'),\leq k_{13}}(r) + N^{(1)}_{(f^0,H_3''),\leq k_{23}}(r)\right)$$
$$+o(T(r,f^0))$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{3}{m+1}\right)T(r,f^0) \leq \left(1-\frac{1}{M+1}\right)\left(N^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(r) + N^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(r) + N^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(r)\right)$$
$$+o(T(r,f^0)) = 3(1-\frac{1}{M+1})N^{(1)}_{(f^0,H_3),\leq k_{03}}(r) + o(T(r,f^0))$$

Do đó ta có

$$\left(1-\frac{3}{m+1}\right)T(r,f^1) \leq o(T(r,f^0))$$

Điều này là vô lí. Vậy trường hợp 2 của Định lý 1.3.1 được chứng minh. $\square$

1.4 Định lý duy nhất của các ánh xạ phân hình với mục tiêu cố định và điều kiện đạo hàm

Cho một ánh xạ phân hình f từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$, d là một số nguyên dương, k là số nguyên dương hoặc $k = \infty$. Giả sử $H_1, ..., H_q$ là q siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thỏa mãn

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,H_i)}(z) > 0 \text{ và } \nu_{(f,H_j)}(z) > 0\} \leq n - 2 \ (1 \leq i < j \leq q).$$

Ta xét tập $\mathcal{G}(f, \{H_j\}_{j=1}^q, k, d)$ gồm tất cả các ánh xạ phân hình $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ thỏa mãn các điều kiện sau

(a) g không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$,

(b) $\min\{\nu_{(f,H_j),\leq k}, d\} = \min\{\nu_{(g,H_j),\leq k}, d\}$ $(1 \leq j \leq q)$,

(c) Cho $f = (f_0 : \cdots : f_N)$ và $g = (g_0 : \cdots : g_N)$ tương ứng là biểu diễn rút gọn của f và g. Thế thì, với mỗi $0 \leqslant j \leqslant N$ và với mỗi $\omega \in \bigcup_{i=1}^q \{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,H_i),\leqslant k}(z) > 0\}$, hai điều kiện sau thỏa mãn:

(i) Nếu $f_j(\omega) = 0$ thì $g_j(\omega) = 0$,

(ii) Nếu $f_j(\omega) g_j(\omega) \neq 0$ thì $\mathcal{D}^\alpha\left(\dfrac{f_i}{f_j}\right)(\omega) = \mathcal{D}^\alpha\left(\dfrac{g_i}{g_j}\right)(\omega)$ với mỗi n-bộ $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của các số nguyên không âm với $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leqslant d$ và với mỗi $i \neq j$, ở đó $\mathcal{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} z_1 ... \partial^{\alpha_n} z_n}$.

Chúng ta có thể lưu ý rằng điều kiện (c) không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn rút gọn.

Phần cuối của chương này chúng tôi chứng minh kết quả sau.

Định lý 1.4.1. *(Hà-Quang [33]) Nếu* $N \geq 4$, $2 \leqslant d \leqslant N - 1$ *và* $k > \dfrac{3dN^2 - 2N^2 + 2Nd - 2Nd^2}{2(d-1)N + d - 2d^2} - 1$, *thì* $\sharp\, \mathcal{G}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+2-2d}, k, d) = 1$.

Chứng minh. Giả sử rằng tồn tại một ánh xạ $g \in \mathcal{G}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+2-2d}, k, d)$ với biểu diễn rút gọn $g = (g_0 : \cdots : g_N)$ sao cho $g \not\equiv f$. Thế thì tồn tại chỉ số i và j $(0 \leqslant i < j \leqslant N)$ sao cho $P_{ij} = \dfrac{(f, H_i)}{(f, H_j)} - \dfrac{(g, H_i)}{(g, H_j)} \not\equiv 0$. Ta định nghĩa

$$I = I(f) \cup I(g) \cup_{1 \leqslant\ t < s \leqslant 3N+2-2d} \{z \in \mathbb{C}^n\ |\nu_{(f,H_t),\leqslant k}(z) \nu_{(f,H_s),\leqslant k}(z) > 0\}.$$

Khi đó I là một tập giải tích với đối chiều 2 hoặc là một tập rỗng.

Bổ đề 1.4.2. *Khẳng định sau là đúng*

$$\sum_{v=1}^{3N+2-2d} N^{(d)}_{(f,H_v),\leqslant k}(r) \leqslant T(r,f) + T(r,g) + o(T(r,f)+T(r,g))$$

Chứng minh. Chúng ta cố định một điểm $z \notin I$ thỏa mãn $\nu_{(f,H_t),\leqslant k}(z) > 0$ $(t \neq j)$. Giả sử rằng $f_l(z) \cdot g_l(z) = 0$ $(0 \leqslant l \leqslant N)$. Thế thì ta có $g_l(z) = 0$ $(0 \leqslant l \leqslant N)$, hay $z \in I(g)$. Điều này là vô lí. Do đó tồn tại chỉ số l sao cho $f_l(z) \cdot g_l(z) \neq 0$. Điều này đưa tới

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha P_{ij}(z) &= \mathcal{D}^\alpha\left(\frac{(f,H_i)}{(f,H_j)} - \frac{(g,H_i)}{(g,H_j)}\right)(z)\\ &= \mathcal{D}^\alpha\left(\frac{\sum_{v=0}^N \frac{f_v}{f_l} a_{iv}}{\sum_{v=0}^N \frac{f_v}{f_l} a_{jv}} - \frac{\sum_{v=0}^N \frac{g_v}{g_l} a_{iv}}{\sum_{v=0}^N \frac{g_v}{g_l} a_{jv}}\right)(z) = 0,\ \forall |\alpha| \leqslant d.\end{aligned}$$

Vậy $\nu_{P_{ij}}(z) \geq d$. Từ đó ta có $\nu_{P_{ij}} \geq \sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{3N+2-2d} d\min\{1, \nu_{(f,H_t),\leqslant k}\}$ ngoài một tập giải tích có đối chiều 2. Điều này suy ra

$$N_{P_{ij}}(r) \geq \sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{3N+2-2d} N^{(d)}_{(f,H_t),\leqslant k}(r).$$

Lập luận lại cách chứng minh của Định lý 1.2.1, ta có

$$m(r,P_{ij}) \leqslant T(r,f) + T(r,g) - N_{\frac{(f,H_j)}{(f,H_i)}}(r) - N_{\frac{(g,H_j)}{(g,H_i)}}(r) + O(1)$$

và

$$N_{\frac{1}{P_{ij}}}(r) \leqslant N(r,\nu_j),\ \text{ở đó } \nu_j = \max\{\nu_{\frac{(f,H_j)}{(f,H_i)}}, \nu_{\frac{(g,H_j)}{(g,H_i)}}\}.$$

Do đó ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{v=1\\v\neq j}}^{3N+2-2d} N^{(d)}_{(f,H_v),\leqslant k}(r) &\leqslant N_{P_{ij}}(r)\\ &\leqslant T(r,P_{ij})\\ &= N_{\frac{1}{P_{ij}}}(r) + m(r,P_{ij}) + O(1)\\ &\leqslant T(r,f) + T(r,g) + N(r,\nu_j) - N_{\frac{(f,H_j)}{(f,H_i)}}(r)\\ &\quad - N_{\frac{(g,H_j)}{(g,H_i)}}(r) + o(T(r,f)+T(r,g)).\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\Big(N_{\frac{(f,H_j)}{(f,H_i)}}(r) + N_{\frac{(g,H_j)}{(g,H_i)}}(r) - N(r,\nu_j)\Big) + \sum_{\substack{v=1\\ v\neq j}}^{3N+2-2d} N^{(d)}_{(f,H_v),\leqslant k}(r)$$
$$\leqslant T(r,f) + T(r,g) + o(T(r,f)+T(r,g)).$$

Mặt khác ta cũng có

$$\nu_j(z) - \nu_{\frac{(f,H_j)}{(f,H_i)}}(z) - \nu_{\frac{(g,H_j)}{(g,H_i)}}(z) + \nu^{(d)}_{(f,H_j),\leqslant k}(z) =$$
$$\nu^{(d)}_{(f,H_j),\leqslant k}(z) - \min\{\nu_{\frac{(f,H_j)}{(f,H_i)}}(z), \nu_{\frac{(g,H_j)}{(g,H_i)}}(z)\} \leqslant 0$$

ngoài tập giải tích đối chiều 2. Do đó ta thu được

$$N(r,\nu_i) - N_{\frac{(f,H_j)}{(f,H_i)}}(r) - N_{\frac{(g,H_j)}{(g,H_i)}}(r) + N^{(d)}_{(f,H_j),\leqslant k}(r) \leqslant 0.$$

Vậy

$$\sum_{v=1}^{3N+2-2d} N^{(d)}_{(f,H_v),\leqslant k}(r) \leqslant T(r,f) + T(r,g) + o(T(r,f)+T(r,g)).$$

Điều này suy ra Bổ đề 1.4.2.

Từ Bổ đề 1.4.2 ta có

$$\sum_{v=1}^{3N+2-2d} N^{(N)}_{(f,H_v),\leqslant k}(r) \leqslant \frac{N}{d}(T(r,f)+T(r,g)) + o(T(r,f)+T(r,g)).$$

Bây giờ sử dụng Bổ đề 1.1.2 ta cũng có

$$|| \sum_{i=1}^{3N+2-2d} N^{(N)}_{(f,H_i),\leqslant k}(r)) \geq \frac{(2N+1-2d)(k+1) - N(3N+2-2d)}{k+1-N} T(r,f)$$
$$+ o(T(r,f))$$

và

$$|| \sum_{i=1}^{3N+2-2d} N^{(N)}_{(g,H_i),\leqslant k}(r)) \geq \frac{(2N+1-2d)(k+1) - N(3N+2-2d)}{k+1-N} T(r,g)$$
$$+ o(T(r,g)).$$

Điều này suy ra

$$|| \frac{2N}{d}((T(r,f)+T(r,g)) \geq \left(\frac{(2N+1-2d)(k+1) - N(3N+2-2d)}{k+1-N}\right) \times$$
$$(T(r,f)+T(r,g)) + o((T(r,f)+T(r,g))).$$

Cho r tiến ra ∞, ta có

$$\frac{2N}{d} \geq \frac{(2N+1-2d)(k+1) - N(3N+2-2d)}{k+1-N},$$

và suy ra

$$k+1 \leqslant \frac{3dN^2 - 2N^2 + 2Nd - 2Nd^2}{2(d-1)N + d - 2d^2}.$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy, ta có $\sharp\ \mathcal{G}(f, \{H_i\}_{i=1}^{3N+2-2d}, k, d) = 1$ hay Định lý 1.4.1 được chứng minh. $\square$

Chương 2

Định lý duy nhất với bội bị chặn của các ánh xạ phân hình cho mục tiêu di động

Lý thuyết Nevanlinna đã được W. Stoll và sau đó là Stoll-Ru phát triển cho các mục tiêu di động chậm. Vì thế, vấn đề duy nhất với bội bị chặn của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ cho mục tiêu di động được quan tâm và nghiên cứu mạnh mẽ trong vài thập kỷ gần đây. Với các khái niệm và kí hiệu được trình bày trong §2.1, chúng tôi nêu ra những kết quả tốt nhất cho đến hiện nay. Trước hết là kết quả của Dethloff-Tấn [14].

Định lý (Dethloff-Tấn [14]) *Giả sử $f, g : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ $(N \geq 2)$ là hai ánh xạ phân hình khác hằng và $\{a_j\}_{j=1}^{3N+1}$ là các mục tiêu di động "nhỏ" (đối với f) ở vị trí tổng quát thỏa mãn $(f, a_i) \not\equiv 0,\ (g, a_i) \not\equiv 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 3N+1)$. Giả sử f không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^{3N+1})$. Đặt $d = 3N(N+1)\left[\binom{2N+2}{N+1}\right]^2\left[\binom{2N+2}{N+1} - 1\right] + N(3N+4)$. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn.*

(i) $\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_i),\leqslant d}(z) > 0$ *và* $\nu_{(f,a_j),\leqslant d}(z) > 0\} \leqslant n-2$
$(1 \leqslant i \leqslant N+3,\ 1 \leqslant j \leqslant 3N+1)$.

(ii) $\min\{\nu_{(f,a_i)}, d\} = \min\{\nu_{(g,a_i)}, d\}$ $((1 \leqslant i \leqslant 3N+1)$.

(iii) $f(z) = g(z)$ *trên* $\bigcup_{j\in D}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_j),\leqslant M}(z) > 0\}$, *ở đó D là một tập con bất kì*

của tập $\{1, \cdots, 3N+1\}$ *với* $\sharp D = N+4$.

Khi đó ta có $f \equiv g$.

Chúng tôi lưu ý ở đây là với kỹ thuật sử dụng trong chứng minh của định lý trên thì giả thiết $\sharp D = N+4$ không thể làm tốt hơn được

Mục tiêu đầu tiên của chương này là chúng tôi đưa ra cách tiếp cận mới nhằm giảm số phần tử của D trong định lý trên từ $N+4$ xuống $N+2$. Cụ thể là chúng tôi chứng minh định lý sau.

Định lý 2.0.1. *(Hà-Quang-Thái [34]) Cho* k, d *là các số nguyên dương hoặc* ∞ *thỏa mãn*

$$\left(\frac{3}{d+1}+\frac{6}{k+1}\right)\binom{2N+2}{N+1}\left[\binom{2N+2}{N+1}-2\right]< \left(\frac{N+2}{N(N+2)(N(N+2)+1)}-\frac{2N+2}{k+1}\right).$$

Xét hai ánh xạ phân hình khác hằng $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ $(N \geq 2)$ *và* $\{a_j\}_{j=1}^{3N+1}$ *là* $3N+1$ *ánh xạ phân hình "nhỏ" (đối với* f*) từ* $\mathbb{C}^n$ *vào* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *ở vị trí tổng quát sao cho* $\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_i),\leqslant k}(z)\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z) > 0\} \leqslant n-2$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 3N+1)$.
Giả sử rằng f, g *không suy biến tuyến tính trên* $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^{3N+1})$ *và các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) $\min\ (\nu_{(f,H_j),\leqslant k}, d) = \min\ (\nu_{(g,H_j),\leqslant k}, d)$ $(1 \leqslant j \leqslant 3N+1)$.

(ii) $f(z) = g(z)$ *trên* $\bigcup_{j\in D}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_j),\leqslant N(N+2)}(z) > 0\}$, *ở đó* D *là một tập con bất kì của tập* $\{1, \cdots, 3N+1\}$ *với* $\sharp D = N+2$.

Khi đó ta có $f \equiv g$. Phần tiếp theo của chương dành cho việc nghiên cứu định lý duy nhất với bội bị chặn của ánh xạ phân hình cho mục tiêu di động có điều kiện đạo hàm. Cụ thể chúng tôi sẽ chứng minh định lý sau.

Định lý 2.0.2. *(Hà-Quang-Thái [34]) Cho* $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *là hai ánh xạ phân hình và* k *là số nguyên dương thỏa mãn* $k > 2N^3 + 12N^2 + 6N - 1$. *Cho* $\{a_t\}_{t=1}^{N+2}$ *là các ánh xạ phân hình "nhỏ" (so với* f*) từ* $\mathbb{C}^n$ *vào* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *ở vị trí tổng quát sao cho*

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z) > 0\} \leqslant n-2\ (1 \leqslant s < t \leqslant N+2).$$

Giả sử f, g *không suy biến tuyến tính trên* $\mathcal{R}(\{a_t\}_{t=1}^{N+2})$ *và thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) $\min\ (\nu_{(f,a_t),\leqslant k}, 1) = \min\ (\nu_{(g,a_t),\leqslant k}, 1)$ $(1 \leqslant t \leqslant N+2)$.

(ii) Gọi $f = (f_0 : \cdots : f_N)$ *và* $g = (g_0 : \cdots : g_N)$ *là các biểu diễn rút gọn của* f *và* g *tương ứng. Giả sử với mỗi chỉ số* $0 \leqslant j \leqslant N$ *và với mỗi* $\omega \in \bigcup_{t=1}^{N+2}\{z \in \mathbb{C}^n :$

$\nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z) > 0\}$, *các điều kiện sau thỏa mãn:*

(a) Nếu $f_j(\omega) = 0$ *thì* $g_j(\omega) = 0$,

(b) Nếu $f_j(\omega)g_j(\omega) \neq 0$ *thì* $\mathcal{D}^\alpha\left(\dfrac{f_i}{f_j}\right)(\omega) = \mathcal{D}^\alpha\left(\dfrac{g_i}{g_j}\right)(\omega)$ *cho mỗi n-bộ* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *của các số nguyên không âm với* $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leqslant 2N$ *và* $i \neq j$, *ở đó* $\mathcal{D}^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} z_1 ... \partial^{\alpha_n} z_n}$.

Khi đó ta có $f \equiv g$.

2.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Giả sử $f, a : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là hai ánh xạ phân hình có các biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : \cdots : f_N), a = (a_0 : \cdots : a_N)$. Đặt $(f,a) = \sum_{i=0}^{N} a_i f_i$, nghĩa là $(f,a)(z) = \sum_{i=0}^{N} a_i(z) f_i(z)$. Ánh xạ a cũng được gọi là "nhỏ" so với f nếu $T_a(r) = o(T_f(r))$ khi $r \to \infty$. Ngoài ra, hàm xấp xỉ $m_{f,a}(r)$ được định nghĩa như sau

$$m_{f,a}(r) = \int_{S(r)} \log \frac{||f|| \cdot ||a||}{|(f,a)|}\sigma_n - \int_{S(1)} \log \frac{||f|| \cdot ||a||}{|(f,a)|}\sigma_n,$$

ở đó $\|a\| = \left(|a_0|^2 + \cdots + |a_N|^2\right)^{1/2}$.

Cho $a_1, \ldots, a_q$ ($q \geq N+1$) là q ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ với các biểu diễn rút gọn $a_j = (a_{j0} : \cdots : a_{jN})$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$. Chúng ta nói rằng các mục tiêu di động $a_1, \ldots, a_q$ ở vị trí tổng quát nếu $\det(a_{j_k l}) \not\equiv 0$ với mọi $1 \leqslant j_0 < j_1 < ... < j_N \leqslant q$.

Kí hiệu $\mathcal{M}_n$ là trường các hàm phân hình trên $\mathbb{C}^n$ và $\mathcal{R}\Big(\{a_j\}_{j=1}^q\Big) \subset \mathcal{M}_n$ là trường con nhỏ nhất chứa $\mathbb{C}$ và tất cả các hàm $\dfrac{a_{jk}}{a_{jl}}$ với $a_{jl} \not\equiv 0$. Kí hiệu $\widetilde{\mathcal{R}}\Big(\{a_j\}_{j=1}^q\Big) \subset \mathcal{M}_n$ là trường con nhỏ nhất chứa tất cả các hàm $h \in \mathcal{M}_n$ thỏa mãn $h^k \in \mathcal{R}\Big(\{a_j\}_{j=1}^q\Big)$ với một số nguyên dương k nào đó.

Ánh xạ phân hình f từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ với biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : \cdots : f_N)$ được gọi là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}\Big(\{a_j\}_{j=1}^q\Big)$ (tương ứng là trên $\widetilde{\mathcal{R}}\Big(\{a_j\}_{j=1}^q\Big)$) nếu $f_0, \ldots, f_N$ là độc lập tuyến tính trên $\mathcal{R}\Big(\{a_j\}_{j=1}^q\Big)$ (tương ứng trên $\widetilde{\mathcal{R}}\Big(\{a_j\}_{j=1}^q\Big)$).

Cho f và a là hai ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Với mỗi $z \in \mathbb{C}^n$, ta đặt

$$\nu_{(f,a),\le k}(z) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \nu_{(f,a)}(z) > k, \\ \nu_{(f,a)}(z) & \text{nếu } \nu_{(f,a)}(z) \le k, \end{cases}$$

$$\nu_{(f,a),>k}(z) = \begin{cases} \nu_{(f,a)}(z) & \text{nếu } \nu_{(f,a)}(z) > k, \\ 0 & \text{nếu } \nu_{(f,a)}(z) \le k. \end{cases}$$

Định lý cơ bản thứ nhất. (Ru-Stoll [54]) *Giả sử $f, a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là các ánh xạ phân hình sao cho $(f, a) \not\equiv 0$. Khi đó ta có*

$$T(r, f) + T(r, a) = m_{f,a}(r) + N_{(f,a)}(r).$$

Định lý cơ bản thứ hai cho mục tiêu di động. (Thái-Quang [61]) *Cho $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là một ánh xạ phân hình. Gọi $\{a_j\}_{j=1}^q$ $(q \ge N+2)$ là các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho f là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_i\}_{i=1}^q)$. Thế thì ta có*
$|| \ \dfrac{q}{N+2}T(r,f) \le \sum_{j=1}^q N^{(N)}_{(f,a_j)}(r) + o(T(r,f)) + O(\max_{1\le j\le q} T(r,a_j)).$

2.2 Định lý duy nhất với bội bị chặn của ánh xạ phân hình cho mục tiêu di động

Trong mục này chúng tôi chứng minh định lý sau

Định lý 2.2.1. *(Hà-Quang-Thái [34]) Cho k, d là các số nguyên dương hoặc ∞ thỏa mãn*

$$\Big(\frac{3}{d+1} + \frac{6}{k+1}\Big)\binom{2N+2}{N+1}\Big[\binom{2N+2}{N+1} - 2\Big] < \Big(\frac{N+2}{N(N+2)(N(N+2)+1)} - \frac{2N+2}{k+1}\Big).$$

Xét hai ánh xạ phân hình khác hằng $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ $(N \ge 2)$ và $\{a_j\}_{j=1}^{3N+1}$ là $3N+1$ ánh xạ phân hình "nhỏ" (đối với f) từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho $\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_i),\leqslant k}(z)\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z) > 0\} \leqslant n-2$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 3N+1)$.
Giả sử rằng f, g không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^{3N+1})$ và các điều kiện sau thỏa mãn
(i) $\min\,(\nu_{(f,H_j),\leqslant k}, d) = \min\,(\nu_{(g,H_j),\leqslant k}, d)$ $(1 \leqslant j \leqslant 3N+1)$.

(ii) $f(z) = g(z)$ *trên* $\bigcup_{j\in D}\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_j),\leqslant N(N+2)}(z) > 0\}$, *ở đó* D *là một tập con bất kì của tập* $\{1, \cdots, 3N+1\}$ *với* $\sharp D = N+2$.
Thế thì ta có $f \equiv g$.

Chứng minh. Gọi biểu diễn rút gọn của f, g, a_i như sau

$$f = (f_0 : ... : f_N),\ g = (g_0 : ... : g_N),\ a_i = (a_{i0} : ... : a_{iN}).$$

(i) Ta xét $2N+2$ ánh xạ phân hình bất kì của họ $\{a_1, ..., a_{3N+1}\}$, để tiện kí hiệu, ta gọi là $a_1, ..., a_{2N+2}$.

Đặt $h_i = \dfrac{(f, a_i)}{(g, a_i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2N+2)$. Thế thì $\dfrac{h_i}{h_j} = \dfrac{(f,a_i)\cdot(g,a_j)}{(g,a_i)\cdot(f,a_j)}$ không phụ thuộc vào biểu diễn rút gọn của f và g. Lại từ $\sum_{k=0}^N a_{ik}f_k - h_i \cdot \sum_{k=0}^N a_{ik}g_k = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 2N+2)$, ta suy ra det $(a_{i0}, ..., a_{iN}, a_{i0}h_i, ..., a_{iN}h_i; 1 \leqslant i \leqslant 2N+2) = 0$.

Bây giờ với mỗi tập con $I \subset \{1, 2, ..., 2N+2\}$, ta đặt $h_I = \prod_{i\in I} h_i$. Kí hiệu $\mathcal{I}$ là tập tất cả các bộ $N+1$ thành phần $I = (i_1, ..., i_{N+1})$ thỏa mãn $1 \leqslant i_1 < ... < i_{N+1} \leqslant 2N+2$.

Với mỗi $I = (i_1, ..., i_{N+1}) \in \mathcal{I}$, ta định nghĩa

$$A_I = (-1)^{\frac{(N+1)(N+2)}{2}+i_1+...+i_{N+1}} \cdot \det(a_{i_r l}; 1 \leqslant r \leqslant N+1, 0 \leqslant l \leqslant N)\cdot$$
$$\det(a_{j_s l}; 1 \leqslant s \leqslant N+1, 0 \leqslant l \leqslant N),$$

ở đó $J = (j_1, ..., j_{N+1}) \in \mathcal{I}$ sao cho $I \cup J = \{1, 2, ..., 2N+2\}$.

Thế thì ta có $\sum_{I\in\mathcal{I}} A_I h_I = 0$.

(ii) Lấy $I_0 \in \mathcal{I}$. Do $A_{I_0}h_{I_0} = -\sum_{I\in\mathcal{I}, I\neq I_0} A_I h_I$ nên $h_{I_0} = -\sum_{I\in\mathcal{I}, I\neq I_0} \frac{A_I}{A_{I_0}} h_I$.

Hơn nữa ta cũng có thể chỉ ra ngay rằng

$$A_I \not\equiv 0\ (I \in \mathcal{I}) \text{ và } \frac{A_I}{A_{I_0}} \in \mathcal{R}(\{a_i\}_{i=1}^{3N+1})\ (I \in \mathcal{I}).$$

Kí hiệu t là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho các điều kiện sau thỏa mãn:

Tồn tại t phần tử $I_1, ..., I_t \in \mathcal{I}\backslash\{I_0\}$ và t hàm phân hình khác hằng $b_i \in \mathcal{R}(\{a_i\}_{i=1}^{3N+1})$ sao cho

$$h_{I_0} = \sum_{i=1}^t b_i h_{I_i} \quad (2.2.1).$$

Do $h_{I_0} \not\equiv 0$ và t là nhỏ nhất nên họ hàm $\{b_1h_{I_1}, ..., b_th_{I_t}\}$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$.

Giả sử phản chứng rằng $t \geq 2$.

Không mất tính tổng quát ta đặt $b_0 = -1$, thế thì ta có $\sum_{i=0}^{t} b_i h_{I_i} = 0$.

Lại đặt $I = \bigcap_{i=0}^{t} I_i$, $I'_i = I_i \setminus I \neq \emptyset$ $(0 \leqslant i \leqslant t)$ và $\tilde{I} = \bigcup_{i=0}^{t} I'_i$, $I' = \bigcap_{i=1}^{t} I'_i$, $I''_i = I'_i \setminus I' \neq \emptyset$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$. Thế thì ta cũng có $\dfrac{h_{I'_0}}{h_{I'}} = \sum_{i=1}^{t} b_i h_{I''_i}$ (2.2.2).

Xét ánh xạ phân hình $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^{t-1}(\mathbb{C})$ với biểu diễn rút gọn $h = (\tilde{h}h_{I''_1} : ... : \tilde{h}h_{I''_t})$, ở đó $\tilde{h}$ là ánh xạ phân hình trên $\mathbb{C}^n$ thỏa mãn $\nu_{\tilde{h}} \leqslant \sum_{i \in \cup_{j=1}^{t} I''_j} \nu^{\infty}_{h_i}$.

Xét ánh xạ phân hình $b : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^{t-1}(\mathbb{C})$ với biểu diễn rút gọn $b = (\psi b_1 : ... : \psi b_t)$, ở đó ψ là các ánh xạ phân hình trên $\mathbb{C}^n$. Khi đó chúng ta có

$$T(r, b) = o(T(r, f)) \text{ và } N_{\psi b_i}(r) \leqslant N_{\psi b_1}(r) + N_{\frac{b_i}{b_1}}(r) = o(T(r, f)) \ (0 \leqslant i \leqslant t).$$

Nếu z là không điểm (tương ứng là cực điểm) của h_i thì $\nu_{(f,a_i)}(z) \neq \nu_{(g,a_i)}(z)$. Do đó $\nu_{(f,a_i)}(z) > d$ hoặc $\nu_{(g,a_i)}(z) > d$. Vậy chúng ta có $\min\{1, \nu^{\infty}_{h_i}(z)\} + \min\{1, \nu_{h_i}(z)\} \leqslant \min\{1, \nu_{(f,a_i),>d}(z)\}$. Điều này suy ra rằng $N^{(1)}_{h_i}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_i}}(r) \leqslant N^{(1)}_{(f,a_i),>d}(r) + N^{(1)}_{(g,a_i),>d}(r)$ (2.2.3).

Xét ánh xạ phân hình $h' : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^{t-1}(\mathbb{C})$ với biểu diễn rút gọn

$$h' = \Big(\frac{1}{\tilde{h}'}\psi b_1 \tilde{h} h_{I''_1} : ... : \frac{1}{\tilde{h}'}\psi b_t \tilde{h} h_{I''_t}\Big).$$

Từ (2.2.1), ánh xạ h' là không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Áp dụng định lý cơ bản thứ hai cho siêu phẳng, ta thu được

$$\begin{aligned} || \quad T(r, h') &\leqslant \sum_{i=1}^{t} N^{(t-1)}_{\frac{1}{\tilde{h}'}\psi b_i \tilde{h} h_{I''_i}}(r) + N^{(t-1)}_{\frac{1}{\tilde{h}'}\psi \tilde{h}\frac{h_{I'_0}}{h_{I'}}}(r) + o(T(r, h')) \\ &\leqslant (t-1) \cdot \sum_{i=1}^{t} N^{(1)}_{\tilde{h} h_{I''_i}}(r) + (t-1) \cdot N^{(1)}_{\tilde{h}\cdot\frac{h_{I'_0}}{h_{I'}}}(r) + o(T(r, f)) \\ &\quad + o(T(r, h')) \quad (2.2.4). \end{aligned}$$

Hơn nữa ta cũng có $N^{(1)}_{\tilde{h} h_{I''_i}}(r) \leqslant O(T(r, f))$ và $N^{(1)}_{\tilde{h}\cdot\frac{h_{I'_0}}{h_{I'}}}(r) \leqslant O(T(r, f))$. Do vậy ta suy ra

$$|| \quad T(r, h') \leqslant O(T(r, f)).$$

Đặt $I'' = \bigcup_{i=1}^{t} I''_i$ và $\mathcal{W} = \bigcup_{i \in I''}\{z : \nu_{(f,a_i),>k}(z) > 0\}$. Thế thì ta có

$$N^{(1)}_{\tilde{h} h_{I''_i}}(r) = N^{(1)}_{h_{I''_i}}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_{I'' \setminus I''_i}}}(r) + \sum_{j \in I''}(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r))$$

và

$$N^{(1)}_{\tilde{h}.\frac{h_{I'_0}}{h_{I'}}}(r) = N^{(1)}_{h_{I'_0}}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_{(I''\cup I')\setminus I'_0}}}(r) + \sum_{j\in I''}(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r)).$$

Với mỗi tập $J \subset \{1, 2, ..., 2N+2\}$, xét $J^c = \{1, 2, ..., 2N+2\} \setminus J$. Khi đó ta có

$$I''_i \subset I_i \text{ và } I'' \setminus I''_i \subset I^c_i \ (1 \leqslant i \leqslant t),$$

$$I'_0 \subset I_0 \text{ và } (I'' \cup I') \setminus I'_0 = \tilde{I} \setminus I'_0 = \tilde{I} \setminus (I_0 \setminus I) = (\tilde{I} \cup I) \setminus I_0 \subset I^c_0.$$

Suy ra

$$N^{(1)}_{\tilde{h}h_{I''_i}}(r) \leqslant N^{(1)}_{h_{I_i}}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_{I^c_i}}}(r) + \sum_{j=1}^{2N+2}(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r))$$

$$\text{và } N^{(1)}_{\tilde{h}.\frac{h_{I'_0}}{h_{I'}}}(r) \leqslant N^{(1)}_{h_{I_0}}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_{I^c_0}}}(r) + \sum_{j=1}^{2N+2}(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r)).$$

Kết hợp với (2.2.4), ta có khẳng định sau

$$\begin{aligned}
\| \ T(r,h') &\leqslant (t-1)\sum_{i=0}^{t}\Bigg(N^{(1)}_{h_{I_i}}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_{I^c_i}}}(r) + \sum_{j=1}^{2N+2}\Big(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) \\
&\quad + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r)\Big)\Bigg) + o(T(r,f)) \\
&= (t-1)\sum_{i=0}^{t}\Bigg(\sum_{j\in I_i}N^{(1)}_{h_j}(r) + \sum_{j\in I^c_i}N^{(1)}_{\frac{1}{h_j}}(r) + \sum_{j=1}^{2N+2}\Big(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) \\
&\quad + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r)\Big)\Bigg) + o(T(r,f)) \\
&\leqslant \left[\binom{2N+2}{N+1} - 2\right]\sum_{I\in\mathcal{I}}\Bigg(\sum_{i\in I}\Big(N^{(1)}_{h_i}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_i}}(r)\Big) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2N+2}\Big(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r)\Big)\Bigg) + o(T(r,f)) \\
&= \frac{1}{2}\binom{2N+2}{N+1}\left[\binom{2N+2}{N+1} - 2\right]\Bigg(\sum_{i=1}^{2N+2}\Big(N^{(1)}_{h_i}(r) + N^{(1)}_{\frac{1}{h_i}}(r)\Big) \\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{2N+2}\Big(N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_j),>k}(r)\Big)\Bigg) + o(T(r,f)) \quad (2.2.5).
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.2.3) và (2.2.5) chúng ta có

$$\| \ T(r,h') \leqslant \frac{1}{2}\binom{2N+2}{N+1}\left[\binom{2N+2}{N+1}-2\right]\sum_{i=1}^{2N+2}\Big(N^{(1)}_{(f,a_i),>d}(r)+N^{(1)}_{(g,a_i),>d}(r)$$
$$+2N^{(1)}_{(f,a_i),>k}(r)+2N^{(1)}_{(g,a_i),>k}(r)\Big)+o(T(r,f)) \ (2.2.6)$$

Xét các siêu phẳng $H_1=\{w_1=0\},\ H_2=\{w_2=0\},\ H_3=\{w_1+...+w_t=0\}$ trong $\mathbb{P}^{t-1}(\mathbb{C})$. Ta có

$$\begin{aligned}
\| \quad T(r,h') &\geq T\Big(r,\frac{(h',H_1)}{(h',H_2)}\Big)+O(1)=T\Big(r,\frac{b_1h_{I_1''}}{b_2h_{I_2''}}\Big)+O(1)\\
&=T\Big(r,\frac{b_1h_{I_1}}{b_2h_{I_2}}\Big)+O(1)=T\Big(r,\frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}\Big)+o(T(r,f))\\
&\geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}-1}(r)+o(T(r,f)),\\
\| \quad T(r,h') &\geq T\Big(r,\frac{(h',H_2)}{(h',H_3)}\Big)+O(1)=T\Big(r,\frac{b_2h_{I_2}}{h_{I_0}}\Big)+O(1)\\
&=T\Big(r,\frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}\Big)+o(T(r,f))\\
&\geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}-1}(r)+o(T(r,f)),\\
\| \quad T(r,h') &\geq T\Big(r,\frac{(h',H_3)}{(h',H_1)}\Big)+O(1)=T\Big(r,\frac{h_{I_0}}{b_1h_{I_1}}\Big)+O(1)\\
&=T\Big(r,\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}\Big)+o(T(r,f))\\
&\geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}-1}(r)+o(T(r,f)).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\| \quad 3T(r,h')\geq N^{(1)}_{\frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}-1}(r)+N^{(1)}_{\frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}-1}(r)+N^{(1)}_{\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}-1}(r)+o(T(r,f)).$$

Lại do $\dfrac{h_I}{h_J}=1$ trên tập $\bigcup_{j\in D\setminus((I\cup J)\setminus(I\cap J))}E_j\setminus\mathcal{W}$, ở đó $E_j=\{z\in\mathbb{C}^n:\nu_{(f,a_j),\leqslant N(N+2)}(z)>0\}$ và

$$(D\setminus((I_1\cup I_2)\setminus(I_1\cap I_2)))\cup(D\setminus((I_2\cup I_0)\setminus(I_2\cap I_0)))\cup(D\setminus((I_0\cup I_1)\setminus(I_0\cap I_1)))=D,$$

chúng ta suy ra

$$\begin{aligned}
N^{(1)}_{\frac{h_{I_1}}{h_{I_2}}-1}(r)+N^{(1)}_{\frac{h_{I_2}}{h_{I_0}}-1}(r)+N^{(1)}_{\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}}-1}(r) &\geq \sum_{i\in D}N^{(1)}_{(f,a_i),\leqslant N(N+2)}(r)\\
&-\sum_{i=1}^{2N+2}(N^{(1)}_{(f,a_i),>k}(r)+N^{(1)}_{(g,a_i),>k}(r)).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$3T(r,h') \geq \sum_{i\in D} N^{(1)}_{(f,a_i),\leqslant N(N+2)}(r) - \sum_{i=1}^{2N+2}(N^{(1)}_{(f,a_i),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_i),>k}(r)) + o(T(r,f)) \quad (2.2.7).$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned}\sum_{i\in D} N^{(1)}_{(f,a_i),\leqslant N(N+2)}(r) &= \sum_{i\in D}(N^{(1)}_{(f,a_i)}(r) - N^{(1)}_{(f,a_i),>N(N+2)}(r))\\ &\geq \frac{N+2}{N(N+2)}T(r,f) - \frac{N+2}{N(N+2)+1}T(r,f) + o(T(r,f))\\ &= \frac{N+2}{N(N+2)(N(N+2)+1)}T(r,f) + o(T(r,f)).\end{aligned}$$

Bằng lập luận tương tự ta cũng có

$$\sum_{i\in D} N^{(1)}_{(g,a_i),\leqslant N(N+2)}(r) \geq \frac{N+2}{N(N+2)(N(N+2)+1)}T(r,g) + o(T(r,g))$$

Kết hợp (2.2.6) và (2.2.7) ta suy ra

$$\begin{aligned}&3\binom{2N+2}{N+1}\Big[\binom{2N+2}{N+1} - 2\Big]\sum_{i=1}^{2N+2}(N^{(1)}_{(f,a_i),>d}(r) + N^{(1)}_{(g,a_i),>d}(r)\\ &+ 2N^{(1)}_{(f,a_i),>k}(r) + 2N^{(1)}_{(g,a_i),>k}(r))\\ &\geq \frac{N+2}{N(N+2)(N(N+2)+1)}(T(r,f) + T(r,g))\\ &- \sum_{i=1}^{2N+2}(N^{(1)}_{(f,a_i),>k}(r) + N^{(1)}_{(g,a_i),>k}(r)) + o(T(r,f) + T(r,g)) \ (2.2.8).\end{aligned}$$

Từ (2.2.8) chúng ta khẳng định được

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{3}{d+1} + \frac{6}{k+1}\Big)\binom{2N+2}{N+1}\Big[\binom{2N+2}{N+1} - 2\Big](T(r,f) + T(r,g))\\ &\geqslant \Big(\frac{N+2}{N(N+2)(N(N+2)+1)} - \frac{2N+2}{k+1}\Big)(T(r,f) + T(r,g))\\ &+ o(T(r,f) + T(r,g)).\end{aligned}$$

Cho r tiến ra ∞, chúng ta suy ra

$$\Big(\frac{3}{d+1} + \frac{6}{k+1}\Big)\binom{2N+2}{N+1}\Big[\binom{2N+2}{N+1} - 2\Big] \geqslant \Big(\frac{N+2}{N(N+2)(N(N+2)+1)} - \frac{2N+2}{k+1}\Big).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết của định lý. Vậy $t = 1$ hay ta suy ra $\frac{h_{I_0}}{h_{I_1}} = b_1 \in \mathcal{R}(\{a_i\}_{i=1}^{3N+1})$.

Do đó, với mỗi tập $I \in \mathcal{I}$, có tập $J \in \mathcal{I} \setminus \{I\}$ sao cho $\frac{h_I}{h_J} \in \mathcal{R}(\{a_i\}_{i=1}^{3N+1})$.

(iii) Chúng ta kí hiệu $\mathcal{M}^*{}_n$ là nhóm nhân aben của các hàm phân hình khác không trên $\mathbb{C}^n$. Gọi $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}^*{}_n$ là nhóm con nhỏ nhất chứa tất cả các hàm $h \in \mathcal{M}^*{}_n$ sao cho $h^k \in \mathcal{R}(\{a_i\}_{i=1}^q)$ với một số nguyên dương k nào đó. Khi đó ta có nhóm nhân $\mathcal{M}^*{}_n/\mathcal{J}$ là nhóm aben không xoắn.

Xét nhóm con aben tự do sinh bởi các phần tử $\{[h_1], ..., [h_{3N+1}]\}$ của nhóm aben không xoắn $\mathcal{M}^*{}_n/\mathcal{J}$, ở đó $h_i = \frac{(f, a_i)}{(g, a_i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3N+1)$. Thế thì họ $\{[h_1], ..., [h_{3N+1}]\}$ có tính chất $P_{2N+2,N+1}$. Điều này suy ra rằng tồn tại $3N + 1 - 2N = N + 1$ phần tử, ta sẽ gọi là, $[h_1], ..., [h_{N+1}]$, sao cho $[h_1] = ... = [h_{N+1}]$. Do đó ta có $\frac{h_i}{h_j} \in \mathcal{J}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant N+1)$, và suy ra

$$T(r, \frac{h_i}{h_j}) = o(T(r, f)) \ (1 \leqslant i < j \leqslant N + 1).$$

Ta có bốn trường hợp sau.

Trường hợp 1. Giả sử tồn tại ba chỉ số $\{i, j, k\}$ $(1 \leqslant i < j < k \leqslant N + 1)$ sao cho $h_i \not\equiv h_j \not\equiv h_k \not\equiv h_i$.

Thế thì ta có

$$\begin{aligned} T(r, \frac{h_i}{h_j}) &\geq N_{\frac{h_i}{h_j}-1}(r) + O(1) \\ &\geq \sum_{l \in D \setminus \{i,j\}} N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) - \sum_{s \in \{i,j\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + O(1). \end{aligned}$$

Suy ra $N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) \leqslant \sum_{s\in\{i,j\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r, f)),\ \forall l \in D \setminus \{i, j\}$.

Lập luận tương tự ta cũng có $N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) \leqslant \sum_{s\in\{j,k\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r, f))$ với mỗi $l \in D \setminus \{j, k\}$ và $N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) \leqslant \sum_{s\in\{i,k\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r, f))$ với mỗi $l \in D \setminus \{i, k\}$. Do đó ta có

$$N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) \leqslant \sum_{s\in\{i,j,k\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r, f))$$

với mỗi $l \in D$. Điều này suy ra rằng

$$\begin{aligned} || \; T(r,f) &\leqslant \sum_{l\in D} N^{(N)}_{(f,a_l)}(r) + o(T(r,f)) \\ &\leqslant \sum_{l\in D} N^{(N)}_{(f,a_l),>N(N+2)}(r) + N(2N+2)\sum_{s\in\{i,j,k\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r,f)) \\ &\leqslant \left(\frac{N(N+2)}{N(N+2)+1} + \frac{3N(2N+2)}{k+1}\right)T(r,f) + o(T(r,f)). \end{aligned}$$

Vậy ta có $|| \quad T(r,f) = o(T(r,f))$. Điều này là vô lý.

Trường hợp 2. Giả sử có hai tập con I và J của tập $\{1,\cdots,N+1\}$ với $I \cap J = \emptyset,\ I \cup J = \{1,\cdots,N+1\},\ \sharp I \geq 2,\ \sharp J \geq 2$ sao cho

$$h_i = h_j \ \forall i,j \in I \text{ và } h_i = h_j \ \forall i,j \in J \text{ và } h_k \not\equiv h_l \ \forall k \in I,\ \forall l \in J.$$

Chọn các phần tử $i,k \in I$ và $j,t \in J$ ta sẽ có

$$\begin{aligned} T(r,\frac{h_i}{h_j}) &\geq N_{\frac{h_i}{h_j}-1}(r) + O(1) \\ &\geq \sum_{l\in D\setminus\{i,j\}} N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) - \sum_{s\in\{i,j\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + O(1). \end{aligned}$$

Suy ra $N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) \leqslant \sum_{s\in\{i,j\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r,f)),\ \forall l \in D \setminus \{i,j\}$.

Tương tự ta có $N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) \leqslant \sum_{s\in\{k,t\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r,f))$ với mỗi $l \in D \setminus \{k,t\}$. Ta suy ra

$$N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant N(N+2)}(r) \leqslant \sum_{s\in\{i,j,k,t\}} N^{(1)}_{(f,a_s),>k}(r) + o(T(r,f)) \ \forall l \in D.$$

Lập luận tương tự như trong Trường hợp 1 chúng ta cũng có $T(r,f) = o(T(r,f))$. Điều này là vô lý.

Trường hợp 3. Giả sử rằng $h_1 = \cdots = h_N \not\equiv h_{N+1}$.

Từ giả thiết (i) của Định lý, ta thấy rằng h_i là các hàm phân hình với mọi $1 \leqslant i \leqslant N$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $1 = h_1 = \cdots = h_N \not\equiv h_{N+1}$. Mặt khác ta cũng có thể dễ ràng suy ra rằng có các hàm phân hình c_{li} $(N+2 \leqslant l \leqslant 3N+1,\ 1 \leqslant i \leqslant N+1)$ sao cho

$$a_l = \sum_{i=1}^{N+1} c_{li}a_i \ (N+2 \leqslant l \leqslant 3N+1) \text{ và } N_{c_{li}}(r) + N_{\frac{1}{c_{li}}}(r) = o(T(r,f)).$$

Vậy ta có

$$(f, a_l) = \sum_{i=1}^{N+1} c_{li}(f, a_i),$$

$$(g, a_l) = \sum_{i=1}^{N} c_{li}(f, a_i) + \frac{c_{li}}{h_{N+1}}(f, a_{N+1})$$

$$= (f, a_l) + c_{li}(\frac{1}{h_{N+1}} - 1)(f, a_{N+1}) \ (N + 2 \leqslant l \leqslant 3N + 1).$$

Sử dụng điều kiện (i) và (ii), ta nhận thấy nếu $\nu^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant k}(z) = 1$ và $(f, a_{N+1})(z) \neq 0$ thì $(c_{li}(\frac{1}{h_{N+1}} - 1))(z) = 0$. Do đó ta có

$$N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant k}(r) - N^{(1)}_{(f,a_{N+1}),>k}(r) \leqslant N_{\frac{1}{h_{N+1}}-1}(r) + o(T(r, f))$$

$$= o(T(r, f)) \ (N + 2 \leqslant l \leqslant 3N + 1).$$

Từ đó suy ra

$$N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant k}(r) \leqslant N^{(1)}_{(f,a_{N+1}),>k}(r) + o(T(r, f)) \leqslant \frac{1}{k+1}T(r, f) + o(T(r, f)).$$

Mặt khác ta cũng có

$$\| \quad T(r, f) \leqslant \frac{2N}{N+2} \sum_{l=N+2}^{3N+1} N^{(N)}_{(f,a_l)}(r) + o(T(r, f))$$

$$\leqslant \frac{2N^2}{N+2} \sum_{l=N+2}^{3N+1} (N^{(1)}_{(f,a_l),\leqslant k}(r) + N^{(1)}_{(f,a_l),>k}(r)) + o(T(r, f))$$

$$\leqslant \frac{8N^3}{(N+2)(k+1)} T(r, f) + o(T(r, f)).$$

Suy ra $\| \quad T(r, f) = o(T(r, f))$. Điều này là mâu thuẫn.

Trường hợp 4. $h_1 = \cdots = h_{N+1}$.

Khi đó ta có $f \equiv g$. Vậy Định lý được chứng minh. □

2.3 Định lý duy nhất của ánh xạ phân hình với điều kiện đạo hàm

Trong mục này chúng tôi chứng minh kết quả sau.

Định lý 2.3.1. *(Hà-Quang-Thái [34]) Giả sử $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là hai ánh xạ phân hình và k là số nguyên dương thỏa mãn $k > 2N^3 + 12N^2 + 6N - 1$. Cho $\{a_t\}_{t=1}^{N+2}$ là các ánh xạ phân hình "nhỏ" (so với f) từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho*

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^n : \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z) > 0\} \leqslant n - 2 \ (1 \leqslant s < t \leqslant N + 2).$$

Giả sử f, g không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_t\}_{t=1}^{N+2})$ và thỏa mãn các điều kiện sau:
(i) $\min\ (\nu_{(f,a_t),\leqslant k}, 1) = \min\ (\nu_{(g,a_t),\leqslant k}, 1)$ $(1 \leqslant t \leqslant N + 2)$.
(ii) Gọi $f = (f_0 : \cdots : f_N)$ và $g = (g_0 : \cdots : g_N)$ là các biểu diễn rút gọn của f và g tương ứng. Giả sử với mỗi chỉ số $0 \leqslant j \leqslant N$ và với mỗi $\omega \in \bigcup_{t=1}^{N+2}\{z \in \mathbb{C}^n :$ $\nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z) > 0\}$, các điều kiện sau thỏa mãn:

(a) *Nếu $f_j(\omega) = 0$ thì $g_j(\omega) = 0$,*

(b) *Nếu $f_j(\omega)g_j(\omega) \neq 0$ thì $\mathcal{D}^\alpha\left(\frac{f_i}{f_j}\right)(\omega) = \mathcal{D}^\alpha\left(\frac{g_i}{g_j}\right)(\omega)$ với mỗi n-bộ $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của các số nguyên không âm với $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leqslant 2N$ và $i \neq j$, ở đó $\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}z_1 ... \partial^{\alpha_n}z_n}$.*

Khi đó ta có $f \equiv g$.

Chúng ta lưu ý rằng điều kiện (ii) trong Định lý 2.3.1 không phụ thuộc vào biểu diễn rút gọn.

Chứng minh. Giả sử $f \not\equiv g$ và f, g, a_i có biểu diễn rút gọn

$$f = (f_0 : ... : f_N),\ g = (g_0 : ... : g_N),\ a_i = (a_{i0} : ... : a_{iN}).$$

Bổ đề 2.3.2. *Cho $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình sao cho f không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Gọi $a_1, a_2, ..., a_{N+2}$ là $N + 2$ các ánh xạ phân hình "nhỏ" (so với f) từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó với $k \geq N - 1$, ta có*

$$\Big|\Big|\left(1 - \frac{N(N+2)}{k+1}\right)T(r, f) \leqslant \sum_{j=1}^{N+2}\left(1 - \frac{N}{k+1}\right)N^{(N)}_{(f,a_j),\leqslant k}(r) + o(T(r, f)).$$

Chứng minh. Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$\begin{aligned}
\Big|\Big| \quad T(r,f) &\leqslant \sum_{j=1}^{N+2} N^{(N)}_{(f,a_j)}(r) + o(T(r,f)) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N+2} N^{(N)}_{(f,a_j),\leqslant k}(r) + \sum_{j=1}^{N+2} \frac{N}{k+1} N_{(f,a_j),>k}(r) + o(T(r,f)) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{N+2} \big(1 - \frac{N}{k+1}\big) N^{(N)}_{(f,a_j),\leqslant k}(r) + \frac{N(N+2)}{k+1} T(r,f) + o(T(r,f)).
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\Big|\Big| \Big(1 - \frac{N(N+2)}{k+1}\Big) T(r,f) \leqslant \sum_{j=1}^{N+2} \Big(1 - \frac{N}{k+1}\Big) N^{(N)}_{(f,a_j),\leqslant k}(r) + o(T(r,f)).$$

Bổ đề được chứng minh.

Bổ đề 2.3.3. *Ta có khẳng định sau đúng*

$$\begin{aligned}
(2N+1) \sum_{v=1}^{N+2} N^{(1)}_{(f,a_v),\leqslant k}(r) \leqslant \Big(1 + \frac{4N+2}{k+1}\Big)&(T(r,f) + T(r,g)) \\
&+ o(T(r,f) + T(r,g))
\end{aligned}$$

Chứng minh. Cố định một chỉ số j $(0 \leqslant j \leqslant N)$. Do $g \not\equiv f$ nên có chỉ số i $(0 \leqslant i \leqslant N)$ sao cho $P_{ij} = \frac{(f,a_i)}{(f,a_j)} - \frac{(g,a_i)}{(g,a_j)} \not\equiv 0$.

Ta đặt $I = I(f) \cup I(g) \cup \cup_{1\leqslant\ t<s\leqslant N+2} \{z \in \mathbb{C}^n\ |\nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z) \cdot \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z) > 0\}$. Thế thì I là một tập con giải tích đối chiều 2 hoặc là tập rỗng.

Ta đặt ν_0 là divisor xác định như sau

$$\nu_0 := (\max\{0, (2N+1) - \nu_{(f,a_j)} - \nu_{(g,a_j)}\}) \cdot (\min\{1, \nu_{(f,a_j),\leqslant k}\}).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng $\nu_{P_{ij}} \geq \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1) \min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}\} + \nu_0 - (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_j),>k}$ ngoài một tập có đối chiều 2.

Thật vậy, ta cố định điểm $z \in \cup_{i=1}^{N+2} \{w : \nu_{(f,a_i),\leqslant k}(w) > 0\} \setminus I$.
Xét trường hợp $(f,a_j)(z) \neq 0$. Giả sử rằng $f_l(z) \cdot g_l(z) = 0$ $(0 \leqslant l \leqslant N)$. Thế thì $g_l(z) = 0$ $(0 \leqslant l \leqslant N)$. Suy ra $z \in I(g)$. Điều này vô lý. Vậy tồn tại chỉ số l sao cho

$f_l(z)g_l(z) \neq 0$. Suy ra

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha P_{ij}(z) &= \mathcal{D}^\alpha\big(\frac{(f,a_i)}{(f,a_j)} - \frac{(g,a_i)}{(g,a_j)}\big)(z)\\ &= \mathcal{D}^\alpha\big(\frac{\sum_{v=0}^N \frac{f_v}{f_l} a_{iv}}{\sum_{v=0}^N \frac{f_v}{f_l} a_{jv}} - \frac{\sum_{v=0}^N \frac{g_v}{g_l} a_{iv}}{\sum_{v=0}^N \frac{g_v}{g_l} a_{jv}}\big)(z) = 0 \ (|\alpha| \leqslant 2N).\end{aligned}$$

Từ đó ta có $\nu_{P_{ij}}(z) \geq 2N+1$. (2.3.1)

Tương tự, nếu $(f,a_j)(z) = 0$ thì

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha\big((f,a_i)(g,a_j) - (g,a_i)(f,a_i)\big)(z) &= \mathcal{D}^\alpha\big((f_l g_l)(\sum_{v=0}^N \frac{f_v}{f_l} a_{iv} \sum_{v=0}^N \frac{g_v}{g_l} a_{jv}\\ &\quad - \sum_{v=0}^N \frac{g_v}{g_l} a_{iv} \sum_{v=0}^N \frac{f_v}{f_l} a_{jv})\big)(z) = 0 \ (|\alpha| \leqslant 2N).\end{aligned}$$

Do đó ta cũng có $\nu_{((f,a_i)(g,a_j)-(f,a_j)(g,a_i))}(z) \geq 2N+1$. (2.3.2)

Giả sử $\nu_{(f,a_j),>k}(z) = 0$. Ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Giả sử $\nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z) > 0$ với t nào đó mà $t \neq j$.
Thế thì $\nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z) = 0$ $(s \neq t)$, đặc biệt là $\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z) = 0$. Suy ra $\nu_0(z) = 0$ và $\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2}(2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} = 2N+1$. Từ (2.3.1), ta có

$$\nu_{P_{ij}}(z) \geq \sum_{\substack{t=1\\ t\neq j}}^{N+2}(2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) - (2N+1)\nu^1_{(f,a_j),>k}(z) \quad (2.3.3)$$

Trường hợp 2. Giả sử $\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z) > 0$.
Khi đó ta xét $\nu_{(f,a_t),\leqslant k}(z) = 0$ với mọi $t \neq j$.
Thế thì $\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2}(2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} = 0$.
Mặt khác, từ $P_{ij} = \dfrac{(f,a_i)(g,a_j) - (f,a_j)(g,a_i)}{(f,a_j)(g,a_j)}$ và (2.3.2), chúng ta suy ra

$$\begin{aligned}\nu_{P_{ij}}(z) &= \nu_{((f,a_i)(g,a_j)-(f,a_j)(g,a_i))}(z) - \nu_{(f,a_j)}(z) - \nu_{(g,a_j)}(z)\\ &\geq (2N+1) - \nu_{(f,a_j)}(z) - \nu_{(g,a_j)}(z).\end{aligned}$$

Kết hợp thêm với $\nu_{P_{ij}}(z) \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}\nu_{P_{ij}}(z) &\geq \max\{0, (2N+1) - \nu_{(f,a_j)}(z) - \nu_{(g,a_j)}(z)\}\\ &\geq (\max\{0, (2N+1) - \nu_{(f,a_j)}(z) - \nu_{(g,a_j)}(z)\}) \cdot (\min\{1, \nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\})\\ &= \nu_0(z)\\ &= \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) - (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_j),>k}(z) \quad (2.3.4)\end{aligned}$$

Nếu $\nu_{(f,a_j),>k}(z) > 0$ thì $\nu_0(z) = 0$ và

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} \leqslant 2N+1.$$

Điều này suy ra

$$\nu_{P_{ij}}(z) \geqslant 0 \geqslant \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) - (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_j),>k}(z) \quad (2.3.5)$$

Kết hợp (2.3.4) và (2.3.5), ta có

$$\nu_{P_{ij}}(z) \geq \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) - (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_j),>k}(z) \quad (2.3.6)$$

với mọi $z \in \cup_{i=1}^{N+2}\{w : \nu_{(f,a_i),\leqslant k}(w) > 0\} \setminus I$.
Dễ thấy rằng nếu $z \notin \cup_{i=1}^{N+2}\{w : \nu_{(f,a_i),\leqslant k}(w) > 0\}$ thì

$$\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) = 0.$$

Điều này suy ra

$$\nu_{P_{ij}}(z) \geq \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) - (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_j),>k}(z) \quad (2.3.7)$$

Kết hợp (2.3.6) và (2.3.7), với mỗi $z \notin I$ ta có

$$\nu_{P_{ij}}(z) \geq \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N+2} (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_s),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) - (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_j),>k}(z).$$

Suy ra

$$N_{P_{ij}}(r) \geq (2N+1)\sum_{j\neq t=1}^{N+2} N^{(1)}_{(f,a_t),\leqslant k}(r) + N(r,\nu_0) - (2N+1)N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r).$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng

$$\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z) - \nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z) - \nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z) \leqslant -(2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) + (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z)$$

với mỗi $z \notin I$.

Thật vậy, ta dễ ràng chỉ ra rằng

$$\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z) - \nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z) - \nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z) \leqslant \max\{\nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z),\ \nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z)\} - \nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z) - \nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z) \leqslant 0.$$

Cố định $z \notin I$. Chúng ta xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Giả sử $(f,a_i)(z) \neq 0$.

Nếu $\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z) > 0$ thì

$$\begin{aligned}\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z) =& \max\{0, \nu_{(f,a_j)} + \nu_{(g,a_j)} - \nu_{((f,a_i)(g,a_j)-(f,a_j)(g,a_i))}\}(z)\\ \leqslant& \nu_{(f,a_j)}(z) + \nu_{(g,a_j)}(z) - (2N+1) + \nu_0(z)\\ =& \nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z) + \nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z) - (2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z)\\ &+ (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z).\end{aligned}$$

Nếu $\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z) = 0$ thì

$$\begin{aligned}\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z) -& \nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z) - \nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z) \leqslant 0\\ &\leqslant -(2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) + (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z).\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z) - \nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z) - \nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z) \leqslant -(2N+1)\min\{1, \nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\} + \nu_0(z) + (2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z).$$

Trường hợp 2. Giả sử rằng $(f,a_i)(z)=0$.

Nếu $\nu_{(f,a_i),\leqslant k}(z)>0$ thì $\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)=0$. Điều này suy ra

$$\begin{aligned}\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z)-&\nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z)-\nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z)\leqslant 0\\ &\leqslant-(2N+1)\min\{1,\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\}+\nu_0(z)+(2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z).\end{aligned}$$

Nếu $\nu_{(f,a_i),>k}(z)>0$ thì

$$(2N+1)\min\{1,\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\}\leqslant(2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z).$$

Vậy ta suy ra

$$\begin{aligned}\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z)-&\nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z)-\nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z)\leqslant 0\\ &\leqslant-(2N+1)\min\{1,\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\}+\nu_0(z)+(2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z).\end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp trên chúng ta có

$$\begin{aligned}\nu_{\frac{1}{P_{ij}}}(z)-\nu_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(z)-\nu_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(z)\leqslant&-(2N+1)\min\{1,\nu_{(f,a_j),\leqslant k}(z)\}+\nu_0(z)\\ &+(2N+1)\nu^{(1)}_{(f,a_i),>k}(z)\end{aligned}$$

với mọi $z\notin I$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}N_{\frac{1}{P_{ij}}}(r)-N_{\dfrac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(r)-N_{\dfrac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(r)\leqslant&-(2N+1)N^{(1)}_{(f,a_j),\leqslant k}(r)+N(r,\nu_0)\\ &+(2N+1)N^{(1)}_{(f,a_i),>k}(r).\end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta có

$$\begin{aligned}m(r,P_{ij})&\leqslant m\left(r,\frac{(f,a_i)}{(f,a_j)}\right)+m\left(r,\frac{(g,a_i)}{(g,a_j)}\right)+o(T(r,f)+T(r,g))\\ &\leqslant T(r,f)+T(r,g)-N\left(r,\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}\right)-N\left(r,\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}\right)+o(T(r,f))+o(T(r,g))\\ &\leqslant T(r,f)+T(r,g)-N_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(r)-N_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(r)+o(T(r,f)+T(r,g)).\end{aligned}$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
&(2N+1)\sum_{\substack{v=1\\ v\neq j}}^{N+2} N^{(1)}_{(f,a_v),\leqslant k}(r) + N(r,\nu_0) - (2N+1)N^{(1)}_{(f,a_j),>k}(r)\\
&\leqslant N_{P_{ij}}(r) \leqslant T(r,P_{ij}) = N_{\frac{1}{P_{ij}}}(r) + m(r,P_{ij}) + O(1)\\
&\leqslant T(r,f) + T(r,g) + N_{\frac{1}{P_{ij}}}(r) - N_{\frac{(f,a_j)}{(f,a_i)}}(r) - N_{\frac{(g,a_j)}{(g,a_i)}}(r) + o(T(r,f)+T(r,g))\\
&\leqslant T(r,f) + T(r,g) - (2N+1)N^{(1)}_{(f,a_j),\leqslant k}(r) + N(r,\nu_0)\\
&\qquad + (2N+1)N^{(1)}_{(f,a_i),>k}(r) + o(T(r,f)+T(r,g)).
\end{aligned}
$$

Vì thế

$$
(2N+1)\sum_{v=1}^{N+2} N^{(1)}_{(f,a_v),\leqslant k}(r) \leqslant (1 + \frac{4N+2}{k+1})(T(r,f)+T(r,g)) + o(T(r,f)+T(r,g)).
$$

Bổ đề 2.3.3 được chứng minh.

Bây giờ áp dụng Bổ đề 2.3.3, ta có

$$
\sum_{v=1}^{N+2} N^{(N)}_{(f,a_v),\leqslant k}(r) \leqslant (\frac{N}{2N+1} + \frac{2N}{k+1})(T(r,f)+T(r,g)) + o(T(r,f)+T(r,g)).
$$

Tương tự ta cũng có

$$
\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{N+2} N^{(N)}_{(g,a_v),\leqslant k}(r) &\leqslant N\sum_{v=1}^{N+2} N^{(1)}_{(g,a_v),\leqslant k}(r) = N\sum_{v=1}^{N+2} N^{(1)}_{(f,a_v),\leqslant k}(r)\\
&\leqslant \left(\frac{N}{2N+1} + \frac{2N}{k+1}\right)\Big(T(r,f)+T(r,g)\Big) + o(T(r,f)+T(r,g)).
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{N+2} (N^{(N)}_{(f,a_v),\leqslant k}(r) + N^{(N)}_{(g,a_v),\leqslant k}(r))\\
&\leqslant \left(\frac{2N}{2N+1} + \frac{4N}{k+1}\right)\Big(T(r,f)+T(r,g)\Big) + o(T(r,f)+T(r,g)).
\end{aligned}
$$

Mặt khác theo Bổ đề 2.3.2, ta suy ra

$$
||\ \sum_{i=1}^{N+2} N^{(N)}_{(f,a_i),\leqslant k}(r) \geq \frac{(k+1)-N(N+2)}{k+1-N} T(r,f)
$$

và

$$
||\ \sum_{i=1}^{N+2} N^{(N)}_{(g,a_i),\leqslant k}(r) \geq \frac{(k+1)-N(N+2)}{k+1-N} T(r,g).
$$

Suy ra

$$\Big|\Big| \ (\frac{2N}{2N+1} + \frac{4N}{k+1})((T(r,f) + T(r,g))$$
$$\geq \frac{(k+1) - N(N+2)}{k+1-N}(T(r,f) + T(r,g)) + o((T(r,f) + T(r,g))).$$

Cho r tiến ra ∞, ta có

$$\frac{2N}{2N+1} + \frac{4N}{k+1} \geq \frac{(k+1) - N(N+2)}{k+1-N}.$$

Do đó ta suy ra $\dfrac{2N}{2N+1} \geq \dfrac{(k+1) - N(N+6)}{k+1-N}$. Vậy ta thu được $k+1 \leqslant 2N^3 + 12N^2 + 6N$. Điều này là mâu thuẫn. Vậy, $f \equiv g$ và Định lý 2.3.1 đã được chứng minh. $\square$

Chương 3

Sự phân bố giá trị của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu tại tập dạng vành khuyên

Giả sử M là một mặt cực tiểu không phẳng $\mathbb{R}^3$, hay cụ thể là một mặt cực tiểu liên thông và được định hướng trong $\mathbb{R}^3$. Theo định nghĩa cổ điển thì ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu M là ánh xạ G biến mỗi điểm $p \in M$ thành một véc tơ đơn vị trực giao của M là $G(p) \in S^2$. Khi đó bằng cách dùng phép chiếu nổi π từ S^2 lên $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ta có thể thay thế việc nghiên cứu G bằng ánh xạ $g := \pi \circ G : M \to \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}(= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Bằng cách xét hệ tọa độ chỉnh hình địa phương $z = u + \sqrt{-1}v$ ứng với hệ tọa độ đẳng nhiệt dương (u, v), ta có thể xem M là một mặt Riemann mở với mê-tríc bảo giác ds^2. Khi đó, vì M là mặt cực tiểu nên ta có g là một ánh xạ phân hình trên M.

Việc nghiên cứu sự phân bố giá trị của ánh xạ Gauss được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học như R. Osserman, F. Xavier, H. Fujimoto, M. Ru, ... Kết quả tốt nhất là vào năm 1988 khi H. Fujimoto [20] đã chứng minh được giả thuyết của Nirenberg rằng nếu M là mặt cực tiểu đầy trong $\mathbb{R}^3$ thì ánh xạ Gauss của nó có thể bỏ nhiều nhất 4 điểm và đây là kết quả tối ưu. Năm 1991, S. J. Kao [38] cũng đưa ra kết quả tương tự khi xét ánh xạ Gauss tại các tập con dạng vành khuyên của M, tức là tập con bảo giác với tập vành khuyên $\{z|\ 0 < 1/r < |z| < r\}$. Các mở rộng của những kết quả trên cho trường hợp $\mathbb{R}^m (m > 3)$ cũng được quan tâm nghiên cứu mạnh mẽ và cũng đã thu được nhiều kết quả tốt. Theo một góc độ khác, năm 1993, M. Ru [52] đã đưa ra các kết quả về tính rẽ nhánh của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu đầy trong $\mathbb{R}^m$. Mục tiêu của chương này là tiếp tục phát triển các kết quả của M Ru, S. J. Kao để nghiên cứu tính rẽ nhánh của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu đầy trong $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ tại các tập con dạng vành khuyên. Trường hợp $\mathbb{R}^m (m > 4)$ chúng tôi giới thiệu tới công việc tiếp theo của Dethloff-Hà-Thoan [10].

3.1 Mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^m$

Cho M là một đa tạp vi phân thực hai chiều liên thông và định hướng được, xét $x = (x_1, ..., x_n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là một nhúng.
Cho mỗi điểm $p \in M$, ta lấy một hệ tọa độ địa phương được định hướng dương (u_1, u_2) quanh điểm p. Mặt phẳng tiếp xúc của M tại p được xác định như sau

$$T_p(M) := \left\{ \lambda \frac{\partial x}{\partial u_1} + \mu \frac{\partial x}{\partial u_2} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

và không gian trực giao của M tại p được cho bởi

$$N_p(M) := \left\{ N \in T_p\mathbb{R}^m | \left(N, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right) = \left(N, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right) = 0 \right\},$$

ở đó (X, Y) kí hiệu là tích vô hướng của hai véc tơ X và Y.
Gọi ds^2 là mê tríc trên M được hạn chế từ mê tríc chính tắc trên $\mathbb{R}^m$, cũng được gọi là *dạng cơ bản thứ nhất* trên M, xác định bởi

$$\begin{aligned} ds^2 = |dx|^2 := (dx, dx) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2, \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 \right) \\ &= g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2, \end{aligned}$$

ở đó $g_{ij} := \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right), 1 \leqslant i, j \leqslant 2$
Dạng cơ bản thứ hai của M ứng với pháp véc tơ đơn vị N được cho bởi công thức

$$d\sigma^2 := \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} b_{ij}(N) du_i du_j,$$

ở đó $b_{ij}(N) := \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, N \right) (1 \leqslant i, j \leqslant 2)$, không phụ thuộc vào hệ tọa độ địa phương
.

Cho một đường cong chính quy $\gamma : x = x(t)$ $(a < t < b)$ với $x(0) = p$ trên M $(a < 0 < b)$. Xét một tọa độ địa phương u_1, u_2 quanh p cho bởi một vi phôi Φ từ một lân cận của p lên tập con mở của $\mathbb{R}^2$, khi đó ta có thể biểu diễn γ dưới dạng

$$\gamma : u_i = u_i(t) \ (i = 1, 2)$$

Mệnh đề 3.1.1. *(xem chi tiết trong [25, trang 3]) Cho một đường cong $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ chính quy trên M, $\gamma(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Khi đó ta có*

$$k_\gamma(N) := \left(\frac{d^2x}{dv^2}, N\right) = \frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{\sum_{ij} b_{ij} u_i' u_j'}{\sum_{ij} g_{ij} u_i' u_j'}$$

$\forall N \in N_{\gamma(t)}(M)$.

Ta có thể chỉ ra rằng $k_\gamma(N)$ chỉ phụ thuộc vào véc tơ N và véc tơ tiếp xúc của γ tại p (xem chi tiết trong [25, trang 2]). Ta chọn một véc tơ khác không $N \in N_p(M)$ và một véc tơ tiếp xúc đơn vị $T \in T_p(M)$. Chọn một đường cong $\rho(v)$ trong M với tham số hóa tự nhiên v sao cho $\rho(0) = p$ và $(d\rho/dv)(0) = T$

Định nghĩa 3.1.2. *Độ cong chuẩn tắc của M theo hướng T ứng với véc tơ pháp tuyến N được cho bởi công thức*

$$k(N, T) := \left(\frac{d^2\rho}{dv^2}, N\right).$$

Nhận xét: Nếu gọi α là mặt phẳng qua p chứa véc tơ N, T và γ là đường cong giao của α với M thì bằng các tính toán thông thường chúng ta có thể chỉ ra rằng $k(N, T)$ là nghịch đảo của bán kính độ cong của đường cong γ trong mặt phẳng α.

Đặt

$$k_1(N) := \min\{k(N, T); T \in T_p(M), |T| = 1\},$$
$$k_2(N) := \max\{k(N, T); T \in T_p(M), |T| = 1\},$$

Định nghĩa 3.1.3. *Độ cong trung bình của M ứng với hướng N tại p được định nghĩa bởi*

$$H_p(N) := \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2}$$

Chúng ta cũng có thể tính toán độ cong trung bình theo công thức sau

$$H_p(N) = \frac{g_{11}b_{22}(N) + g_{22}b_{11}(N) - 2g_{12}b_{12}(N)}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)}$$

(xem chứng minh trong [25]).

Định nghĩa 3.1.4. *Một mặt M nhúng trong $\mathbb{R}^m$ được gọi là mặt cực tiểu nếu $H_p(N) = 0$ với mọi điểm $p \in M$ và mọi véc tơ $N \in N_p(M)$.*

Định nghĩa 3.1.5. *Cho một mặt M cùng với mê-tríc ds^2. Một hệ tọa độ địa phương (u_1, u_2) trên một lân cận mở U trong M được gọi là một hệ tọa độ đẳng nhiệt trên U nếu ds^2 có thể được biểu diễn như sau*

$$ds^2 = \lambda^2(du_1^2 + du_2^2),$$

với một hàm $\mathcal{C}^\infty$ dương λ trên U.

Định lý 3.1.6. *(Chern [7]). Mỗi mặt M đều có một hệ tọa độ đẳng nhiệt địa phương phủ toàn bộ M.*

Mệnh đề 3.1.7. *Cho một mặt định hướng M với mê tríc ds^2. Nếu chúng ta lấy hai hệ tọa độ đẳng nhiệt địa phương (u, v) và (x, y) thì $w = u + \sqrt{-1}v$ là một hàm chỉnh hình theo biến $z = x + \sqrt{-1}y$ trên miền chung.*

Chứng minh: Chi tiết trong [25, trang 8].

Bây giờ chúng ta xét $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là một mặt định hướng với mê tríc Riemann ds^2. Cùng với hệ tọa độ địa phương đẳng nhiệt dương (u, v) chúng ta xét hàm phức liên kết $z = u + \sqrt{-1}v$. Theo mệnh đề 3.1.7, chúng ta có thể xem M như là một mặt Riemann. Khi đó mê-tríc ds^2 được cho bởi

$$ds^2 = \lambda_z^2(du^2 + dv^2),$$

ở đó ${\lambda_z}^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial x}{\partial v}\right)$.

Ta định nghĩa các vi phân phức

$$\frac{\partial x_i}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right), \frac{\partial x_i}{\partial \bar{z}} := \left(\overline{\frac{\partial x_i}{\partial z}}\right).$$

Thế thì

$$\begin{aligned}
{\lambda_z}^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} - \sqrt{-1}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} + \sqrt{-1}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial z}.\overline{\frac{\partial x_i}{\partial z}} \\
&= 2\left(\left|\frac{\partial x_1}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial x_2}{\partial z}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{\partial x_n}{\partial z}\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Hơn nữa ta có

$$|dz|^2 = dz.d\overline{z} = du^2 + dv^2.$$

Do đó chúng ta có thể biểu diễn

$$ds^2 = 2\left(\left|\frac{\partial x_1}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial x_2}{\partial z}\right|^2 + \cdots + \left|\frac{\partial x_n}{\partial z}\right|^2\right)\left|dz\right|^2. \ (3.1.1)$$

Ta định nghĩa toán tử Laplace $\Delta_z = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ trong hệ tọa độ phức địa phương $z = u+\sqrt{-1}v$. Nếu chúng ta chọn một hệ tọa độ địa phương phức khác ξ thì chúng ta có $\Delta_\xi = |dz/d\xi|^2\Delta_z$. Do $\lambda_\xi = \lambda_z|dz/d\xi|$ nên toán tử $\Delta = (1/\lambda_z^2)\Delta_z$ không phụ thuộc vào cách chọn tọa độ phức địa phương z. Toán tử này được gọi là toán tử Laplace-Bertrami.

Mệnh đề 3.1.8. *Ta luôn có*
(i) $\big(\Delta x, X\big) = 0$, *cho mỗi* $X \in T_p(M)$,
(ii) $\big(\Delta x, N\big) = 2H(N)$, *cho mỗi* $N \in N_p(M)$.

Chứng minh: Xem chi tiết trong [25, trang 9].

Định lý 3.1.9. *Cho* $x = (x_1, ..., x_n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *là một mặt nhúng trong* $\mathbb{R}^m.M$ *được xem như là một mặt Riemann. Khi đó* M *là mặt cực tiểu nếu và chỉ nếu mỗi* x_i *là một hàm điều hòa trên* M, *nghĩa là*

$$\Delta_z x_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)x_i = 0 \ (1 \leq i \leq n)$$

với mọi hệ tọa độ chỉnh hình địa phương $z = u + \sqrt{-1}v$.

Chứng minh:

Theo Mệnh đề 3.1.8(i), ta có $\Delta x = 0$ khi và chỉ khi Δx trực giao với không gian trực chuẩn của M. Điều này tương đương với $H = 0$ do Mệnh đề 3.1.8(ii), tức là M là mặt cực tiểu. Vậy M là mặt cực tiểu nếu và chỉ nếu mỗi x_i là một hàm điều hòa trên M.

Hệ quả 3.1.10. *Không tồn tại mặt cực tiểu compact không có bờ trong $\mathbb{R}^m$.*

Chứng minh:

Cho mặt cực tiểu M nhúng trong $\mathbb{R}^m$ và có bờ. Nếu M là mặt compact thì mỗi x_i đạt giá trị cực đại tại một điểm p nào đó thuộc M. Theo tiêu chuẩn cực đại của hàm điều hòa thì x_i là hàm hằng. Mà x là một nhúng nên suy ra vô lí. Vậy không tồn tại mặt cực tiểu compact không có bờ trong $\mathbb{R}^m$.

Cho $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là mặt cực tiểu nhúng trong $\mathbb{R}^m$.

Định nghĩa 3.1.11. *Một đường cong liên tục $\gamma(t)$ $(0 \leq t < 1)$ trong M được gọi là phân kì trong M nếu với mỗi tập compact K, tồn tại số dương t_0 (< 1) sao cho $\gamma(t) \notin K$ với mọi $t \geq t_0$.*

Định nghĩa 3.1.12. *Chúng ta định nghĩa khoảng cách $d(p)$ $(\leq +\infty)$ từ một điểm $p \in M$ tới biên của M như là giá trị lớn nhất của chặn dưới các độ dài của các đường cong liên tục phân kì trong M xuất phát từ p.*

Định nghĩa 3.1.13. *Một mặt cực tiểu M nhúng trong $\mathbb{R}^m$ được gọi là đầy nếu ảnh của mọi đường cong phân kì trong M vào $\mathbb{R}^m$ có độ dài vô tận (tức là, $d(p) = +\infty$ với mọi điểm $p \in M$).*

Mệnh đề 3.1.14. *Cho $d\sigma^2$ là một mê-tríc bảo giác phẳng trên một mặt Riemann mở M. Khi đó mọi điểm $p \in M$, có một vi phôi địa phương Φ từ một đĩa $\Delta_{R_0} := \{w; |w| < R_0\}$ $(0 < R_0 \leq \infty)$ lên một lân cận mở của p với $\Phi(0) = p$ sao cho Φ là một đẳng cự địa phương, tức là $\Phi^*(d\sigma^2)$ là mê-tríc chính tắc trên Δ_{R_0}, và có điểm a_0 với $|a_0| = 1$ sao cho ảnh Γ_{a_0}của đường cong $L_{a_0} : w := a_0 s$ $(0 \leq s < R)$ qua Φ là đường phân kì trong M.*

Chứng minh: Xem chi tiết [25, trang 36].

3.2 Ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^m$

Cho $x := (x_1, \cdots, x_m) : M \to \mathbb{R}^m$ là một mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^m$.

Chúng ta gọi Π là tập tất cả các phẳng hai chiều chứa gốc trong $\mathbb{R}^m$.

Để miêu tả rõ hơn về tập Π, chúng ta sẽ xem nó như là một tập con của không gian xạ ảnh phức m-1 chiều $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ như sau. Với mỗi $P \in \Pi$, ta lấy một cơ sở định hướng dương $\{X, Y\}$ của P như sau

$$\mid X \mid = \mid Y \mid, (X, Y) = 0. \ (3.2.1)$$

Kí hiệu điểm $\phi(P) = \pi(X - \sqrt{-1}Y)$ với π là phép chiếu chính tắc từ $\mathbb{C}^m - \{0\}$ lên trên $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$. Cụ thể, π biến mỗi điểm $p = (w_1, \cdots, w_m) \neq (0, \cdots, 0)$ thành lớp tương đương

$$(w_1 : \cdots : w_m) := \{(cw_1, \cdots, cw_m); c \in \mathbb{C} - \{0\}\}.$$

Nếu ta chọn một cơ sở khác $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ của P thỏa mãn điều kiện (3.2.1) thì ta có thể tìm được một số thực θ sao cho

$$\tilde{X} = r(cos\theta \cdot X + sin\theta \cdot Y),$$
$$\tilde{Y} = r(-sin\theta \cdot X + cos\theta \cdot Y),$$

ở đó $r := \dfrac{\mid \tilde{X} \mid}{\mid X \mid}$. Khi đó ta có

$$\tilde{X} - \sqrt{-1}\tilde{Y} = re^{\sqrt{-1}\theta}(X - \sqrt{-1}Y).$$

Điều này chỉ ra rằng giá trị của $\phi(P)$ không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở dương của P thỏa mãn (3.2.1) nhưng phụ thuộc vào P. Mặt khác, từ (3.2.1) suy ra

$$|X| = |Y| \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} X_j^2 = \sum_{j=1}^{m} Y_j^2; (X, Y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} X_j Y_j = 0,$$

và từ cách xác định $\phi(P)$ ta có

$$w_1^2 + \cdots + w_m^2 = \sum_{j=1}^{m}(X_j + \sqrt{-1}Y_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}(X_j^2 - Y_j^2) = 0.$$

Do đó $\phi(P)$ chứa trong

$$Q_{m-2}(\mathbb{C}) := \{(w_1 : \cdots : w_m) | w_1^2 + \cdots + w_m^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}).$$

Chúng ta cũng có thể chỉ ra rằng ϕ là song ánh và ta sẽ đồng nhất Π với $Q_{m-2}(\mathbb{C})$.

Chúng ta xét mặt $x := (x_1, \cdots, x_m) : M \to \mathbb{R}^m$ nhúng trong $\mathbb{R}^m$. Với mỗi điểm $P \in M$, mặt định hướng $T_p(M)$ được đồng nhất chính tắc với mỗi phần tử của Π sau một phép tịnh tiến điểm p về gốc tọa độ.

Định nghĩa 3.2.1. *Ánh xạ Gauss (ánh xạ Gauss mở rộng) của mặt M được định nghĩa là ánh xạ biến mỗi điểm $p \in M$ thành $\phi(T_p(M))$ trong $Q_{m-2}(\mathbb{C})$.*

Ta xét một hệ tọa độ địa phương đẳng nhiệt được định hướng dương (u, v). Các véc tơ $X = \dfrac{\partial x}{\partial u}, Y = \dfrac{\partial x}{\partial v}$ cho ta một cơ sở định hướng dương của $T_p(M)$ thỏa mãn điều kiện (3.2). Do đó, ánh xạ Gauss của M có công thức biểu diễn địa phương là

$$G(p) = \pi(X - \sqrt{-1}Y) = (\frac{\partial x_1}{\partial z}(p) : \cdots : \frac{\partial x_m}{\partial z}(p)),$$

ở đó $z = u + \sqrt{-1}v$. Ta viết $G = (\omega_1 : \cdots : \omega_m)$ với định nghĩa toàn cục của các dạng chỉnh hình $\omega_i := dx_i \equiv \dfrac{\partial x_i}{\partial z} dz \quad (1 \leq i \leq m)$.

Mệnh đề 3.2.2. *(Fujimoto [25]) Một mặt $x : M \to \mathbb{R}^m$ là mặt cực tiểu nếu và chỉ nếu ánh xạ Gauss $G : M \to \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ là chỉnh hình.*

Chúng ta nói rằng một dạng chỉnh hình ω trên mặt Riemann M không có chu kì thực nếu

$$Re \int_\gamma \omega = 0$$

cho mọi đường cong đóng trong M. Nếu ω không có chu kì thực thì đại lượng

$$x(z) = Re \int_{\gamma_{z_0}^z} \omega$$

chỉ phụ thuộc vào z và z_0 cho mọi đường cong trơn từng khúc $\gamma_{z_0}^z$ trong M nối z_0 và z. Khi đó x là một hàm được định nghĩa tốt theo biến z trên M. Từ giờ ta sẽ kí hiệu nó là

$$x(z) = Re \int_{z_0}^z \omega.$$

Liên quan đến Mệnh đề 3.2.2, chúng ta chỉ ra một cách xây dựng mặt cực tiểu bởi định lý sau.

Định lý 3.2.3. *Cho M là một mặt Riemann mở và $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$ là các dạng chỉnh hình trên Msao cho chúng không có không điểm chung, không chu kì thực và thỏa mãn* *(về địa phương) đồng nhất thức*

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = 0$$

cho các hàm chỉnh hình f_i với $\omega_i = f_i dz$. Đặt

$$x_i = 2Re \int_{z_0}^{z} \omega_i,$$

với điểm cố định bất kì z_0 trong M. Thế thì, mặt $x = (x_1, ..., x_m) : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ là mặt cực tiểu nhúng trong $\mathbb{R}^m$ thỏa mãn rằng ánh xạ Gauss là ánh xạ $G = (\omega_1 : \cdots : \omega_m) : M \longrightarrow \mathbb{Q}_{m-2}(\mathbb{C})$ và mê-tríc hạn chế được cho bởi công thức

$$ds^2 = 2(|\omega_1|^2 + \cdots + |\omega_m|^2). \quad (3.2.2)$$

Chứng minh: Xem chi tiết trong [25, trang 13].

Định nghĩa 3.2.4. *Cho M là một mặt Riemann với mê-tríc ds^2. Mê-tríc đó được gọi là bảo giác nếu nó có thể biểu diễn dưới dạng*

$$ds^2 = \lambda_z^2 |dz|^2$$

với một C^∞ hàm nhận giá trị thực dương λ_z trong hệ tọa độ địa phương z.

Định nghĩa 3.2.5. *Với mỗi điểm $p \in M$, chúng ta định nghĩa độ cong Gauss của M tại p bởi công thức*

$$K \equiv K_{ds^2} := -\Delta \log \lambda_z \left(= -\frac{\Delta_z \log \lambda_z}{\lambda_z^2} \right).$$

Cho một mặt cực tiểu M nhúng trong $\mathbb{R}^m$, sử dụng (3.1), chúng ta chỉ ra rằng

$$K \equiv K_{ds^2} = -4\frac{|\tilde{g} \wedge \tilde{g}'|^2}{|\tilde{g}|^6} = -4\frac{\sum_{j<k} |g_j g_k' - g_k g_j'|^2}{(\sum_{j=1}^m |g_j|^2)^3} \quad (3.2.3)$$

ở đó $\tilde{g} = (g_1, ..., g_m), g_j = \frac{\partial x_j}{\partial z}, 1 \leq j \leq m.$

Điều này chỉ ra rằng độ cong của mặt cực tiểu luôn không dương.

Nếu một mặt cực tiểu là phẳng (tức là độ cong Gauss suy biến mọi nơi) thì (3.2.3) chỉ ra rằng g_i/g_{i_0} là hàm hằng $(1 \leq i \leq n)$ đối với chỉ số i_0 nào đó mà $g_{i_0} \not\equiv 0$. Do đó ánh xạ Gauss g là ánh xạ hằng.

Mệnh đề 3.2.6. *(Fujimoto [25]) Cho mặt cực tiểu M nhúng trong $\mathbb{R}^m$. Khi đó M là phẳng, hay tương đương với ánh xạ Gauss của M là ánh xạ hằng, nếu và chỉ nếu nó nằm trong một mặt phẳng.*

Chứng minh. Khi M nằm trong mặt phẳng thì dễ dàng nhận thấy ánh xạ Gauss của nó là ánh xạ hằng.

Ngược lại, nếu ánh xạ Gauss của mặt M là hằng thì mọi mặt phẳng tiếp xúc $T_p(M)$ của M tại điểm p trực giao với $(m-2)$-phẳng sinh bởi $m-2$ véc tơ độc lập tuyến tính cố định $N_1, ..., N_{m-2}$. Khi đó ta có

$$(\frac{\partial x}{\partial u}, N_k) = (\frac{\partial x}{\partial v}, N_k) = 0 \ (1 \leq k \leq m-2)$$

đúng cho mọi tọa độ địa phương (u, v). Do đó (x, N_k) là hằng cho mọi $k = 1, 2, ..., m-2$ và vì thế M thuộc mặt phẳng trực giao với $(m-2)$-phẳng $< N_1, ..., N_{m-2} >$. □

Chúng ta giới thiệu ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu trong $\mathbb{R}^3$.

Định nghĩa 3.2.7. *Cho mặt cực tiểu M nhúng trong $\mathbb{R}^3$. Ánh xạ Gauss cổ điển $g : M \to \overline{\mathbb{C}}$ của M được định nghĩa là ánh xạ biến mỗi điểm $p \in M$ thành điểm thuộc $S^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$.*

Nhận xét: Người ta chỉ được rằng $Q_1(\mathbb{C})$ song chỉnh hình với $\overline{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (xem trong [25, trang 17-18]).

Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{R}^3$ là một mặt cực tiểu không phẳng và $G : M \to \mathbb{Q}_1(\mathbb{C})$ là ánh xạ Gauss của nó. Đặt $f_i := \partial x_i / \partial z$ $(i = 1, 2, 3)$. Thế thì $G = (f_1 : f_2 : f_3)$ và ánh xạ $g : M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ được cho bởi công thức

$$g = \frac{f_3}{f_1 - \sqrt{-1} f_2},$$

chính là ánh xạ Gauss cổ điển của M. Do vậy trong trường hợp $\mathbb{R}^3$ ta có thể đồng nhất ánh xạ Gauss và ánh xạ Gauss cổ điển.

Như một hệ quả của Mệnh đề 3.2.2 ta có

Mệnh đề 3.2.8. *Cho một mặt M nhúng trong $\mathbb{R}^3$. Khi đó M là mặt cực tiểu khi và chỉ khi ánh xạ Gauss cổ điển của nó là ánh xạ phân hình trên M.*

3.3 Tính rẽ nhánh của hàm phân hình

Cho f là ánh xạ phân hình khác hằng từ đĩa $\Delta_R := \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ vào $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ở đó $0 < R < \infty$. Lấy một biểu diễn rút gọn của ánh xạ $f = (f_0 : f_1)$ trên Δ_R và định nghĩa

$$||f|| := (|f_0|^2 + |f_1|^2)^{1/2}, W(f_0, f_1) := f_0 f_1' - f_1 f_0'.$$

Gọi $a^j (1 \leq j \leq q)$ là q điểm phân biệt trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a^j = (a_0^j : a_1^j)$ với $|a_0^j|^2 + |a_1^j|^2 = 1 (1 \leq j \leq q)$. Đặt

$$F_j := a_0^j f_1 - a_1^j f_0 \ (1 \leq j \leq q).$$

Định nghĩa 3.3.1. *Chúng ta nói rằng hàm phân hình f rẽ nhánh tại điểm $a = (a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ với bội nhỏ nhất là e nếu tất cả các không điểm của hàm $F := a_0 f_1 - a_1 f_0$ có bậc lớn hơn hoặc bằng e. Nếu ảnh của f bỏ qua điểm a, chúng ta nói rằng f là rẽ nhánh tại a với bội ∞.*

Mệnh đề 3.3.2. *(Fujimoto [19]) Với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại hằng số dương C_1 và μ chỉ phụ thuộc vào $a^1, \cdots, a^q$ và ϵ tương ứng sao cho*

$$\Delta \log \left(\frac{||f||^{\epsilon}}{\Pi_{j=1}^q \log(\mu ||f||^2 / |F_j|^2)} \right) \geq \frac{C_1 ||f||^{2q-4} |W(f_0, f_1)|^2}{\Pi_{j=1}^q |F_j|^2 \log^2(\mu ||f||^2 / |F_j|^2)}$$

Bổ đề 3.3.3. *Giả sử $q - 2 - \sum_{j=1}^q \frac{1}{m_j} > 0$ và f rẽ nhánh tại a^j với bội nhỏ nhất là m_j với mọi $1 \leq j \leq q$. Khi đó tồn tại các hằng số dương C và μ (> 1) chỉ phụ thuộc vào a^j và m_j $(1 \leq j \leq q)$ thỏa mãn rằng nếu ta đặt*

$$v := \frac{C ||f||^{q-2-\sum_{j=1}^q \frac{1}{m_j}} |W(f_0, f_1)|}{\Pi_{j=1}^q |F_j|^{1-\frac{1}{m_j}} \log(\mu ||f||^2 / |F_j|^2)}$$

trên $\Delta_R - A$ và $v := 0$ trên $\Delta_R \cap A$ với $A := \{z \in \Delta_R; \Pi_{j=1}^q F_j(z) = 0\}$, thì v liên tục trên Δ_R và thỏa mãn điều kiện $\Delta \log v \geq v^2$ theo nghĩa phân bố.

Chứng minh. Ta dễ dàng nhận thấy v là hàm liên tục trên $\Delta_R - A$. Xét điểm $\xi \in A$. Thế thì tồn tại i với $F_i(\xi) = 0$. Do $a^i \neq a^j$ với mọi $j \neq i$ nên $F_j(\xi) \neq 0$ với mọi $j \neq i$. Vì $|f_0(\xi)| + |f_1(\xi)| \neq 0$ nên thay đổi chỉ số nếu cần thiết ta có thể giả sử rằng $f_0(\xi) \neq 0$ trong biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : f_1)$. Đặt $\psi_i := \dfrac{W(f_0, f_1)}{F_i}$. Ta có

$$\psi_i := \frac{W(f_0, f_1)}{F_i} = -\frac{f_0}{a_0^i} \cdot \frac{(\frac{f_1}{f_0})'}{\frac{f_1}{f_0} - \frac{a_i^1}{a_0^i}} = -\frac{f_0}{a_0^i} \cdot \frac{(\frac{f_1}{f_0} - \frac{a_1^i}{a_0^i})'}{\frac{f_1}{f_0} - \frac{a_1^i}{a_0^i}}.$$

Thế thì ψ_i có cực bậc một tại ξ. Do đó ta có

$$\begin{aligned}\nu_{v\Pi_{j=1}^q \log(\mu||f||^2/|F_j|^2)}(z_0) &= \nu_{\frac{W}{F_j}}(z_0) + \frac{1}{m_j}\nu_{F_j}(z_0)\\ &\geq \frac{\nu_{F_i}(z_0)}{m_i} - 1 \geq 0.\end{aligned}$$

Vậy $v\Pi_{j=1}^q \log(\mu||f||^2/|F_j|^2)$ bị chặn trong một lân cận của ξ. Do đó $\lim_{z\to\xi} v(z) = 0$. Suy ra v liên tục tại ξ và ta có v liên tục trên Δ_R.

Bây giờ ta chọn các hằng số C và μ sao cho C^2 và μ thỏa mãn bất đẳng thức trong Mệnh đề 3.3.2 cho trường hợp $\epsilon = q - 2 - \sum_{j=1}^q \frac{1}{m_j}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\Delta \log v &\geq \Delta \log \frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^q \frac{1}{m_j}}}{\Pi_{j=1}^q \log(\mu||f||^2/|F_j|^2)}\\ &\geq C^2 \frac{||f||^{2q-4}|W(f_0,f_1)|^2}{\Pi_{j=1}^q |F_j|^2 \log^2(\mu||f||^2/|F_j|^2)}\\ &\geq C^2 \frac{||f||^{2q-4-2\sum_{j=1}^q \frac{1}{m_j}}|W(f_0,f_1)|^2}{\Pi_{j=1}^q |F_j|^{2-\frac{2}{m_j}} \log^2(\mu||f||^2/|F_j|^2)}\\ &= v^2 \text{ (by } |F_j| \leq ||f|| (1 \leq j \leq q)).\end{aligned}$$

Bổ đề 3.3.3 được chứng minh. □

Bổ đề 3.3.4. *(Bổ đề Schwarz mở rộng [1]) Cho v là một hàm điều hòa dưới liên tục nhận giá trị thực không âm trên Δ_R. Nếu v thỏa mãn bất đẳng thức $\Delta \log v \geq v^2$ theo nghĩa phân bố thì*

$$v(z) \leq \frac{2R}{R^2 - |z|^2}.$$

Chứng minh. Đặt $\lambda_r(z) = \dfrac{2r}{r^2 - |z|^2}$. Thế thì $\lambda_r(z)$ là hàm liên tục theo biến r. Do đó bất đẳng thức cần chứng minh sẽ đúng nếu chúng ta chỉ ra rằng

$$\eta_r(z) := \frac{v(z)}{\lambda_r(z)} \leq 1$$

với mọi $z \in \Delta_r$ và với mọi $r < R$. Do $\lim_{z\to\partial\Delta_r} \eta_r(z) = 0$ nên tồn tại điểm $z_0 \in \Delta_r$ sao cho $\eta_r(z_0) = \max_{\overline{\Delta}_r}\{\eta_r(z)\}$. Giả sử $\eta_r(z_0) > 1$. Thế thì tồn tại lân cận mở U của z_0 sao cho $\eta_r(z) > 1$ và do đó $v(z) > \lambda(z)$ với mọi z thuộc U. Ta dễ dàng tính được rằng $\Delta \log \lambda_r(z) = \lambda_r^2(z)$. Vì thế, từ giả thiết ta có

$$\Delta \log \eta_r(z) = \Delta \log v(z) - \Delta \log \lambda_r(z) \geq v^2(z) - \lambda_r^2(z) > 0$$

theo nghĩa phân bố trên U. Do đó $\eta_r(z)$ là hàm điều hòa dưới trên U. Mặt khác, nó đạt cực đại tại z_0 nên η_r là hàm hằng trên U. Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức trên. Vậy $\eta_r(z_0) \leq 1$ hay ta có điều cần chứng minh. □

Bổ đề 3.3.5. *Cho số dương δ thỏa mãn $q - 2 - \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{m_j} > q\delta > 0$ và f rẽ nhánh tại các điểm a^j với bội nhỏ nhất là m_j với mỗi $1 \leq j \leq q$. Khi đó, tồn tại hằng số dương C_0 sao cho*

$$\frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}-q\delta}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}-\delta}} \leq C_0\frac{2R}{R^2-|z|^2}.$$

Chứng minh. Sử dụng Bổ đề 3.3.3, vế trái của bất đẳng thức bằng trên bằng 0 nên bất đẳng thức đúng trên tập các điểm thỏa mãn $\{F_1 ... F_q = 0\}$ với mọi số dương C_0.
Nếu $z \notin \{F_1 ... F_q = 0\}$ thì theo Bổ đề 3.3.3 và Bổ đề 3.3.4 ta có

$$\frac{C||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}}\log(\mu||f||^2/|F_j|^2)} \leq \frac{2R}{R^2-|z|^2}, \quad (3.3.1)$$

ở đó C và μ là các hằng số được cho như trong Bổ đề 3.3.3.
Mặt khác, cho một số dương δ. Do $\lim_{x\to 0^+} x^\delta \log(\mu/x^2) = 0$ nên tồn tại $\sup_{0<x\leq 1} x^\delta \log(\mu/x^2) (< +\infty)$. Ta đặt

$$\overline{C} := \sup_{0<x\leq 1} x^\delta \log(\mu/x^2) (< +\infty). \quad (3.3.2)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}-q\delta}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}-\delta}} \\
&= \frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}}}\prod_{j=1}^{q}\left(\frac{|F_j|}{||f||}\right)^\delta \\
&= \frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}}\log(\mu||f||^2/|F_j|^2)}\prod_{j=1}^{q}(\frac{|F_j|}{||f||})^\delta\log(\mu||f||^2/|F_j|^2).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}-q\delta}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}-\delta}}\\
&\le \frac{\overline{C}^q||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}}\log(\mu||f||^2/|F_j|^2)}\\
&\le \frac{\overline{C}^q}{C}\frac{2R}{R^2-|z|^2}.
\end{aligned}$$

Vậy Bổ đề 3.3.5 được chứng minh. □

Bằng cách sử dụng Bổ đề 3.3.5, chúng ta có thể đưa ra một chứng minh trực tiếp cho kết quả về mối quan hệ số khuyết trong lý thuyết Nevanlinna cổ điển. Kết quả này ta cũng sẽ dùng cho chứng minh kết quả chính trong mục sau.

Mệnh đề 3.3.6. *Giả sử $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là ánh xạ chỉnh hình. Cho các điểm phân biệt $a^1,...,a^q\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ và f rẽ nhánh tại a^j với bội nhỏ nhất là m_j với mọi $1\le j\le q$ sao cho*

$$\sum_{j=1}^{q}(1-\frac{1}{m_j})>2.$$

Thế thì f là hàm hằng.

Chứng minh. Giả sử f không là ánh xạ hằng. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $F_j(0)\ne 0$ $(1\le j\le q)$ và $W(f_0,f_1)(0)\ne 0$, ở đó $f=(f_0:f_1)$ là biểu diễn rút gọn của f. Theo giả thiết, với mỗi $R>0$, tồn tại δ thỏa mãn $\sum_{j=1}^{q}(1-\dfrac{1}{m_j})-2>q\delta>0$. Áp dụng Bổ đề 3.3.5, với mỗi $R>0, f|_{\Delta_R}:\Delta_R\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ và δ, tồn tại các hằng số dương C_0 chỉ phụ thuộc vào a^j và η_j $(1\le j\le q)$ sao cho

$$\frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}-q\delta}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}-\delta}}\le C_0\frac{2R}{R^2-|z|^2}.$$

Thay $z=0$ vào bất phương trình trên chúng ta suy ra R bị chặn trên bởi hằng số chỉ phụ thuộc vào $a^j,u_j(0),f(0),F_j(0)$ và $W(f_0,f_1)(0)$. Điều này vô lí. Vậy Mệnh đề 3.3.6 được chứng minh. □

3.4 Tính rẽ nhánh của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu

Định nghĩa 3.4.1. *Chúng ta nói rằng ánh xạ g từ mặt Riemann mở A vào $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ là rẽ nhánh đối với siêu phẳng $H = \{(w_0 : \cdots : w_{m-1}) \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}) : a_0w_0 + ... + a_{m-1}w_{m-1} = 0\}$ với bội nhỏ nhất là e nếu tất cả các không điểm của hàm $(g, H) := a_0g_0 + ... + a_{m-1}g_{m-1}$ có bậc lớn hơn hoặc bằng e, ở đó $g = (g_0 : ... : g_{m-1})$ là biểu diễn rút gọn của g. Nếu ảnh của g bỏ qua H, chúng ta sẽ nói g rẽ nhánh đối với H với bội ∞.*

Định lý 3.4.2. *(Ru [52]) Cho mặt cực tiểu đầy M nhúng trong $\mathbb{R}^m$ và giả sử rằng ánh xạ Gauss g của M là k-không suy biến (tức là $g(M)$ được chứa trong không gian con tuyến tính chiều k của $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ nhưng không thuộc không gian chiều nhỏ hơn) và $1 \leq k \leq m-1$. Giả sử $\{H_j\}_{j=1}^q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$. Nếu g rẽ nhánh đối với H_i với bội nhỏ nhất là m_i với mỗi i và*

$$\sum_{j=1}^{q}(1 - \frac{k}{m_j}) > (k+1)(m - \frac{k}{2} - 1) + m$$

thì M phẳng hay g là ánh xạ hằng.

Trong trường hợp $m = 3$, ta viết lại kết quả trên như sau.

Định lý 3.4.3. *(Ru [52]) Cho M là một mặt cực tiểu đầy không phẳng trong $\mathbb{R}^3$. Nếu có q $(q > 4)$ điểm phân biệt $a^1, ..., a^q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sao cho ánh xạ Gauss của M rẽ nhánh tại a^j với bội nhỏ nhất là m_j với mỗi j thì $\sum_{j=1}^q(1 - \frac{1}{m_j}) \leq 4$.*

Hệ quả 3.4.4. *Ánh xạ Gauss g nhận mọi giá trị trên mặt cầu đơn vị trừ bỏ đi nhiều nhất là 4 điểm.*

Định lý 3.4.5. *(Kao [38]) Ánh xạ Gauss g trên tập dạng vành khuyên của mặt cực tiểu đầy trong $\mathbb{R}^3$ nhận mọi giá trị trên mặt cầu đơn vị trừ bỏ đi nhiều nhất là 4 điểm.*

Định lý 3.4.6. *(Dethloff-Hà [9]) Cho M là một mặt cực tiểu đầy nhúng trong $\mathbb{R}^3$ và A là một tập con dạng vành khuyên của M, tức là A bảo giác với miền $\{z |\ 0 < 1/r < |z| < r\}$, ở đó z là tọa độ bảo giác. Giả sử tồn tại q $(q > 4)$ điểm phân biệt $a^1, ..., a^q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sao cho ánh xạ Gauss của M rẽ nhánh đối với a^j với bội lớn hơn hoặc bằng m_j với mỗi j trên A. Khi đó ta có $\sum_{j=1}^q(1 - \frac{1}{m_j}) \leq 4$.*

Chứng minh. Xét $x = (x_1, x_2, x_3) : M \to \mathbb{R}^3$ là mặt cực tiểu đầy không phẳng và $g : M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là ánh xạ Gauss của nó. Giả sử A là tập con dạng vành khuyên của M. Không mất tính tổng quát ta có thể coi $A = \{z|\ 0 < 1/r \leq |z| < r < \infty\}$, ở đó z là tọa độ bảo giác. Đặt $\phi_i := \partial x_i/\partial z$ $(i = 1, 2, 3)$ và $\phi := \phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2$. Thế thì ánh xạ Gauss $g : M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ được cho bởi công thức

$$g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2}$$

và mê-tríc trên M được hạn chế từ $\mathbb{R}^3$ cho bởi công thức

$$ds^2 = |\phi|^2(1 + |g|^2)^2|z|^2 \text{ (Fujimoto [25]).}$$

Gọi biểu diễn rút gọn của của g là $g = (g_0 : g_1)$ trên M và đặt $||g|| = (|g_0|^2 + |g_1|^2)^{1/2}$. Khi đó ta viết lại mê-tríc $ds^2 = |h|^2||g||^4|dz|^2$, với $h := \phi/g_0^2$.

Bây giờ ta xét q điểm phân biệt $a^1, ..., a^q$ trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Giả sử g khác hằng và g rẽ nhánh tại các điểm a^j với bội ít nhất là m_j với mọi $1 \leq j \leq q$ trên A và

$$\sum_{j=1}^{q}(1 - \frac{1}{m_j}) > 4.$$

Chúng tôi chú ý rằng ta có thể giả sử rằng $m_j > 1$ với mọi $j = 1, ..., q$.

Do giả thiết trên nên ta có thể chọn $\delta > 0$ sao cho

$$\frac{q - 4 - \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}}{q} > \delta > \frac{q - 4 - \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j}}{q + 2}.$$

Đặt $p = 2/(q - 2 - \sum_{j=1}^{q}\frac{1}{m_j} - q\delta)$. Thế thì ta có

$$0 < p < 1,\ \frac{p}{1-p} > \frac{\delta p}{1-p} > 1 \text{ (3.4.1).}$$

Xét tập con mở

$$A_1 = Int(A) - \{z|W(g_0, g_1)(z).W(g_0, g_1)(1/z) = 0\}$$

của A và ta định nghĩa một mê-tríc mới

$$d\tau^2 = |h|^{\frac{2}{1-p}}\left(\frac{\Pi_{j=1}^{q}|G_j|^{1-\frac{1}{m_j}-\delta}}{|W(g_0, g_1)|}\right)^{\frac{2p}{1-p}}|dz|^2 \text{ (3.4.2)}$$

trên A_1, ở đó $G_j := a_0^j g_1 - a_1^j g_0$.

Ta dễ thấy $d\tau$ là phẳng. Ta cũng nhận thấy $d\tau$ liên tục trên A_1. Thật vậy

Với mỗi $z_0 \in A_1$, nếu $G_j(z_0) \neq 0$ với mọi $j = 1, ..., q$ thế thì $d\tau$ liên tục tại z_0.
Bây giờ giả sử $z_0 \in A_1$ sao cho có chỉ số j nào đó để $G_j(z_0) = 0$. Khi đó do các a^i phân biệt nên $G_i(z_0) \neq 0$ với mọi $i \neq j$ và ta cũng có $\nu_{G_j}(z_0) \geq m_j$. Thay đổi chỉ số nếu cần thiết ta có thể giả sử rằng $g_0(z_0) \neq 0$ thế thì $a_0^j \neq 0$. Vậy ta có

$$\nu_{W(g_0,g_1)}(z_0) = \nu_{\frac{(a_0^j \frac{g_1}{g_0} - a_1^j)'}{a_0^j}}(z_0) = \nu_{\frac{(G_j/g_0)'}{a_0^j}}(z_0) = \nu_{G_j}(z_0) - 1.$$

Điều này mâu thuẫn với $z_0 \in A_1$. Do đó $d\tau$ liên tục trên A_1.

Bây giờ ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3.4.7. *$d\tau^2$ là đầy trên tập $\{z||z| = r\} \cup \{z|W(g_0, g_1)(z)\}$, tức là tập $\{z||z| = r\} \cup \{z|W(g_0, g_1)(z) = 0\}$ có khoảng cách vô hạn từ một điểm trong bất kì của A_1.*

Thật vậy, nếu $W(g_0, g_1)(z_0) = 0$, thế thì ta có hai trường hợp.
Trường hợp 1. $G_j(z_0) = 0$ với một chỉ số $j \in \{1, 2, ..., q\}$.
Khi đó do các a^i phân biệt $G_i(z_0) \neq 0$ với mọi $i \neq j$ và $\nu_{G_j}(z_0) \geq m_j$. Lặp lại các lý luận ở trên ta có

$$\nu_{W(g_0,g_1)}(z_0) = \nu_{G_j}(z_0) - 1.$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned}
\nu_{d\tau}(z_0) &= \frac{p}{1-p}((1 - \frac{1}{m_j} - \delta)\nu_{G_j}(z_0) - \nu_{W(g_0,g_1)}(z_0)) \\
&= \frac{p}{1-p}(1 - (\frac{1}{m_j} - \delta)\nu_{G_j}(z_0)) \\
&\leq -\frac{\delta p}{1-p}.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $G_j(z_0) \neq 0$ với mọi chỉ số $1 \leq j \leq q$.
Khi đó ta có $\nu_{d\tau}(z_0) \leq -\dfrac{p}{1-p}$.
Kết hợp với (3.4.1), chúng ta có thể tìm được hằng số dương C sao cho

$$|d\tau| \geq \frac{C}{|z - z_0|^{\delta p/(1-p)}}|dz|$$

trong một lân cận của z_0 và do đó $d\tau$ đầy trên $\{z|W(g_0, g_1)(z) = 0\}$.

Bây giờ giả sử $d\tau$ không đầy trên tập $\{z||z| = r\}$. Thế thì có đường cong $\gamma : [0, 1) \to A_1$ với $\gamma(1) \in \{z||z| = r\}$ sao cho $|\gamma| < \infty$. Do ta có thể cho $\gamma(0)$

tiến gần ra biên nên ta có thể giả sử $dist(\gamma(0);\{z||z|=1/r\}) > 2|\gamma|$. Xét một đĩa nhỏ Δ với tâm là $\gamma(0)$. Do $d\tau$ phẳng nên Δ đẳng cự tới một đĩa có tâm trùng với gốc trong mặt phẳng phức. Gọi $\Phi : \{|w| < \eta\} \to \Delta$ là đẳng cự. Mở rộng Φ như là ánh xạ đẳng cự địa phương vào trong A_1 tới đĩa lớn nhất $\{|w| < R\} = \Delta_R$. Thế thì $R \leq |\gamma|$ vì Φ không thể mở rộng tới một đĩa mà ảnh nằm ngoài biên $\{z||z| = r\}$ của A_1. Vậy tồn tại điểm w_0 với $|w_0| = R$ sao cho $\Phi(\overline{0, w_0}) = \Gamma_0$ là đường cong phân kì trên A.

Dễ thấy $\Phi(w)$ là song chỉnh hình địa phương và mê-tríc trên Δ_R hạn chế từ ds^2 thông qua Φ được cho bởi công thức

$$\Phi^* ds^2 = |h_o\Phi|^2||g_o\Phi||^4|\frac{dz}{dw}|^2|dw|^2 \text{ (3.4.3)}.$$

Mặt khác, do Φ là đẳng cự nên ta có

$$|dw| = |d\tau| = \left(\frac{|h|\Pi_{j=1}^q|G_j|^{(1-\frac{1}{m_j}-\delta)p}}{|W(g_0,g_1)|^p}\right)^{\frac{1}{1-p}}|dz|$$

$$\Rightarrow |\frac{dw}{dz}|^{1-p} = \frac{|h|\Pi_{j=1}^q|G_j|^{(1-\frac{1}{m_j}-\delta)p}}{|W(g_0,g_1)|^p}.$$

Kí hiệu $f := g(\Phi), f_0 := g_0(\Phi), f_1 := g_1(\Phi)$ và $F_j := G_j(\Phi)$. Bằng tính toán trực tiếp ta có

$$W(f_0,f_1) = (W(g_0,g_1)_o\Phi)\frac{dz}{dw}.$$

Suy ra

$$|\frac{dz}{dw}| = \frac{|W(f_0,f_1)|^p}{|h(\Phi)|\Pi_{j=1}^q|F_j|^{(1-\frac{1}{m_j}-\delta)p}} \text{ (3.4.4)}.$$

Kết hợp (3.4.3) và (3.4.4), ta có

$$\begin{aligned}\Phi^* ds^2 &= \left(\frac{||f||^2|W(f_0,f_1)|^p}{\Pi_{j=1}^q|F_j|^{(1-\frac{1}{m_j}-\delta)p}}\right)^2|dw|^2\\ &= \left(\frac{||f||^{q-2-\sum_{j=1}^q\frac{1}{m_j}-q\delta}|W(f_0,f_1)|}{\Pi_{j=1}^q|F_j|^{1-\frac{1}{m_j}-\delta}}\right)^{2p}|dw|^2.\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 3.3.5, ta suy ra

$$\Phi^* ds^2 \leqslant C_0^{2p}.(\frac{2R}{R^2-|w|^2})^{2p}|dw|^2.$$

Lại do $0 < p < 1$ nên ta có

$$d_{\Gamma_0} \leqslant \int_{\Gamma_0} ds = \int_{\overline{0,w_0}} \Phi^* ds \leqslant C_0^p.\int_0^R (\frac{2R}{R^2-|w|^2})^p|dw| < +\infty,$$

ở đó d_{Γ_0} là khoảng cách của đường cong phân kì Γ_0 trong M. Điều này mâu thuẫn với tính đầy của mặt M. Bổ đề 3.4.7 được chứng minh.

Bây giờ chúng ta định nghĩa

$$\begin{aligned} d\tilde{\tau}^2 &= \left(|h(z)h(\frac{1}{z})|.\frac{\Pi_{j=1}^q |G_j(z)G_j(\frac{1}{z})|^{(1-\frac{1}{m_j}-\delta)p}}{|W(g_0,g_1)(z)W(g_0,g_1)(\frac{1}{z})|^p}\right)^{\frac{2}{1-p}} |dz|^2 \\ &= \lambda^2(z)|dz|^2 \end{aligned}$$

trên A_1. Thế thì $d\tilde{\tau}^2$ là đầy và phẳng trên A_1 theo Bổ đề 3.4.7. Đặt $u(z) = \log\lambda(z)$. Ta có $u(z)$ là hàm điều hòa trên A_1. Gọi D là phủ phổ dụng của A_1. Trong một lân cận của một điểm bất kì trong D, ta có thể chọn một hàm giải tích $k(z)$ sao cho phần thực của nó là $u(z)$ và ánh xạ

$$w(z) = \int e^{k(z)} dz$$

thỏa mãn

$$|\frac{dw}{dz}| = |e^{k(z)}| = e^{u(z)} = \lambda \ (3.4.5).$$

Do đó độ dài của bất kì đường cong trên D theo mê-tríc $d\tilde{\tau}$ thì bằng độ dài của ảnh của nó trong w-phẳng. Do tính đơn liên của Dnên có một ánh xạ trên toàn D vào w-phẳng thỏa mãn (3.4.5). Lại do tính đầy của D, ánh xạ này phải là ánh xạ 1-1 từ D lên w-phẳng. Do đó D là bảo giác với mặt phẳng phức. Điều này mâu thuẫn với Mệnh đề 3.3.6. Định lý 3.4.6 được chứng minh . □

Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) : M \to \mathbb{R}^4$ là một mặt cực tiểu đầy không phẳng trong $\mathbb{R}^4$ và $Q_2(\mathbb{C}) := \{(w_1 : ... : w_4) | w_1^2 + ... + w_4^2 = 0\} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Theo định nghĩa thì ánh xạ Gauss của M là $g : M \to Q_2(\mathbb{C})$. Chúng ta có thể chỉ ra rằng $Q_2(\mathbb{C})$ là song chỉnh hình với $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Do đó chúng ta có thể đồng nhất g như là một cặp ánh xạ $g = (g^1, g^2)$ trên $M(g^l : M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Thật vậy, đặt $\phi_i := \partial x_i/dz$ với $i = 1, ..., 4$. Khi đó ta có thể tính g^1 và g^2 như sau

$$g^1 = \frac{\phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4}{\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2}, \ g^2 = \frac{-\phi_3 + \sqrt{-1}\phi_4}{\phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2}.$$

Hơn nữa mê-tríc trên M được hạn chế từ $\mathbb{R}^4$ cho bởi công thức

$$ds^2 = |\phi|^2(1 + |g^1|^2)(1 + |g^2|^2)|dz|^2,$$

ở đó $\phi := \phi_1 - \sqrt{-1}\phi_2$ (xem chi tiết hơn trong Fujimoto [25] hoặc Kawakami [39]).

Định lý 3.4.8. *(Dethloff-Hà [9]) Giả sử M là một mặt cực tiểu không phẳng trong $\mathbb{R}^4$ và $g = (g^1, g^2)$ là ánh xạ Gauss của M. Gọi A là tập có dạng vành khuyên của M, tức là A bảo giác với miền $\{z|0 < 1/r < |z| < r\}$, ở đó z là tọa độ bảo giác. Giả sử $a^{11}, ..., a^{1q_1}, a^{21}, ..., a^{2q_2}$ là $q_1 + q_2$ $(q_1, q_2 > 2)$ các điểm phân biệt trong $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

(i) Giả sử $g^l \not\equiv$ hằng số $(l = 1, 2)$ và g^l rẽ nhánh tại a^{lj} với bội nhỏ nhất m_{lj} với mỗi j $(l = 1, 2)$ trên A. Khi đó ta có hoặc $\gamma_1 = \sum_{j=1}^{q_1}(1 - \frac{1}{m_{1j}}) \le 2$, hoặc $\gamma_2 = \sum_{j=1}^{q_2}(1 - \frac{1}{m_{2j}}) \le 2$, hoặc

$$\frac{1}{\gamma_1 - 2} + \frac{1}{\gamma_2 - 2} \ge 1.$$

(ii) Giả sử một trong hai ánh xạ g^1 và g^2 là ánh xạ hằng. Giả sử là $g^2 \equiv$ hằng số và g^1 rẽ nhánh tại a^{1j} với bội nhỏ nhất là m_{1j} với mỗi j. Khi đó khẳng định sau đúng

$$\gamma_1 = \sum_{j=1}^{q_1}(1 - \frac{1}{m_{1j}}) \le 3.$$

Chứng minh. Lấy các biểu diễn rút gọn $g^l = (g_0^l : g_1^l)$ trên M và đặt $||g^l|| = (|g_0^l|^2 + |g_1^l|^2)^{1/2}$ với $l = 1, 2$. Thế thì chúng ta có thể viết lại

$$ds^2 = |h|^2||g^1||^2||g^2||^2|dz|^2 \ (3.4.6),$$

ở đó $h := \phi/(g_0^1 g_0^2)$.

Trước hết chúng ta xét trường hợp $g^l \not\equiv$ hằng số với $l = 1, 2$. Giả sử phản chứng rằng g^l là rẽ nhánh tại a^{lj} với bội nhỏ nhất là m_{lj} với mỗi $j, (l = 1, 2)$ và $\gamma_1 > 2, \gamma_2 > 2$ và

$$\frac{1}{\gamma_1 - 2} + \frac{1}{\gamma_2 - 2} < 1.$$

Chọn δ_0 (> 0) sao cho $\gamma_l - 2 - q_l\delta_0 > 0$ với mọi $l = 1, 2$ và

$$\frac{1}{\gamma_1 - 2 - q_1\delta_0} + \frac{1}{\gamma_2 - 2 - q_2\delta_0} = 1.$$

Ta chọn hằng số dương δ $(< \delta_0)$ đủ gần δ_0 và đặt

$$p_l := 1/(\gamma_l - 2 - q_l\delta), (l = 1, 2).$$

Thế thì ta có

$$0 < p_1 + p_2 < 1, \ \frac{\delta p_l}{1 - p_1 - p_2} > 1 \ (l = 1, 2) \ (3.4.7).$$

Xét tập con mở

$$A_2 = Int(A) - \{z|\Pi_{l=1,2}W(g_0^l, g_1^l)(z).W(g_0^l, g_1^l)(1/z) = 0\}$$

của A. Ta định nghĩa mê-tríc mới

$$d\tau^2 = \left(|h|\frac{\Pi_{j=1}^{q_1}|G_j^1|^{(1-\frac{1}{m_{1j}}-\delta)p_1}\Pi_{j=1}^{q_2}|G_j^2|^{(1-\frac{1}{m_{2j}}-\delta)p_2}}{|W(g_0^1, g_1^1)|^{p_1}|W(g_0^2, g_1^2)|^{p_2}}\right)^{\frac{2}{1-p_1-p_2}}|dz|^2$$

trên A_2, ở đó $G_j^l := a_0^{lj}g_1^l - a_1^{lj}g_0^l$ $(l = 1, 2)$.
Bằng cách lý luận như trong chứng minh Định lý 3.4.6 ta có thể chỉ ra $d\tau^2$ là phẳng và liên tục trên A_2. Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3.4.9. *$d\tau^2$ đầy trên tập $\{z||z| = r\} \cup \{z|\Pi_{l=1,2}W(g_0^l, g_1^l)(z) = 0\}$, tức là tập $\{z||z| = r\} \cup \{z|\Pi_{l=1,2}W(g_0^l, g_1^l)(z)\}$ có khoảng cách đến điểm trong của A_2 bất kì là vô hạn.*

Sử dụng cách chứng minh như trong Bổ đề 3.4.7, chúng ta suy ra $d\tau^2$ đầy trên tập $\{z|\Pi_{l=1,2}W(g_0^l, g_1^l)(z) = 0\}$.

Đối với trường hợp $d\tau^2$ đầy trên $\{z||z| = r\}$ chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử $d\tau^2$ không đầy trên $\{z||z| = r\}$. Khi đó tồn tại đường cong phân kì $\gamma : [0, 1) \to A_2$ với $\gamma(1) \in \{z||z| = r\}$ sao cho $|\gamma| < \infty$. Do ta có thể cho $\gamma(0)$ tiến gần đến $\gamma(1)$ nên ta có thể giả sử $dist(\gamma(0), \{z||z| = 1/r\}) > 2|\gamma|$. Xét một đĩa nhỏ Δ với tâm là $\gamma(0)$. Do $d\tau^2$ là phẳng nên Δ đẳng cự với một đĩa có tâm là gốc trong mặt phẳng phức. Xét $\Phi : \{|w| < \eta\} \to \Delta$ là đẳng cự. Chúng ta mở rộng Φ như là đẳng cự vào A_2, tới đĩa lớn nhất $\{|w| < R\} = \Delta_R$. Thế thì $R \leq |\gamma|$ vì Φ không thể mở rộng tới một đĩa lớn hơn. Khi đó tồn tại điểm w_0 với $|w_0| = R$ sao cho $\Phi(\overline{0, w_0}) = \Gamma_0$ là đường cong phân kì trên A_2.
Do $\Phi(w)$ là ánh xạ song chỉnh hình địa phương nên mê-tríc trên Δ_R hạn chế từ ds^2 qua Φ được cho bởi công thức

$$\Phi^* ds^2 = |h_o\Phi|^2||g_o^1\Phi||^2||g_o^2\Phi||^2|\frac{dz}{dw}|^2|dw|^2 \text{ (3.4.8)}.$$

Mặt khác, do Φ là đẳng cự nên ta có

$$|dw| = |d\tau| = \left(|h|\frac{\Pi_{j=1}^{q_1}|G_j^1|^{(1-\frac{1}{m_{1j}}-\delta)p_1}\Pi_{j=1}^{q_2}|G_j^2|^{(1-\frac{1}{m_{2j}}-\delta)p_2}}{|W(g_0^1, g_1^1)|^{p_1}|W(g_0^2, g_1^2)|^{p_2}}\right)^{\frac{1}{1-p_1-p_2}}|dz|$$

$$\Rightarrow |\frac{dw}{dz}|^{1-p_1-p_2} = |h|\frac{\Pi_{j=1}^{q_1}|G_j^1|^{(1-\frac{1}{m_{1j}}-\delta)p_1}\Pi_{j=1}^{q_2}|G_j^2|^{(1-\frac{1}{m_{2j}}-\delta)p_2}}{|W(g_0^1, g_1^1)|^{p_1}|W(g_0^2, g_1^2)|^{p_2}}.$$

Với mỗi $l = 1, 2$, ta đặt $f^l := g^l(\Phi)$, $f_0^l := g_0^l(\Phi)$, $f_1^l := g_1^l(\Phi)$ và $F_j^l := G_j^l(\Phi)$. Lại do

$$W(f_0^l, f_1^l) = (W(g_0^l, g_1^l)_o\Phi)\frac{dz}{dw}\ (l = 1, 2)$$

nên ta có

$$|\frac{dz}{dw}| = \frac{\Pi_{l=1,2}|W(f_0^l, f_1^l)|^{p_l}}{|h(\Phi)|\Pi_{l=1,2}\Pi_{j=1}^{q_l}|F_j^l|^{(1-\frac{1}{m_{lj}}-\delta)p_l}}\ (3.4.9).$$

Kết hợp (3.4.8) và (3.4.9), ta thu được

$$\begin{aligned}\Phi^*ds^2 &= \left(\Pi_{l=1,2}\frac{||f^l||(|W(f_0^l, f_1^l)|)^{p_l}}{\Pi_{j=1}^{q_l}|F_j^l|^{(1-\frac{1}{m_{lj}}-\delta)p_l}}\right)^2|dw|^2\\ &= \Pi_{l=1,2}\left(\frac{||f^l||^{q_l-2-\sum_{j=1}^{q_l}\frac{1}{m_{lj}}-q_l\delta}|W(f_0^l, f_1^l)|}{\Pi_{j=1}^{q}|F_j^l|^{1-\frac{1}{m_{lj}}-\delta}}\right)^{2p_l}|dw|^2.\end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 3.3.5 ta có

$$\Phi^*ds^2 \leqslant C_0^{2(p_1+p_2)}.(\frac{2R}{R^2-|w|^2})^{2(p_1+p_2)}|dw|^2.$$

Từ (3.4.7) ta có $0 < p_1 + p_2 < 1$. Vì thế

$$d_{\Gamma_0} \leqslant \int_{\Gamma_0} ds = \int_{\overline{0,w_0}} \Phi^*ds \leqslant C_0^{p_1+p_2}.\int_0^R (\frac{2R}{R^2-|w|^2})^{p_1+p_2}|dw| < +\infty,$$

ở đó d_{Γ_0} là độ dài của đường cong phân kì Γ_0 trong M. Điều này trái với giả thiết rằng M là mặt đầy. Vậy Bổ đề 3.4.9 được chứng minh.

Ta định nghĩa $d\tilde{\tau}^2 = \lambda^2(z)|dz|^2$ trên A_2 với

$$\begin{aligned}\lambda(z) = &\left(|h(z)|\frac{\Pi_{j=1}^{q_1}|G_j^1(z)|^{(1-\frac{1}{m_{1j}}-\delta)p_1}\Pi_{j=1}^{q_2}|G_j^2(z)|^{(1-\frac{1}{m_{2j}}-\delta)p_2}}{|W(g_0^1, g_1^1)(z)|^{p_1}|W(g_0^2, g_1^2)(z)|^{p_2}}\right)^{\frac{1}{1-p_1-p_2}}\\ &\times\left(|h(1/z)|\frac{\Pi_{j=1}^{q_1}|G_j^1(1/z)|^{(1-\frac{1}{m_{1j}}-\delta)p_1}\Pi_{j=1}^{q_2}|G_j^2(1/z)|^{(1-\frac{1}{m_{2j}}-\delta)p_2}}{|W(g_0^1, g_1^1)(1/z)|^{p_1}|W(g_0^2, g_1^2)(1/z)|^{p_2}}\right)^{\frac{1}{1-p_1-p_2}}.\end{aligned}$$

Theo Bổ đề 3.4.9, $d\tilde{\tau}$ đầy và phẳng trên A_2.

Bằng cách sử dụng lại các lí luận như trong phần cuối của phép chứng minh Định lý 3.4.6, ta có phần (i) của Định lý 3.4.8 được chứng minh.

Xét trường hợp $g^2 \equiv$ hằng số và $g^1 \not\equiv$ hằng số. Giả sử $\gamma_1 > 3$. Ta chọn δ sao cho

$$\frac{\gamma_1 - 3}{q_1} > \delta > \frac{\gamma_1 - 3}{q_1 + 1}$$

và đặt $p = 1/(\gamma_1 - 2 - q_1\delta)$. Thế thì

$$0 < p < 1,\ \frac{p}{1-p} > \frac{\delta p}{1-p} > 1.$$

Đặt

$$d\tau^2 = |h|^{\frac{2}{1-p}} \left(\frac{\Pi_{j=1}^{q_1} |G_j^1|^{1-\frac{1}{m_{1j}}-\delta}}{|W(g_0^1, g_1^1)|} \right)^{\frac{2p}{1-p}} |dz|^2.$$

Lại bằng cách sử dụng các lí luận như trong phần cuối của phép chứng minh Định lý 3.4.6, ta suy ra trường hợp (ii) của Định lý 3.4.8. $\square$

Kết luận và kiến nghị

Kết luận

Các kết quả chính của luận án:

- Chứng minh định lý duy nhất của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ với bội bị chặn và số siêu phẳng $2N+2$. Ngoài ra các định lý duy nhất với bội rẽ nhánh hoặc có điều kiện đạo hàm cúng được chứng minh.
- Chứng minh các định lý duy nhất của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ với mục tiêu di động và bội bị chặn.
- Chứng minh các định lý về tính chất rẽ nhánh của ánh xạ Gauss của mặt cực tiểu đầy trong $\mathbb{R}^m (m = 3; 4)$ tại các tập dạng vành khuyên.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Hướng nghiên cứu còn có các câu hỏi mở sau đây:

1. Nghiên cứu các bài toán duy nhất của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ với số các siêu phẳng $\{H_j\}$ nhỏ hơn $2N+2$. Hơn nữa liệu có thể bỏ đi điều kiện tập đồng nhất trong các định lý đã có.

2. Các kết quả trong trường hợp mục tiêu cố định liệu có thể đưa đến các kết quả tương tự cho trường hợp mục tiêu di động hay siêu mặt.

3. Liệu có thể xây dựng các định lý duy nhất cho các ánh xạ Gauss của các mặt cực tiểu đầy với tính chất tương tự như của các ánh xạ phân hình.

Vì thời gian có hạn chúng tôi chưa thể giải quyết được các vấn đề trên. Chúng tôi hi vọng sẽ có thể giải quyết các vấn đề trên trong thời gian tới.

Danh mục các công trình liên quan đến luận án

[1] P. H. Hà, S. Đ. Quang và Đ. Đ. Thái, *Unicity theorems with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables sharing small identical sets for moving targets*, Internt. J. Math. **21** (2010), 1095-1120.

[2] P. H. Hà, *A unicity theorem with truncated counting function for meromorphic mappings*, Acta Math. Vietnam, **35** (2010), 439-456.

[3] P. H. Hà và S. Đ. Quang, *Unicity theorems with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables for few fixed targets*, đang gửi đăng.

[4] G. Dethloff và P. H. Hà, *Ramification of the Gauss map of complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$ *on annular ends*, đang gửi đăng.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] L. V. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma,* Trans. Amer. Math. Soc., **43** (1938), 359-364.

[2] Y. Aihara, *Finiteness theorem for meromorphic mappings*, Osaka J. Math. **35** (1998), 593-616.

[3] C. C. Chen, *On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in* $\mathbb{R}^4$, Pacific J. Math., **102** (1982), 9-14.

[4] W. Chen, *Defect relations for degenerate meromorphic maps,* Trans. Amer. Math. Soc., **319** (1990), 499-515.

[5] Z. Chen and Q. Yan, *Uniqueness problem of meromorphic functions sharing small functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 2895-2904.

[6] Z. Chen and Q. Yan, *Uniqueness theorem of meromorphic mappings from* $\mathbb{C}^n$ *into* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *sharing* $2N+3$ *hyperplanes in* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *regardless of multiplicities*, Internat. J. Math., **20** (2009), 717-726.

[7] S. S. Chern, *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), 771-782.

[8] S. S. Chern and R. Osserman, *Complete minimal surface in euclidean n-space*, J. Analyse Math., **19** (1967), 15-34.

[9] G. Dethloff and P. H. Ha, *Ramification of Gauss map of complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{R}^4$ *on annular ends*, preprint, 2012.

[10] G. Dethloff and P. H. Ha and P. D. Thoan, *Ramification of Gauss map of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^m$ on annular ends*, preprint, 2012.

[11] G. Dethloff , S. D. Quang and T. V. Tan, *A uniqueness theorem for meromorphic mappings with two families of hyperplanes*, Proc. Amer. Math. Soc. **140**(2012), 189–197.

[12] G. Dethloff and T. V. Tan, *Uniqueness problem for meromorphic mappings with truncated multiplicities and few targets*, Ann. de la Fac. Sci. de Toulouse Ser., **15** (2006), 217-242.

[13] G. Dethloff and T. V. Tan, *An extension of uniqueness theorems for meromorphic mappings*, Vietnam J. Math., **34** (2006), 71-94.

[14] G. Dethloff and T. V. Tan, *Uniqueness problem for meromorphic mappings with truncated multiplicities and moving targets*, Nagoya J. Math., **181** (2006), 75-101.

[15] G. Dethloff and T. V. Tan, *Uniqueness theorems for meromorphic mappings with few hyperplanes*, Bull. Sci. Math., **133** (2009), 501-514.

[16] Y. Fang, *On the Gauss map of complete minimal surfaces with finite total curvature*, Indiana Univ. Math. J., **42** (1993), 1389-1411.

[17] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Berlin - Heidelberg - New York, Springer - Verlag, (1981).

[18] H. Fujimoto, *The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective space*, Nagoya Math. J. **58** (1975), 1-23.

[19] H. Fujimoto, *Non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into* $\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C}) \times ... \times \mathbb{P}^{N_k}(\mathbb{C})$, Japanese J. Math.,**11** (1985), 233-264.

[20] H. Fujimoto, *On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces,* J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 235-247.

[21] H. Fujimoto, *Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces,* J. Differential Geom., **29** (1989), 245-262.

[22] H. Fujimoto, *Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces II*, J. Diff. Geom., **31** (1990), 365-385.

[23] H. Fujimoto, *Modified defect relations for the Gauss map of minimal surfaces III,* Nagoya Math. J., **124** (1991), 13-40.

[24] H. Fujimoto, *On the Gauss curvature of minimal surfaces,* J. Math. Soc. Japan., **44** (1992), 427-439.

[25] H. Fujimoto, *Value Distribution Theory of the Gauss map of Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^m$, Aspect of Math., Vol. E21, Vieweg, Wiesbaden (1993).

[26] H. Fujimoto, *Unicity theorems for the Gauss maps of complete minimal surfaces*, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 481-487.

[27] H. Fujimoto, *Unicity theorems for the Gauss maps of complete minimal surfaces II*, Kodai Math. J, **16** (1993), 335-354.

[28] H. Fujimoto, *Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory*, Nagoya Math. J. **152** (1998), 131-152.

[29] H. Fujimoto, *Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory, II*, Nagoya Math. J. **155** (1999), 161-188.

[30] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, (1994).

[31] P. H. Ha, *A unicity theorem with truncated counting function for meromorphic mappings*, Acta Math. Vietnam, **35** (2010), 439-456.

[32] P. H. Ha, *An estimate for the Gaussian curvature of minimal surfaces in* $\mathbb{R}^m$ *whose Gauss map is ramified over a set of hyperplanes*, preprint.

[33] P. H. Ha and S. D. Quang, *Unicity theorems with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables for few fixed targets*, preprint, 2012.

[34] P. H. Ha, S. D. Quang and D. D. Thai, *Unicity theorems with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables sharing small identical sets for moving targets*, Internt. J. Math. **21** (2010), 1095-1120.

[35] S. Ji, *Uniqueness problem without multiplicities in value distribution theory*, Pacific J. Math. **135** (1988), 323-348.

[36] L. Jin and M. Ru, *A unicity theorem for moving targets counting multiplicities*, Tohoku Math. J., **57** (2005), 589-595.

[37] L. Jin and M. Ru, *Algebraic curves and the Gauss map of algebraic minimal surfaces*, Diff. Geom. Appl, **25** (2007), 701-712.

[38] S. J. Kao, *On values of Gauss maps of complete minimal surfaces on annular ends*, Math. Ann., **291** (1991), 315-318 .

[39] Y. Kawakami, *The Gauss map of pseudo - algebraic minimal surfaces in* $\mathbb{R}^4$, Math. Nachr., **282** (2009), 211-218.

[40] F. J. López and F. Martín, *Complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Publicacions Matemàtiques, **43** (1999), 341-449.

[41] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics. Vol 5, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1995.

[42] R. Nevanlinna, *Analytic functions*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1970).

[43] E.I. Nochka, *On the theory of meromorphic functions,* Soviet Math. Dokl., **27** (2) (1983), 377-381.

[44] J. Noguchi and T. Ochiai, *Introduction to Geometric Function Theory in Several Complex Variables*, Trans. Math. Monogr. 80, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1990.

[45] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in* E^3 *and* E^n , Ann. of Math., **80** (1964), 340-364.

[46] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, 2nd edition, Dover Publ. Inc., New York, 1986,

[47] R. Osserman and M. Ru, *An estimate for the Gauss curvature on minimal surfaces in* $\mathbb{R}^m$ *whose Gauss map omits a set of hyperplanes*, J. Differential Geom., **46** (1997), 578-593 .

[48] S. D. Quang, *Nevanlinna theory for meromorphic mappings and related problems,* Doctoral thesis in Mathematics (2010).

[49] S. D. Quang, *Unicity problem of meromorphic mappings sharing few hyperplanes*, Ann. Polon. Math. **102**(2011), no. 3, 255–270.

[50] S. D. Quang, *A finiteness theorem for meromorphic mappings sharing few hyperplanes*, Kodai Math. J. **35**(2012), 463–484.

[51] M. Ru, *On the Gauss map of minimal surfaces immersed in* $\mathbb{R}^n$, J. Differential Geom., **34** (1991), 411-423.

[52] M. Ru, *Gauss map of minimal surfaces with ramification*, Trans. Amer. Math. Soc., **339** (1993), 751-764.

[53] M. Ru, *A uniqueness theorem with moving targets without counting multiplicity,* Proc. Amer. Math. Soc., **129** (2001), 2701-2707.

[54] M. Ru and W. Stoll, *The second main theorem for moving targets*, J. Geom. Anal. **1** (1991), 99-138.

[55] L. Smiley, *Geometric conditions for unicity of holomorphic curves*, Contemp. Math. **25** (1983), 149-154.

[56] W. Stoll, *Introduction to value distribution theory of meromorphic maps*, Lecture Notes in Math. **950** (1982), 210-359.

[57] W. Stoll, *Value distribution theory for meromorphic maps*, Aspects of Mathematics, **E 7** (1985), Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig.

[58] W. Stoll, *On the propagation of dependences,* Pacific J. of Math., **139** (1989), 311-337.

[59] T. V. Tan, *A degeneracy theorem for meromorphic mappings with few hyperplanes and low truncation level multiplicities,* Publ. Math. Debrecen, **74** (2009), 279-292.

[60] T. V. Tan, *Uniqueness Problem of Meromorphic Mappings of* $\mathbb{C}^n$ *into* $\mathbb{C}P^N$, Doctoral thesis in Mathematics (2005).

[61] D. D. Thai and S. D. Quang, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables for moving targets*, Internt. J. Math.**16** (2005), 903-942.

[62] D. D. Thai and S. D. Quang, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables*, Internt. J. Math. **17** (2006), 1223-1257.

[63] D. D. Thai and T. V. Tan, *Meromorphic functions sharing small functions as targets* , Internat. J. Math.**16** (2005), No. 4 , 437- 451.

[64] Z-H.Tu, *Uniqueness problem of meromorphic mappings in serveral complex variables for moving targets,* Tôhoku Math. J. **54** (2002), 567-579.

[65] F. Xavier, *The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere*, Ann. of Math., **113** (1981), 211-214.

[66] K. Yamanoi, *The second main theorem for small functions and related problems,* Acta Math., **192** (2004), 225-294.

[67] S. T. Yau, *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry*, Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 659 - 670.

[68] Z. Ye, *A unicity theorem for meromorphic mappings*, Houston J. Math., **24** (1998), 519-531.

Tiếng Đức

[69] R. Nevanlinna, *Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen,* Acta Math., **48** (1926), 367-391.