

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ VĂN TUẤN

VẬN DỤNG ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀO GIẢI
PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN $\mathbb{N}$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Mở đầu	2
1 Ma trận	4
1.1 Ma trận và định thức	4
1.1.1 Ma trận và phép toán	4
1.1.2 Định thức và tính chất của định thức	8
1.1.3 Đại số $\text{Mat}_n(K)$ các ma trận vuông cấp n	12
1.1.4 Vectơ riêng, giá trị riêng	14
1.2 Chéo hóa ma trận vuông	16
1.2.1 Vành ma trận	16
1.2.2 Ma trận nghịch đảo	18
1.2.3 Phương trình đặc trưng của ma trận	19
1.2.4 Chéo hóa ma trận vuông	22
2 Xây dựng phương trình hàm trên $\mathbb{N}$	24
2.1 Giá trị riêng của hàm ma trận	24
2.1.1 Giá trị riêng của hàm đa thức của A	24
2.1.2 Giá trị riêng của hàm hữu tỷ của A	25
2.2 Xét dãy số qua phép nhân ma trận	26
2.3 Phương trình hàm trên $\mathbb{N}$	33
2.4 Xây dựng phương trình hàm từ bài toán đã biết	50
2.5 Kết luận	53
Tài liệu tham khảo	54

Mở đầu

Phương trình hàm là một vấn đề khó, nhưng được nhiều người quan tâm. Phương trình hàm thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia và đề thi quốc tế. Trong quá trình dạy học, chúng tôi cũng đã giải hoặc xây dựng một vài phương trình hàm. Luận văn đặt vấn đề xây dựng một số phương trình hàm trên tập $\mathbb{N}$ qua một số kết quả đã đạt được trong Đại số tuyến tính.

Bài toán xác định những hàm số $f(x)$ thoả mãn một số tính chất $T_1, \dots, T_n$ nào đó được gọi là *phương trình hàm*. *Giải phương trình hàm* tức là tìm tất cả những hàm $f(x)$ thoả mãn tất cả những tính chất $T_1, \dots, T_n$. Khi giải phương trình hàm, với mỗi tính chất T_k ta tìm cách tiến dần đến hàm số cần tìm. Với hàm số tìm được ta kiểm tra lại xem nó có thoả mãn tất cả những tính chất T_k hay không? Thường giải phương trình hàm được đưa về giải hệ phương trình hay một dãy truy hồi. Từ những kết quả đã đạt được về đa thức hoặc hàm liên tục ta có thể dễ dàng giải được bài toán. Trong luận văn này chúng tôi sử dụng một số kết quả của đại số tuyến tính vào xây dựng phương trình hàm trên tập tự nhiên $\mathbb{N}$. Nội dung luận văn này gồm có hai chương:

Chương I, trình bày khái niệm ma trận và phép toán, định thức và các tính chất của định thức, đại số $Matn(K)$, các ma trận vuông cấp $\mathbb{N}$, vectơ riêng, giá trị riêng, vành ma trận, ma trận nghịch đảo, phương trình đặc trưng của ma trận, chéo hoá ma trận vuông.

Chương II, trình bày khái niệm giá trị riêng của hàm ma trận, xét dãy truy hồi qua phép nhân ma trận, ứng dụng xây dựng và giải phương trình hàm trên tập $\mathbb{N}$.

Luận văn có sử dụng một số phương trình hàm của thầy giáo hướng dẫn.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TS. Đàm Văn Nhĩ - Đại học Sư Phạm Hà Nội. Em xin được bày tỏ

lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và chỉ bảo hướng dẫn của Thầy. Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy, Cô trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học. Đồng thời tôi xin cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo Quảng Ninh, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Cô Tô - Huyện Cô Tô đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 8 năm 2013

Tác giả

Ngô Văn Tuấn

Chương 1

Ma trận

1.1 Ma trận và định thức

1.1.1 Ma trận và phép toán

Định nghĩa 1.1.1. Một bảng gồm $m.n$ số được viết thành m dòng, n cột như sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

được gọi là một ma trận kiểu (m, n) .

Mỗi số a_{ij} được gọi là một thành phần của ma trận. Nó nằm ở dòng thứ i và cột thứ j .

Ta thường kí hiệu ma trận bởi các chữ in hoa: A, B ... Có thể viết ma trận (1.1) một cách đơn giản bởi

$$A = (a_{ij})_{(m,n)}$$

Khi đã biết rõ m và n thì còn có thể viết là $A = (a_{ij})$.

Nếu ma trận chỉ có một dòng (một cột) thì ta gọi nó là ma trận dòng (ma trận cột).

Nếu $m = n$ thì ma trận được gọi ma trận vuông cấp n và viết

$$A = (a_{ij})_{(n)}.$$

Định nghĩa 1.1.2. Ta gọi ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển vị của ma trận (1.1) và kí hiệu là tA .

Như vậy ma trận tA thu được từ A bằng cách đổi dòng thứ i của A thành cột thứ i của tA và nếu A là ma trận kiểu (m, n) thì ma trận chuyển vị tA là ma trận kiểu (n, m) .

Các phép toán trên các tập ma trận

Ta đã biết trên tập hợp $Hom_K(V, W)$ có phép cộng hai ánh xạ tuyến tính và phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một số. Hơn nữa, khi đã cố định hai cơ sở của V và W , ta có song ánh

$$\Phi : Hom_K(V, W) \longrightarrow Mat_{(m,n)}(K).$$

Bây giờ ta muốn định nghĩa các phép toán trên các ma trận sao cho "phù hợp" với các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính. Chẳng hạn ma trận của tổng hai ánh xạ phải bằng tổng hai ma trận của những ánh xạ ấy.

Phép cộng hai ma trận

Mệnh đề và định nghĩa: Giả sử $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ và $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ lần lượt là các ma trận của ánh xạ tuyến tính $f, g \in Hom_K(V, W)$ đối với hai cơ sở (ε) và (ξ) đã chọn trong V và W . Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính $f + g$ đối với hai cơ sở ấy là $C = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}$.

Ma trận C được gọi là tổng của hai ma trận A và B kí hiệu là $A + B$

Chứng minh. Theo giả thiết

$$f(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{\xi}_i, g(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} \vec{\xi}_i, \forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Do đó: $(f + g)(\vec{\varepsilon}_j) = f(\vec{\varepsilon}_j) + g(\vec{\varepsilon}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{\xi}_i + \sum_{i=1}^m b_{ij}\vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij})\vec{\xi}_i$,
với mọi $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Vậy ma trận của $f + g$ đối với hai cơ sở đã cho là $(a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}$. $\square$

Quy tắc cộng ma trận: Muốn cộng hai ma trận ta chỉ việc cộng các thành phần tương ứng (cùng dòng, cùng cột) của chúng:

$$(a_{ij})_{(m,n)} + (b_{ij})_{(m,n)} = (a_{ij} + b_{ij})_{(m,n)}.$$

Phép nhân ma trận với một số

Mệnh đề và định nghĩa: Giả sử $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ đối với hai cơ sở (ε) và (ξ) đã chọn trong V và W , $k \in K$. Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính $f.g$ đối với hai cơ sở ấy là $C = (ka_{ij})_{(m,n)}$.

Ma trận C được gọi là tích của hai ma trận A với số k , kí hiệu là kA .

Quy tắc nhân ma trận với một số: Muốn nhân một ma trận A với một số k ta chỉ việc nhân số k với mọi thành phần của A .

Phép trừ hai ma trận

Định nghĩa 1.1.3. Ma trận $(-1)A$ được gọi là đối của ma trận A . Kí hiệu là $-A$. Với ma trận A và B , tổng $A + (-B)$ được gọi là hiệu của A và B . Kí hiệu là $A - B$.

Như vậy, với $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ và $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ ta có: $-B = (-b_{ij})_{(m,n)}$,
 $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{(m,n)}$

Tích của hai ma trận

Mệnh đề 1.1.1. Giả sử trong mỗi không gian U, V, W đã chọn một cơ sở cố định, $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính

$$f : V \longrightarrow W, B = (b_{ij})_{(n,p)}$$

là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : U \longrightarrow V$. Thế thì ma trận của ánh xạ tuyến tính fg là ma trận

$$C = (c_{ik})_{(m,p)}, \text{ trong đó } c_{ik} = \sum_{j=1}^n (a_{ij}b_{jk})$$

Ma trận C được gọi là tích của hai ma trận A và B , kí hiệu là AB .

Chứng minh. Giả sử $(\varepsilon) = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_p\}$ là cơ sở của U ,
 $(\xi) = \{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n\}$ là cơ sở của V , $(\xi) = \{\vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_m\}$ là cơ sở của W .
 Theo định nghĩa ma trận của ánh xạ tuyến tính, ta có:

$$f(\xi_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{\zeta}_i, g(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{j=1}^m b_{kj} \vec{\xi}_j, fg(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{i=1}^m c_{ik} \vec{\zeta}_i.$$

Do đó

$$fg(\vec{\varepsilon}_k) = \sum_{j=1}^n b_{jk} f(\xi_j) = \sum_{i=1}^n b_{jk} \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{\zeta}_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \vec{\zeta}_i.$$

Vậy:

$$\sum_{i=1}^m c_{ik} \vec{\zeta}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \vec{\zeta}_i.$$

Vì hệ (ζ) độc lập tuyến tính nên $c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk}$. □

Quy tắc nhân hai ma trận: Muốn tìm thành phần c_{ik} của một ma trận tích AB ta phải lấy mỗi thành phần a_{ij} của dòng thứ i trong ma trận A nhân với thành phần b_{jk} của cột thứ k của ma trận B rồi cộng lại.

Chú ý.

1) Theo định nghĩa tích AB chỉ được xác định khi số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B .

2) Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

Mệnh đề 1.1.2. Với các ma trận A, B, C và mọi số $k \in K$, ta có các đẳng thức sau (nếu các phép toán có nghĩa):

- 1) Tính kết hợp: $(AB)C = A(BC)$;
- 2) Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:
 $A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$;
- 3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

1.1.2 Định thức và tính chất của định thức

Định nghĩa 1.1.4. Với ma trận vuông

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ta gọi tổng

$$D = \sum_{s \in S(n)} \text{sgn}(s) a_{1s(1)} a_{2s(2)} \dots a_{is(i)} \dots a_{ns(n)}$$

là định thức của ma trận A và kí hiệu bởi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hay $|A|$ hay $\det(A)$.

Trong cách kí hiệu này ta cũng nói mỗi a_{ij} là một thành phần, các thành phần $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ tạo thành dòng thứ i , các thành phần $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ tạo thành cột thứ j của định thức. Khi ma trận A có cấp n ta cũng nói $|A|$ là một định thức cấp n .

Ta thấy, mỗi hạng tử của định thức cấp n là một tích của n thành phần cùng với một dấu xác định, trong mỗi tích không có hai thành phần nào cùng dòng hoặc cùng cột.

Tính chất 1.1.1. Nếu định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{ij} + a''_{ji} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mà mọi thành phần ở dòng thứ i đều có dạng $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ thì

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{ij} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{ij} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Kí hiệu hai định thức ở vế phải lần lượt là D' và D'' .

Theo định nghĩa định thức ta có:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\sigma \in S_{(n)}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{(n)}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in S_{(n)}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= D' + D''. \end{aligned}$$

□

Tính chất 1.1.2. Nếu mọi thành phần ở dòng thứ i của định thức có thừa số chung c thì có thể đặt c ra ngoài dấu định thức, tức là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{ij} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Kí hiệu định thức ở vế trái bởi D' , ở vế phải bởi D , ta có:

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{\sigma \in S_{(n)}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots ca_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_{(n)}} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= cD. \end{aligned}$$

□

Tính chất 1.1.3. Trong định thức nếu đổi chỗ hai dòng cho nhau thì định thức đổi dấu, tức là:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh. Kí hiệu định thức ở vế trái bởi D' , ở vế phải bởi D và coi $D_{(ij)}$ là định thức của ma trận (b'), trong đó:

$$b_{ij} = a_{ij} \text{ với } i \neq h, i \neq k, b_{hj} = a_{kj}, b_{kj} = a_{hj}, \text{ với } \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$D' = \sum_{\sigma \in S(n)} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{h\sigma(h)} \dots b_{n\sigma(n)}.$$

Đặt: $\tau = (h, k)$, ta có $\tau(h) = k, \tau(k) = h, \tau(i) = i$ với $i \neq h, i \neq k$.

Do đó:

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{\sigma \in S(n)} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{h\sigma(h)} \dots b_{n\sigma(n)}. \\ &= \sum_{\sigma \in S(n)} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{h\sigma(h)} \dots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

Vì τ là một chuyển trí nên $\text{sgn}(\tau) = -1$.

Do đó: $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau) = -\text{sgn}(\sigma)$.

Vì vậy: $D' = - \sum_{\sigma \in S(n)} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{h\sigma(h)} \dots a_{n\sigma(n)}.$

Khi σ chạy khắp S_n thì $\mu = \sigma\tau$ cũng vậy. Từ đó suy ra rằng:

$$\begin{aligned} D' &= - \sum_{\sigma \in S(n)} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{h\sigma(h)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= - \sum_{\mu \in S(n)} \text{sgn}(\mu) a_{1\mu(1)} \dots a_{k\mu(k)} \dots a_{h\mu(h)} \dots a_{n\mu(n)} = -D. \end{aligned}$$

□

Tính chất 1.1.4. Nếu định thức có hai dòng giống nhau thì định thức ấy bằng 0.

Chứng minh. Giả sử định thức D có dòng thứ i giống dòng thứ k . Theo tính chất 1.1.3, đổi chỗ hai dòng này cho nhau ta được $D' = -D$. Như vậy định thức D' cũng là định thức D . Như vậy $D = -D$. Suy ra $2D = 0$. Vậy $D = 0$. $\square$

Tính chất 1.1.5. Nếu định thức có hai dòng mà các thành phần (cùng cột) tương ứng tỉ lệ thì định thức ấy bằng 0.

Tính chất 1.1.6. Nếu nhân mỗi thành phần ở dòng thứ i với cùng một số rồi cộng vào thành phần cùng cột ở dòng thứ k thì được một định thức mới bằng định thức đã cho.

Chứng minh. Cho

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Giả sử nhân mỗi thành phần của dòng thứ i với c rồi cộng vào thành phần cùng cột ở dòng thứ k . Thế thì ta được:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + ca_{i1} & \dots & a_{kj} + ca_{ji} & \dots & a_{kn} + ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Theo các tính chất 1.1.1 và tính chất 1.1.5, ta có:

$$\begin{aligned} D' &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & \dots & ca_{ij} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= D + 0 = D. \end{aligned}$$

$\square$

Tính chất 1.1.7. Với tA là ma trận chuyển vị của ma trận A thì $|{}^tA| = |A|$ tức là, hai ma trận chuyển vị của nhau thì có định thức bằng nhau.

Ví dụ 1.1.1. Với $n = 2$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Thật vậy: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Chứng minh. Đặt ${}^tA = b_{ij}$. Thế thì $b_{ij} = a_{ij}$ với mọi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Theo định nghĩa của định thức, ta có:

$$|{}^tA| = \sum_{\mu \in S_n} \text{sgn}(\mu) b_{1\mu(1)} b_{2\mu(2)} \dots b_{n\mu(n)} = \sum_{\mu \in S_n} \text{sgn}(\mu) a_{\mu(1)1} a_{\mu(2)2} \dots a_{\mu(n)n}.$$

Mỗi μ có một ánh xạ ngược σ . Với mỗi i , đặt $r = \sigma(i)$, ta có $\mu\sigma(i) = \mu\sigma(i)$.

Do đó:

$$a_{\mu(r)r} = a_{i\sigma(i)}. \quad (1.2)$$

Vì $\mu\sigma$ là phép thế đồng nhất nên $1 = \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\mu)\text{sgn}(\sigma)$.

Suy ra:

$$\text{sgn}(\mu) = \text{sgn}(\sigma). \quad (1.3)$$

Hơn nữa khi μ chạy khắp S_n thì σ cũng vậy. Nhờ (1.2) và (1.3) có thể viết:

$$|{}^tA| = \sum_{\mu \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = |A|.$$

□

1.1.3 Đại số $\text{Matn}(\mathbb{K})$ các ma trận vuông cấp n

Ta kí hiệu tập hợp các ma trận vuông cấp n với các thành phần thuộc trường $\mathbb{K}$ bởi $\text{Matn}(\mathbb{K})$. Dễ dàng kiểm tra được $\text{Matn}(\mathbb{K})$ là một $\mathbb{K}$ -không gian vectơ. Hơn nữa, trong $\text{Matn}(\mathbb{K})$ tích của hai ma trận bất kì luôn luôn xác định; tuy nhiên, phép nhân không giao hoán.

Định lý 1.1.1. Định thức tích của hai ma trận vuông bằng tích các định thức của hai ma trận ấy.

Chứng minh. Giả sử:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

với $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$.

Ta xét định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Trong định thức D, định thức con ở góc trên bên trái là định thức $|A|$, mọi định thức con khác tạo bởi n dòng đầu đều bằng 0 vì có một cột với các thành phần đều bằng 0; tương tự, định thức con ở góc dưới bên phải là định thức $|B|$, mọi định thức con khác tạo bởi n dòng cuối đều bằng 0. Theo định lí Laplace, $D = (-1)^{2(1+2+\dots+n)}|A| \cdot |B| = |A||B|$.

Bây giờ ta nhân lần lượt các dòng thứ $n+1$ với a_{11} , dòng thứ $n+2$ với $a_{12}, \dots$, dòng thứ $n+j$ với $a_j, \dots$ dòng thứ $2n$ với a_{1n} , rồi cộng vào dòng đầu. Khi đó dòng đầu của D biến thành

$$0, 0, \dots, 0, c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}.$$

Tổng quát, nhân dòng thứ $n+1$ với $a_{1i}, \dots$, dòng thứ $n+i$ với $a_{ij}, \dots$, dòng thứ $2n$ với a_{in} rồi cộng vào dòng thứ i thì dòng thứ i trong D biến thành

$$0, 0, \dots, 0, c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}.$$

Theo tính chất của định thức, những phép biến đổi trên không thay đổi định thức D.

Do vậy:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bây giờ trong n dòng đầu của định thức này có làm ở góc trên bên phải, các định thức con khác đều bằng 0. Theo định lí Laplace,

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{(1+2+\dots+n)+(n+1+n+2+\dots+2n)} |AB| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}, \\ D &= (-1)^{(1+2+\dots+n)+(n+1+n+2+\dots+2n)} |AB| \cdot (-1)^n \\ &= (-1)^{(1+2+\dots+n)+(n+1+n+2+\dots+2n)+n} |AB| \\ &= (-1)^{2n(n+1)} |AB| = |AB|. \end{aligned}$$

Vậy $|AB| = |A| \cdot |B|$. □

1.1.4 Vectơ riêng, giá trị riêng

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử V là một không gian vectơ, $f : V \rightarrow V$ là một tự đồng cấu. Vectơ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ của V được gọi là một vectơ riêng của f nếu tồn tại một số thuộc K sao cho

$$f(\vec{\alpha}) = k\vec{\alpha}.$$

Số k được gọi là giá trị riêng của f ứng với vectơ riêng $\vec{\alpha}$.

Nếu A là ma trận của tự đồng cấu f thì giá trị riêng của f cũng được gọi là giá trị riêng của ma trận A .

Theo định nghĩa của vectơ riêng ta thấy rằng ứng với một giá trị riêng có vô số vectơ riêng. Chẳng hạn, nếu $\vec{\alpha}$ là một vectơ riêng ứng với giá trị

riêng k của tự đồng cấu $f : V \rightarrow V$ thì mọi vectơ của không gian con U sinh bởi $\vec{\alpha}$ cũng là vectơ riêng ứng với giá trị riêng k ; hơn nữa $f(U) \subseteq U$. Thật vậy, với mọi $r\vec{\alpha} \in U$ ta có:

$$f(r\vec{\alpha}) = rf(\vec{\alpha}) = r(k\vec{\alpha}) = k(r\vec{\alpha}) \in U.$$

Người ta nói U là một không gian con bất biến của V đối với f . Tổng quát ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1.6. Giả sử $f : V \rightarrow V$ là một tự đồng cấu của không gian vectơ V . Không gian con W của V được gọi là một không gian con bất biến đối với f nếu với mọi $\vec{\alpha} \in W$ ta đều có $f(\vec{\alpha}) \in W$.

Bây giờ ta xét tập hợp các vectơ riêng ứng với một giá trị riêng.

Mệnh đề 1.1.3. Giả sử V là một không gian vectơ, tập hợp gồm vectơ $\vec{0}$ và các vectơ riêng ứng với giá trị riêng k của tự đồng cấu $f : V \rightarrow V$ là một không gian con bất biến của V và được gọi là không gian riêng ứng với giá trị riêng k .

Chứng minh. Gọi W là tập hợp gồm vectơ $\vec{0}$ và các vectơ riêng ứng với giá trị riêng k của f . Rõ ràng $W \neq \emptyset$ vì $\vec{0} \in W$. Giả sử $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in W$ và $r, s \in K$. Vì f là ánh xạ tuyến tính nên:

$$(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}) = f(r\vec{\alpha}) + f(s\vec{\beta}) = rf(\vec{\alpha}) + sf(\vec{\beta}) = r(k\vec{\alpha}) + s(k\vec{\beta}) = k(r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}).$$

Điều này chứng tỏ $r\vec{\alpha} + s\vec{\beta}$ là một vectơ riêng ứng với k . Do đó $r\vec{\alpha} + s\vec{\beta} \in W$. Vậy W là không gian con của V . Hơn nữa W bất biến đối với f vì nếu $\vec{\alpha} \in W$ thì $f(\vec{\alpha}) = k(\vec{\alpha}) \in W$. $\square$

Các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng phân biệt của một tự đồng cấu liên quan với nhau như thế nào?

Định lý 1.1.2. Nếu $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_p$ là những vectơ riêng tương ứng với các giá trị riêng đôi một phân biệt $k_1, k_2, \dots, k_p$ của tự đồng cấu f thì chúng lập thành một hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo p .

Khi $p = 1$ mệnh đề đúng vì $\vec{\alpha}_1 \neq \vec{0}$.

Giả sử $p > 1$ và mệnh đề đúng với $p - 1$. Ta phải chứng minh rằng nếu có đẳng thức

$$r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + r_{p-1}\vec{\alpha}_{p-1} + r_p\vec{\alpha}_p = \vec{0} \quad (1.4)$$

thì bắt buộc $r_1 = r_2 = \cdots = r_{p-1} = r_p = 0$.

Vì $\vec{\alpha}_i$ là những vectơ riêng ứng với giá trị riêng k_i nên tác động f vào hai vế của bất đẳng thức (1.4) ta được

$$r_1\vec{\alpha}_1 + r_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + r_{p-1}\vec{\alpha}_{p-1} + r_p\vec{\alpha}_p = \vec{0}. \quad (1.5)$$

Bây giờ nhân hai vế của (1.4) với k_p rồi trừ vào (1.5) ta có

$$r_1(k_1 - k_p)\vec{\alpha}_1 + r_2(k_2 - k_p)\vec{\alpha}_2 + \cdots + r_{p-1}(k_{p-1} - k_p)\vec{\alpha}_{p-1} = \vec{0}.$$

Theo giả thiết quy nạp, hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{p-1}\}$ độc lập tuyến tính.

Do đó:

$$r_1(k_1 - k_p) + r_2(k_2 - k_p) + \cdots + r_{p-1}(k_{p-1} - k_p) = 0.$$

Vì các k_i đôi một khác nhau nên $r_1 = r_2 = \cdots = r_{p-1} = 0$.

Thay các giá trị này vào (1) ta lại có $r_p\vec{\alpha}_p = \vec{0}$. Nhưng $\vec{\alpha} \neq 0$ nên $r_p = 0$.

Vậy hệ vectơ $\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_{p-1}\}$ độc lập tuyến tính. $\square$

1.2 Chéo hóa ma trận vuông

1.2.1 Vành ma trận

Xét vành đa thức một biến $K[x]$ trên trường K . Giả sử đa thức thuộc $K[x]$ là $f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ và ma trận vuông A cấp $n \leq 3$. Định nghĩa

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

với E là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận vuông A . Từ các phép toán về ma trận, chẳng hạn như: $EA^r = A^r E = A^r$, $A^r A^s = A^s A^r = A^{r+s}$ và $A^r(\alpha A^s + \beta A^t) = \alpha A^{r+s} + \beta A^{r+t}$ với $\alpha, \beta \in K$, suy ra ngay kết quả sau:

Định lý 1.2.1. Với hai đa thức f và g thuộc $K[x]$ và ma trận A ta luôn có

- (i) Nếu $f = g$ thì $f(A) = g(A)$.
- (ii) $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.
- (iii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$.
- (iv) $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.
- (v) $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$ với bất kỳ $\alpha \in K$.

Ký hiệu $K[A] = \{f(A) | f \in K[x]\}$. Từ Định lý 1.2.1 suy ra ngay kết quả:

Định lý 1.2.2. Tập $K[A]$ cùng phép cộng, nhân các ma trận và nhân ma trận với một số lập thành một vành giao hoán có đơn vị E .

Mệnh đề 1.2.1. Tương ứng $\phi : K[x] \rightarrow K[A], f(x) \mapsto f(A)$, là một toàn cấu với $\text{Ker}(\phi) \neq (0)$.

Chứng minh. Do bởi $\phi(f + g) = (f + g)(A) = f(A) + g(A) = \phi(f) + \phi(g)$ và $\phi(fg) = (fg)(A) = f(A)g(A) = \phi(f)\phi(g)$ theo Định lý 1.2.1 nên ϕ là một đồng cấu vành.

Với $f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$ có đa thức $f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ để $\phi(f) = f(A)$. Do vậy ϕ là một toàn cấu vành.

Vì tập $M_{n,n}$ tất cả các ma trận vuông cấp n trên K là một không gian vectơ n^2 chiều trên K với cơ sở $\Delta_{ij} = (1_{ij})$, trong đó tại vị trí (i, j) có $1_{ij} = 1$, còn tại những vị trí khác đều bằng 0. Như vậy nhiều hơn n^2 ma trận vuông cấp n trên K đều là phụ thuộc tuyến tính. Như vậy tồn tại đa thức khác 0 là $f(x) = x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ với $s \geq n^2 + 1$ thỏa mãn $f(A) = 0$. Vậy $\text{Ker}(\phi) \neq (0)$. Vì vành $K[x]$ là vành idêan chính nên có đa thức bậc thấp nhất $F(x) \neq 0$ để $\text{Ker}(\phi) = (F) \neq (0)$. $\square$

Hệ quả 1.2.1. Ta có $K[A] \cong K[x]/(F)$.

Chứng minh. Bởi vì $\phi : K[x] \rightarrow K[A], f(x) \mapsto f(A)$, là một toàn cấu với $\text{Ker}(\phi) = (F) \neq (0)$ theo Mệnh đề 1.2.1 nên $K[A] \cong K[x]/\text{Ker}(\phi) = K[x]/(F)$. $\square$

Nhận xét 1.2.1. Vì $K[x]$ là vành các idêan chính nên có duy nhất một đa thức bậc thấp nhất dạng $m(x) = x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_d \in K[x]$ để $\text{Ker}(\phi) = (F) = (m(x))$. Hiển nhiên $m(A) = 0$. Đôi khi $m(x)$ còn được gọi là đa thức tối tiểu của ma trận A .

1.2.2 Ma trận nghịch đảo

Giả sử $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp n . Ký hiệu A_{ij} là ma trận vuông cấp $n-1$ có được từ A qua việc bỏ dòng thứ i và cột thứ j . Khi đó $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ được gọi là phần bù đại số của a_{ij} . Ta có ngay

$$a_{k1}\alpha_{i1} + a_{k2}\alpha_{i2} + \dots + a_{kn}\alpha_{in} = \begin{cases} |A| & \text{khi } k = i \\ 0 & \text{khi } k \neq i. \end{cases}$$

Ký hiệu ma trận với các phần tử α_{ij} qua $A_{adj} = (\alpha_{ij})$. Dễ dàng kiểm tra

$$AA_{adj} = A_{adj}A = |A|E.$$

Định nghĩa 1.2.1. Ma trận vuông B cấp n được gọi là ma trận nghịch đảo, của ma trận vuông A cấp n nếu $AB = BA = E$. Khi đó ma trận nghịch đảo B thường được viết qua A^{-1} .

Bổ đề 1.2.1. Ma trận vuông A có nghịch đảo A^{-1} khi và chỉ khi $|A| \neq 0$.

Chứng minh. Nếu A có ma trận nghịch đảo A^{-1} thì $AA^{-1} = E$. Từ $1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$ suy ra $|A| \neq 0$. Ngược lại, nếu $|A| \neq 0$ thì A có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A_{adj}$. $\square$

Nhận xét 1.2.2. Từ $m(A) = 0$ suy ra $A^d + a_1A^{d-1} + \dots + a_{d-1}A = -a_dE$. Như vậy $A\left(-\frac{1}{a_d}A^{d-1} - \frac{a_1}{a_d}A^{d-2} - \dots - \frac{a_{d-1}}{a_d}E\right) = E$ và có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = -\frac{1}{a_d}A^{d-1} - \frac{a_1}{a_d}A^{d-2} - \dots - \frac{a_{d-1}}{a_d}E$ khi nó tồn tại.

Ví dụ 1.2.1. Xác định ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bài giải. Giả sử $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Lập A^{-1} qua các phần bù đại số

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18, A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14, \\ A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \\ A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8. \end{aligned}$$

Ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \frac{A_{adj}}{|A|} = \begin{pmatrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/23 & 2/23 \\ -2/23 & -5/46 & 4/23 \end{pmatrix}$. □

Ví dụ 1.2.2. Xác định ma trận nghịch đảo của ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Bài giải. Với $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, lập B^{-1} qua các phần bù đại số và nhận được $B_{adj} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. □

1.2.3 Phương trình đặc trưng của ma trận

Xét không gian vectơ n chiều V trên K với một cơ sở $\{e_1, \dots, e_n\}$ nào đó. Giả sử ánh xạ tuyến tính F được biểu diễn qua một ma trận vuông cấp n với các phần tử $a_{ij} \in K$ là $A = (a_{ij})$. Nếu coi $F(\vec{u})$ như là $F \cdot \vec{u}$ thì từ $F(\vec{u}) = A\vec{u}$ ta suy ra biểu diễn dạng phương trình như sau: $\sum_{j=1}^n (\delta_{ij}F - a_{ij})u_j = 0$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Như vậy $|FE - A| = 0$ và dẫn đến khái niệm sau:

Định nghĩa 1.2.2. Đa thức $p(x) = |xE - A| = x^n + \delta_1 x^{n-1} + \dots + \delta_{n-1}x + \delta_n$ được gọi là *đa thức đặc trưng* của ma trận vuông A . Phương trình $p(x) = 0$ được gọi là *phương trình đặc trưng* của ma trận vuông A . Các nghiệm

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ của $p(x) = 0$ được gọi là các *nghiệm đặc trưng* hay *giá trị riêng* và $v(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ được gọi là *vết* của ma trận vuông A .

Định lý 1.2.3. [Cayley-Hamilton] *Mỗi ma trận vuông A đều là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó.*

Chứng minh. Giả sử A là một ma trận vuông cấp n với đa thức đặc trưng $p(x) = |xE - A|$. Ký hiệu ma trận phù hợp của ma trận $xE - A$ qua $(xE - A)_{adj}$. Vì các phần tử trong $(xE - A)_{adj}$ là những định thức con cấp $n - 1$ có được do xoá bỏ từ định thức $|xE - A|$ đi một dòng và một cột. Vậy có thể viết $(xE - A)_{adj}$ thành dạng

$$(xE - A)_{adj} = B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \dots + B_1x + B_0$$

với các ma trận vuông B_j cấp n . Do $(xE - A)_{adj}(xE - A) = p(x)E$ nên $(xE - A)(B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \dots + B_1x + B_0) = p(x)E$. Ta có hệ

$$\begin{cases} B_{n-1} = E \\ B_{n-2} - AB_{n-1} = \delta_1 E \\ B_{n-3} - AB_{n-2} = \delta_2 E \\ \dots \\ B_0 - AB_1 = \delta_{n-1} E \\ -AB_0 = \delta_n E \end{cases} \quad \text{và suy ra} \quad \begin{cases} A^n B_{n-1} = A^n \\ A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \delta_1 A^{n-1} \\ A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-1} B_{n-2} = \delta_2 A^{n-2} \\ \dots \\ AB_0 - A^2 B_1 = \delta_{n-1} A \\ -AB_0 = \delta_n E. \end{cases}$$

Cộng tất cả các ma trận, vế theo vế, ta được phương trình $p(A) = 0$. $\square$

Định lý 1.2.4. *Với ma trận vuông cấp n , đa thức $m(x)^n$ chia hết cho đa thức đặc trưng $p(x)$.*

Chứng minh. Giả sử A là một ma trận vuông cấp n với đa thức đặc trưng $p(x) = |xE - A|$. Ký hiệu đa thức tối tiểu của A là $m(x) = x^r + b_1x^{r-1} + \dots + b_r$. Với các ma trận $B_0, B_1, \dots, B_{r-1}$ sau đây:

$$\begin{cases} B_0 = E \\ B_1 = A + b_1 E \\ B_2 = A^2 + b_1 A + b_2 E \\ \dots = \dots \\ B_{r-1} = A^{r-1} + b_1 A^{r-2} + \dots + b_{r-1} E \end{cases} \quad \text{có} \quad \begin{cases} E = B_0 \\ b_1 E = B_1 - AB_0 \\ b_2 E = B_2 - AB_1 \\ \dots = \dots \\ b_{r-1} E = B_{r-1} - AB_{r-2}. \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra $AB_{r-1} = m(A) - b_r E$ hay $b_r E = -AB_{r-1}$. Như vậy có

$$m(x)E = (xE - A)B(x)$$

với $B(x) = x^{r-1}B_0 + x^{r-2}B_1 + \cdots + B_{r-1}$. Lấy định thức hai vế được $m(x)^n = p(x)|B(x)|$. Vì $|B(x)|$ là một đa thức nên $m(x)^n \vdots p(x)$. $\square$

Định lý 1.2.5. *Mỗi đa thức $f(x) \in K[x]$ thoả mãn $f(A) = 0$ thì $f(x)$ chia hết cho $m(x)$. Đặc biệt $p(x)$ cũng chia hết cho $m(x)$.*

Chứng minh. Giả sử đa thức $f(x)$ thoả mãn $f(A) = 0$. Sử dụng phép chia với dư, biểu diễn $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ với đa thức $r(x)$ có $\deg r(x) < \deg m(x)$. Vì $f(A) = 0, m(A) = 0$ nên $r(A) = 0$ và như vậy $r(x) = 0$ hay $f(x)$ chia hết cho $m(x)$. Do bởi $p(A) = 0$. Theo Định lý 1.2.3 nên $p(x)$ cũng chia hết cho $m(x)$. $\square$

Ví dụ 1.2.3. *Xác định đa thức đặc trưng và đa thức tối thiểu của ma trận*
 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài giải. Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-1)$ nên đa thức đặc trưng của A là $(x-2)^2(x-1)$. Vì $A - 2E, A - E \neq 0$, nhưng $(A - 2E)(A - E) = 0$ nên đa thức tối thiểu là $m(x) = (x-2)(x-1)$. $\square$

Ví dụ 1.2.4. *Giả sử $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Xác định lũy thừa A^{2012} .*

Bài giải. Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -3 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)(x-6)$ nên có tích $(A-2E)(A-6E) = 0$. Đặt $4B = A-2E, 4C = -A+6E$. Khi đó $B+C = E, 6B+2C = A, BC = 0 = CB$. Lại có $\begin{cases} B = BE = B(B+C) = B^2 \\ C = CE = C(B+C) = C^2 \end{cases}$. Từ các kết quả này suy ra $A^n = 6^n B + 2^n C$ bằng phương pháp quy nạp theo n . Do đó $A^{2012} = \frac{1}{4} [6^{2012}(A-2E) + 2^{2012}(A-6E)]$. $\square$

Ví dụ 1.2.5. *Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $ad - bc \neq 0$. Xác định ma trận nghịch đảo A^{-1} .*

Bài giải . Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ nên $A \frac{A - (a+d)E}{bc - ad} = E$. Vậy $A^{-1} = \frac{A - (a+d)E}{bc - ad}$. $\square$

Ví dụ 1.2.6. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. Khi đó hãy

(i) Xác định $|A|$ và A^{-1} .

(ii) Đặt $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$. Xác định $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Bài giải. (i) Vì $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{vmatrix} = (x+2)^2(x-4) = x^3 - 12x - 16$ nên $A \frac{A^2 - 12E}{16} = E$. Vậy $A^{-1} = \frac{A^2 - 12E}{16}$ và $|A| = 16$.

(ii) Với $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ta có $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ và suy ra

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Với công thức xác định A^n ta dễ dàng suy ra các kết quả còn lại. $\square$

1.2.4 Chéo hóa ma trận vuông

Xét không gian vectơ K^3 trên trường K với chiều bằng 3. Giả sử ma trận $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng của A là định thức sau:

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & t - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & t - a_{33} \end{vmatrix} = t^3 + \delta_1 t^2 + \delta_2 t + \delta_3$$

với ba giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ký hiệu $\vec{u}_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}), i = 1, 2, 3$, là những vectơ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $A\vec{u}_i^t = \lambda_i \vec{u}_i^t$ với $i = 1, 2, 3$. Vectơ $\vec{u}_i$ được gọi là *vectơ riêng* ứng với giá trị riêng λ_i của ma trận A . Khi ba vectơ này độc lập tuyến tính thì chúng lập thành một cơ sở của K^3 . Mỗi vectơ $\vec{x} \in K^3$ đều có một biểu diễn duy nhất $\vec{x} = c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + c_3 \vec{u}_3$ và các biểu diễn ma

trận

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= c_1(b_{11}, b_{12}, b_{13}) + c_2(b_{21}, b_{22}, b_{23}) + c_3(b_{31}, b_{32}, b_{33}) \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{và} \\
A\vec{x} &= c_1 A\vec{u}_1 + c_2 A\vec{u}_2 + c_3 A\vec{u}_3 = c_1 \lambda_1 \vec{u}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{u}_2 + c_3 \lambda_3 \vec{u}_3 \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Từ đây có $AP \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ hay với vectơ $\vec{x}$:

$$P^{-1}AP \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Dễ dàng suy ra $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ và ta nói rằng đã *chéo hóa* được ma trận vuông A .

Chương 2

Xây dựng phương trình hàm trên $\mathbb{N}$

2.1 Giá trị riêng của hàm ma trận

2.1.1 Giá trị riêng của hàm đa thức của A

Bây giờ xét $g(x) \in K[x]$. Khi đó $g(A) \in K[A]$. **Vấn đề đặt ra:** Xác định đa thức, đa thức đặc trưng và các giá trị riêng của ma trận $g(A)$ qua đa thức đặc trưng $p(x)$ và các giá trị riêng của A .

Giả sử $g(x)$ có nghiệm $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$. Ta có sự phân tích trong $K[x]$:

$$g(x) = (-1)^m b_0 (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \dots (\alpha_m - x).$$

Thế x qua A được $g(A) = (-1)^m b_0 (\alpha_1 E - A)(\alpha_2 E - A) \dots (\alpha_m E - A)$.

Giả sử $p(x) = |xE - A| = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$. Như vậy

$$\begin{aligned} |g(A)| &= (-1)^{mn} b_0^n |\alpha_1 E - A| |\alpha_2 E - A| \dots |\alpha_m E - A| \\ &= (-1)^{mn} b_0^n \prod_{k=1}^m \prod_{i=1}^n (\alpha_k - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n [(-1)^m b_0 \prod_{k=1}^m (\alpha_k - \lambda_i)]. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra kết quả về định thức, giá trị riêng và bất đẳng thức về vết:

Mệnh đề 2.1.1. *Ta luôn có $|g(A)| = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i)$ với mỗi đa thức $g(x)$.*

Chứng minh. Do bởi $|g(A)| = \prod_{i=1}^n [(-1)^m b_0 \prod_{k=1}^m (\alpha_k - \lambda_i)]$ như đã chỉ ra ở trên nên $|g(A)| = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{k=1}^m \prod_{i=1}^n (\alpha_k - \lambda_i) = \prod_{i=1}^n (-1)^m b_0 \prod_{k=1}^m (\alpha_k - \lambda_i)$. Vậy $|g(A)| = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i)$ với mỗi đa thức $g(x)$. $\square$

Định lý 2.1.1. Nếu ma trận A có các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ thì ma trận $g(A)$ có đa thức đặc trưng $h(x) = [x - g(\lambda_1)][x - g(\lambda_2)] \dots [x - g(\lambda_n)]$ và các giá trị riêng là $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$.

Chứng minh. Xét ma trận $h(A) = xE - g(A)$. Theo Mệnh đề 2.1.1 có $|h(A)| = h(\lambda_1)h(\lambda_2) \dots h(\lambda_n) = [x - g(\lambda_1)][x - g(\lambda_2)] \dots [x - g(\lambda_n)]$. Vậy ma trận $g(A)$ có đa thức đặc trưng $h(x) = [x - g(\lambda_1)][x - g(\lambda_2)] \dots [x - g(\lambda_n)]$ và các giá trị riêng là $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$. $\square$

Hệ quả 2.1.1. Nếu ma trận $A = (a_{ij})$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ và $\prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ thì A có nghịch đảo A^{-1} với các giá trị riêng là $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.

Chứng minh. Với $g(x) = x$, ma trận $A = g(A)$ có các giá trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ và $|A| = |g(A)| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ theo Định lý 2.1.1. theo Bổ đề 1.2.1, ma trận $A = (a_{ij})$ có ma trận nghịch đảo A^{-1} với các giá trị riêng là $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$. $\square$

Hệ quả 2.1.2. Nếu ma trận $A = (a_{ij})$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ thì ma trận A^2 có các giá trị riêng là $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ và $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$.

Chứng minh. Ma trận A^2 có các giá trị riêng là $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$ theo Định lý 2.1.1. Vết của ma trận A^2 bằng $T = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2$. Vì dễ dàng có vết $T = v(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ji}$ và $v(AA^c) - v(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}^2 - a_{ij}a_{ji}) = \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji})^2 \geq 0$. Vậy $T = v(A^2) \leq v(AA^c) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$. $\square$

2.1.2 Giá trị riêng của hàm hữu tỷ của A

Ta đã biết, nếu ma trận vuông A có $|A| \neq 0$ thì A có ma trận nghịch đảo A^{-1} . Như vậy, khi đa thức $g(x) \in K[x]$ thoả mãn $|g(A)| \neq 0$ thì $g(A)$ có ma trận nghịch đảo $g(A)^{-1}$.

Giả sử $(g(x), m(x)) = 1$. Khi đó có hai đa thức $h(x), q(x) \in K[x]$ thoả mãn $h(x)g(x) + m(x)q(x) = 1$. Với $x = A$ ta có $h(A)g(A) = E$. Từ đây suy ra $g(A)^{-1} = h(A)$. Chú ý rằng, trong biểu diễn $h(x)g(x) + m(x)q(x) = 1$ ta chọn $h(x)$ sao cho $\deg(h(x)) < d = \deg(m(x))$. Khi đó $h(x)$ được xác định duy nhất.

Mệnh đề 2.1.2. Nếu phân thức hữu tỷ $\frac{f(x)}{g(x)}$ có $(g(x), m(x)) = 1$, với $m(x)$ là đa thức tối tiểu của $f(x)$ thì $\frac{f(A)}{g(A)} \in K[A]$ và các giá trị riêng của ma trận $\frac{f(A)}{g(A)}$ là $\frac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)}, \dots, \frac{f(\lambda_n)}{g(\lambda_n)}$. Ngoài ra ta còn có $|\frac{f(A)}{g(A)}| = \frac{|f(A)|}{|g(A)|}$.

Chứng minh. Như lập luận trên có $g(A)^{-1} = h(A)$. Do vậy ta có thể viết $\frac{f(A)}{g(A)} = f(A)h(A) \in K[A]$. Bởi vì $f(A)h(A)$ có các giá trị riêng là $f(\lambda_1)h(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)h(\lambda_n)$ theo Định lý 2.1.1 nên $\frac{f(A)}{g(A)}$ có các giá trị riêng là $\frac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)}, \dots, \frac{f(\lambda_n)}{g(\lambda_n)}$. Hơn nữa, ta còn có định thức $|\frac{f(A)}{g(A)}| = \frac{f(\lambda_1)}{g(\lambda_1)} \cdot \frac{f(\lambda_2)}{g(\lambda_2)} \cdots \frac{f(\lambda_n)}{g(\lambda_n)} = \frac{|f(A)|}{|g(A)|}$. $\square$

Nhận xét 2.1.1. Ký hiệu $K[[A]] = \{f(A) \mid f(x) \in K[[x]]\}$. Nếu $f(A)$ hội tụ thì $f(B)$ với $B = P^{-1}AP$ cũng hội tụ và ngược lại. Khi đó $f(B) = P^{-1}f(A)P$. Đặc biệt, nếu $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là những giá trị riêng của A thì $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)$ là giá trị riêng của $f(A)$.

2.2 Xét dãy số qua phép nhân ma trận

Ví dụ 2.2.1. [Vô định sinh viên 2008] Giả sử A là ma trận vuông cấp 2 với định thức $|A| < 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực α_1, α_2 và hai ma trận vuông cấp 2 là A_1, A_2 để có thể biểu diễn $A^n = \alpha_1^n A_1 + \alpha_2^n A_2$ với mọi số nguyên $n \geq 1$.

Bài giải. Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó ta có đa thức đặc trưng $|xE - A| = \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -c & x - d \end{vmatrix} = x^2 - (a + d)x + ad - bc$ và phương trình ma trận $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = 0$. Do bởi $ad - bc = |A| < 0$ nên $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt α_1, α_2 và ta có biểu diễn tích hai ma trận $(A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E) = 0$. Hiển nhiên

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_2 E) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_1 E) = A \\ \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_2 E) - \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_1 E) = E. \end{cases}$$

Như vậy, với $A_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(A - \alpha_2 E)$, $A_2 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(A - \alpha_1 E)$ ta có ngay các biểu diễn $A_1 + A_2 = E$, $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = A$. Kiểm tra được ngay $A_1 A_2 = A_2 A_1 = -\frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}(A - \alpha_2 E)(A - \alpha_1 E) = 0$ và $A_1 = A_1^n$, $A_2 = A_2^n$ với mọi $n \geq 1$. Từ đây suy ra $A^n = (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^n = \alpha_1^n A_1 + \alpha_2^n A_2$ với mọi số nguyên $n \geq 1$. $\square$

Ví dụ 2.2.2. Giả sử $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. Biểu diễn $A^n = \begin{pmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{pmatrix}$ với mỗi số tự nhiên n . Xác định các hàm số học $a(n), b(n), c(n), d(n)$.

Bài giải. Đa thức đặc trưng $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-2 & 8 \\ -2 & x-10 \end{vmatrix} = (x-6)^2$ và phương trình $(A - 6E)^2 = 0$. Hàm số $f(x) = x^n$ có khai triển Taylor tại $x = 6$ như sau

$$f(x) = f(6) + \frac{f'(6)}{1!}(x-6) + \frac{f''(6)}{2!}(x-6)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(6)}{n!}(x-6)^n.$$

Với $x = A$ ta có $A^n = 6^n E + n6^{n-1}(A - 6E)$ hay $A^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} + n6^{n-1} \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Do vậy $A^n = \begin{pmatrix} 6^n - 4n6^{n-1} & -8n6^{n-1} \\ 2n6^{n-1} & 6^n + 4n6^{n-1} \end{pmatrix}$. $\square$

Ví dụ 2.2.3. Với $A = \begin{pmatrix} 3 & 21 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $A^n = \begin{pmatrix} a(n) & b(n) & c(n) \\ a'(n) & b'(n) & c'(n) \\ a''(n) & b''(n) & c''(n) \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $a(n) + b'(n) + c''(n) = 3^{n+1}$.

Bài giải. Đa thức đặc trưng $|xE - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -21 & -12 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = (x-3)^3$ và phương trình ma trận $(A - 3E)^3 = 0$. Hàm số $f(x) = x^n$ có khai triển Taylor tại $x = 3$ như sau

$$f(x) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n.$$

Với $x = A$ ta có $A^n = 3^n E + n3^{n-1}(A - 3E) + \frac{n(n-1)3^{n-2}}{2}(A - 3E)^2$ hay $A^n = \frac{(n^2 - 3n + 2)3^n}{2}E + (2n - n^2)3^{n-1}A + \frac{n(n-1)3^{n-2}}{2}A^2$. Từ đây suy ra $A^n = \frac{(n^2 - 3n + 2)3^n}{2}E + (2n - n^2)3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & 21 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} +$

$\frac{n(n-1)3^{n-2}}{2} \begin{pmatrix} 9 & 93 & 105 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & 15 \end{pmatrix}$ và được $a(n) = 3^n, b'(n) = (3-n)3^{n-1}, c''(n) = (3+n)3^{n-1}$. Do đó $a(n) + b'(n) + c''(n) = 3^{n+1}$. $\square$

Ví dụ 2.2.4. Xét ba dãy $(a_n), (b_n), (c_n)$ và $a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 3$ với

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n \\ c_{n+1} = -2a_n + c_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_n^2 + a_n + 1 = c_n = 2b_n - 1$ với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Bài giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Chú ý $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E + A$. Hiện

nhien $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ và $A^3 = 0$. Theo công thức khai triển nhị thức

Newton ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (E + A)^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = (E + nA + C_n^2 A^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và

ta nhận được $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2n & n \\ -n & n^2 - n + 1 & \frac{-n^2 + n}{2} \\ -2n & 2n^2 - 2n & -n^2 + n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hay

$$\begin{cases} a_n = 1 - n \\ b_n = \frac{n^2 - 3n + 4}{2} \\ c_n = n^2 - 3n + 3, n \geq 0. \end{cases} \quad \text{Việc kiểm tra } a_n^2 + a_n + 1 = c_n = 2b_n - 1 \text{ với}$$

mọi số nguyên $n \geq 0$ là tầm thường. $\square$

Ví dụ 2.2.5. [Vô địch sinh viên 1996] Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Giả sử $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{pmatrix}$. Xác định giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$.

Bài giải. Biểu diễn $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B + C$.

Khi đó $A = B + C$ và $BC = CB = 0$. Từ đây suy ra $A^n = B^n + C^n$ và có $a_{11}(n) = 2^n, a_{12}(n) = a_{13}(n) = a_{21}(n) = a_{31}(n) = 0$. Quy nạp theo

n có $a_{22}(n) = 3^n, a_{23}(n) = 0, a_{32}(n) = 3^n - 2^n, a_{33}(n) = 2^n$. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n - 2^n} = 1$. $\square$

Ví dụ 2.2.6. [Fibonacci] Xét dãy $a_0 = a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ với $n \geq 1$. Khi đó

- (i) $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}$ và suy ra $\prod_{i=1}^n (a_{i-1}a_{i+1} + (-1)^i) = \prod_{i=1}^n a_i^2$.
- (ii) $a_n^4 = [a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n][a_{n+2}a_{n-2} - (-1)^n] = a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 1$.
- (iii) $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2$ luôn luôn là hợp số khi $n \geq 2$.
- (iv) $a_n + 1$ là hợp số khi $n \geq 3$.
- (v) $\sum_{k=0}^n a_k = a_{n+2} - 1$ và $\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} = a_{2n}, \sum_{k=0}^n a_{2k} = a_{2n+1} - 1$.

Bài giải. (i) Biểu diễn $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. Như vậy có biểu diễn $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \geq 1$. Đặt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ta được $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix}$. Vậy $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$ hay $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$. Lấy định thức ở hai vế để có đồng nhất thức $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}$.

(ii) Hiển nhiên có $a_{n+2} = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $a_{n+1} = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Do đó

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} &= (3a_{n-1} + 2a_{n-2})a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} \\ &= 2a_{n-2}^2 + a_{n-1}[3a_{n-2} - a_{n+1}] \\ &= 2a_{n-2}^2 + a_{n-1}[2a_{n-2} - 2a_{n-1}] \\ &= -2a_{n-1}^2 + a_{n-2}[2a_{n-2} + 2a_{n-1}] \\ &= 2a_{n-2}a_n - 2a_{n-1}^2 = 2(-1)^n. \end{aligned}$$

Vậy $a_n^4 = [a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^n][a_{n+2}a_{n-2} - (-1)^n] = a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 1$.

(iii) Vì $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 = a_na_{n+1}$ nên $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2$ luôn luôn là hợp số khi $n \geq 2$.

(iv) Nếu $a_n + 1 = p$ là số nguyên tố, $n \geq 3$, thì từ $a_n^4 = a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 1$ suy ra $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} \div p$. Vậy $a_{n+1}a_{n+2} \div p$. Nếu $a_{n+1} \div p$ thì $a_{n-1} \div p$: mâu thuẫn. Nếu $a_{n+2} \div p$ thì $a_{n+1} - 1 + a_n + 1 \div a_n + 1$ hay $a_{n+1} - 1 \div a_n + 1$. Vậy $a_{n-1} - 2 \div a_n + 1$: mâu thuẫn vì $n \geq 3$. Do đó $a_n + 1$ là hợp số.

(v) Suy ra từ điều kiện của dãy Fibonacci. $\square$

Ví dụ 2.2.7. [Dãy Lucas] Xét dãy số Lucas (L_n) xác định bởi $L_0 = 2, L_1 = 1$ và $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$(i) \quad L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n \text{ và } L_{2n-1} = L_n L_{n-1} - (-1)^n.$$

$$(ii) \quad a_{2n} = a_n L_n, \text{ ở đó } (a_n) \text{ là dãy số Fibonacci.}$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}, n \geq 1.$$

$$(iv) \quad L_{n+1}L_{n-1} = L_n^2 + 5(-1)^{n-1}.$$

$$(v) \quad \sum_{i=1}^n L_i = L_{n+2} - 3.$$

$$(vi) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(vii) Xác định công thức đóng cho dãy số Lucas.

$$(viii) \quad L_n L_{n+1} - 5F_n F_{n+1} = 2(-1)^n \text{ với } L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n, \text{ trong đó } F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0.$$

$$(ix) \quad L_{n-1}L_{n+1} + 5F_{n-1}F_{n+1} = L_n^2 + 5F_n^2.$$

Bài giải. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix}, n \geq 1.$

Vậy $\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, n \geq 1.$ Đặt $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có $x^2 - x - E = 0$. Phương trình đặc trưng $t^2 - t - 1 = 0$

có hai nghiệm $t_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Đặt $y = \begin{pmatrix} t_2 & 1 \\ t_1 & 1 \end{pmatrix}$. Ta có

$$y^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -t_1 & t_2 \end{pmatrix}. \text{Viết}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = x^n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = y^{-1} y x^n y^{-1} y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2^n & 0 \\ 0 & t_1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 & 1 \\ t_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Như vậy $L_n = t_2^n + t_1^n$.

(i) và (ii) được suy ra từ công thức tính L_n .

(iii) Đặt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dễ dàng có $\begin{pmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b \\ 3c+d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+3b \\ 4c+3d \end{pmatrix}$. Như vậy có $\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 4a+3b & 3a+b \\ 4c+3d & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

và ta suy ra $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}, n \geq 1$.

(iv) Từ (iii) ta suy ra (iv) bằng việc lấy định thức hai vế.

(v) và (vi) được suy ra từ công thức tính L_i .

(vii) Đặt $f = L_0 + L_1x + L_2x^2 + L_3x^3 + \dots$. Khi đó ta có $f(x+x^2) = f - 2 + x$.

Như vậy $(-1 + x + x^2)f = x - 2$ hay $f = \frac{x-2}{x^2+x-1}$.

(viii) Quy nạp theo n .

(ix) Từ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$ suy ra $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$. Lấy định thức hai vế ta được $L_{n-1}L_{n+1} + 5F_{n-1}F_{n+1} = L_n^2 + 5F_n^2$. $\square$

Ví dụ 2.2.8. Xét dãy $a_0 = a_1 = 1$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ với $n \geq 0$. Chứng minh rằng $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 9 \cdot 2^{2n+1}$ chia hết cho a_n^2 và $a_n^2 + 7 \cdot 2^n$ khi n là số nguyên dương chẵn.

Bài giải. (i) Biểu diễn $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. Như vậy ta có $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, n \geq 1$. Đặt $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ta

nhận được biểu diễn $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 Vậy $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+b \\ 5c+d \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+b & a+b \\ 5c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hay $\begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Lấy định thức ở hai vế để có được đồng nhất thức $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^{n-1}2^{n+1}$.
 (ii) Hiển nhiên $a_{n+2} = 39a_{n-1} + 22a_{n-2}$ và $a_{n+1} = 11a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Vậy

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} &= (39a_{n-1} + 22a_{n-2})a_{n-2} - a_{n+1}a_{n-1} \\ &= 22a_{n-2}^2 + a_{n-1}[39a_{n-2} - a_{n+1}] \\ &= 22a_{n-2}^2 + a_{n-1}[39a_{n-2} - (11a_{n-1} + 6a_{n-2})] \\ &= -11a_{n-1}^2 + 11a_{n-2}[2a_{n-2} + 3a_{n-1}] \\ &= 11a_{n-2}a_n - 11a_{n-1}^2 = (-1)^{n-2}11.2^n. \end{aligned}$$

Vậy $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} = [a_n^2 - 2(-1)^n.2^n][a_n^2 + 9(-1)^n.2^n]$. Từ đây suy ra hệ thức $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 9.2^{2n+1} = a_n^2(a_n^2 + (-1)^n.7.2^n)$ và như thế khi n là số nguyên dương chẵn có $a_{n+1}a_{n-1}a_{n+2}a_{n-2} + 9.2^{2n+1}$ chia hết cho a_n^2 và $a_n^2 + 7.2^n$. $\square$

Ví dụ 2.2.9. Với số nguyên dương n , hãy tính tổng $T = \sum_{k=1}^n (a_k b_{k-1} - a_{k-1} b_k)^2$ biết các số hạng a_n và b_n của hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 3, b_0 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 2b_n, n > 0. \end{cases}$$

Bài giải. Biểu diễn ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Đặt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Khi đó ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13a + 19b \\ 13c + 19d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 5b \\ 3c + 5d \end{pmatrix}$ và suy ra biểu diễn

$$\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13a + 19b & 3a + 5b \\ 13c + 19d & 3c + 5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lấy định thức hai vế được hệ thức $a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n = (-1)^{n-1} 2^{2n+1}$. Do vậy $T = 2^6 + 2^{10} + \dots + 2^{4n+2} = \frac{64(2^{4n} - 1)}{15}$. $\square$

Ví dụ 2.2.10. Xét ba dãy các số $(x_n), (y_n)$ và (z_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = 4, y_0 = 2, z_0 = 1 \\ x_{n+1} = -9x_n + 2y_n + 6z_n \\ y_{n+1} = 5x_n - 3z_n \\ z_{n+1} = -16x_n + 4y_n + 11z_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Biểu diễn x_n, y_n, z_n theo n .

Bài giải. Biểu diễn ma trận $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$. Như vậy $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$ và suy ra $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng $\begin{vmatrix} -9-x & 2 & 6 \\ 5 & -x & -3 \\ -16 & 4 & 11-x \end{vmatrix}$ có ba nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$ với ba vectơ riêng tương ứng là $(1; -1; 2), (2; -1; 3), x_3 = (2; -1; 4)$. Chéo hóa ma trận $P^{-1}AP =$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tóm lại chúng ta có biểu diễn $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ qua tích ba ma trận

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

2.3 Phương trình hàm trên $\mathbb{N}$

Mục này bàn về cách sử dụng cấp số nhân và ma trận để xét một vài phương trình hàm trên tập $\mathbb{N}$.

Ví dụ 2.3.1. Xét tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = 1, f(1) = -1 \\ f(n+2) = 7f(n+1) - 6f(n), n \geq 0. \end{cases}$$

Bài giải. Đặt $a_n = f(n), b_n = f(n-1), n \geq 1$. Khi đó
$$\begin{cases} a_1 = -1, b_1 = 1 \\ a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = a_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Do $a_{n+1} + tb_{n+1} = 7a_n - 6b_n + ta_n = (7+t)a_n - 6b_n$ nên ta sẽ chọn t sao cho $(7+t)t = -6$. Từ đó $t_1 = -1$ và $t_2 = -6$. Xét $a_{n+1} + tb_{n+1} = (7+t)(a_n + tb_n)$ và có $a_{n+1} + tb_{n+1} = (7+t)^n(a_1 + tb_1)$. Thay $t = -1$ và $t = -6$ được hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} a_n - b_n = -2 \cdot 6^{n-1} \\ a_n - 6b_n = -7. \end{cases}$$

Vậy $f(n) = a_n = b_{n+1} = \frac{-2 \cdot 6^n + 7}{5}$ với mọi $n \geq 0$. $\square$

Ví dụ 2.3.2. Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = 1, f(1) = 2 \\ f(n+2)f(n)^2 = f(n+1)^3, n \geq 0. \end{cases}$$

Bài giải. Bằng quy nạp, chỉ ra được $f(n) > 0$. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n)$ với $n \geq 0$. Khi đó
$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = \ln 2 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, n \geq 0. \end{cases}$$
 Giải ra được $a_n = \ln 2^{2^n - 1}$ và $f(n) = 2^{2^n - 1}$ với mọi $n \geq 0$. $\square$

Ví dụ 2.3.3. Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ thoả mãn điều kiện $f(0) = \frac{1}{14077} - \frac{4}{7}, f(n+1) = \frac{1}{4+7f(n)}$ với mọi $n \geq 0$ và xác định $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$.

Bài giải. Đồng bậc hoá qua việc đặt $f(n) = \frac{u_n}{v_n}, n \geq 1$. Khi đó $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n}{4v_n + 7u_n}, n \geq 1$. Có thể chọn dãy $(u_n), (v_n)$ thoả mãn $u_1 = 2011, v_1 = 1$ và
$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = 4v_n + 7u_n, n \geq 1. \end{cases}$$
 Xét $v_{n+1} + tu_{n+1} = 4v_n + 7u_n + tv_n = (4+t)v_n + 7u_n$. Chọn t sao cho $t(t+4) = 7$ hay t nhận $-2 \pm \sqrt{11}$ và $v_{n+1} + tu_{n+1} = (t+4)(v_n + tu_n) = \dots = (t+4)^n(v_1 + tu_1)$ với mọi $n \geq 1$. Như thế
$$\begin{cases} v_n + t_1 u_n = (t_1 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_1) \\ v_n + t_2 u_n = (t_2 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_2) \end{cases}$$
 hay có biểu diễn
$$\begin{cases} u_n = \frac{(t_1 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_1) + (t_2 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_2)}{t_1 - t_2} \\ v_n = \frac{-t_2(t_1 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_1) + t_1(t_2 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_2)}{t_1 - t_2}. \end{cases}$$

Ta có

$$f(n) = \frac{u_n}{v_n} = \frac{(t_1 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_1) + (t_2 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_2)}{-t_2(t_1 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_1) + t_1(t_2 + 4)^{n-1}(1 + 2011t_2)}$$

$$\begin{aligned} \text{và được } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{t_2 + 4}{t_1 + 4}\right)^{n-1} (1 + 2011t_2) + (1 + 2011t_1)}{t_1 \left(\frac{t_2 + 4}{t_1 + 4}\right)^{n-1} (1 + 2011t_2) - t_2(1 + 2011t_1)} \\ &= \frac{1 + 2011t_1}{-t_1(1 + 2011t_1)} = \frac{1}{-t_2} = \frac{-2 + \sqrt{11}}{7}. \quad \square \end{aligned}$$

Ví dụ 2.3.4. Giả sử hàm $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = e$ và $f(n) = f(n-1)^1 f(n-2)^2 \dots f(1)^{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh rằng

(i) $f(3) = e^3$ và $f(n+2)f(n) = f(n+1)^3$ với mọi số nguyên $n \geq 2$ và xác định $f(n)$ theo n .

(ii) $f(n) = e^{F_{2n-1}}$, trong đó $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0$.

Bài giải. (i) Đặt $a_n = \ln f(n)$. Ta có $a_1 = 1$ và $a_n = 1a_{n-1} + 2a_{n-2} + \dots + (n-1)a_1$. Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$. Khi đó có biểu diễn

$$f(x)(1x + 2x^2 + \dots + nx^n + \dots) = f(x) - x.$$

Từ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ta suy ra $1x + 2x^2 + \dots = \frac{x}{(x-1)^2}$. Vậy

$f(x) = x + \frac{x^2}{x^2 - 3x + 1}$ và được $f(x)(x^2 - 3x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$. Nhân ra và so sánh hệ số của x^n với $n \geq 1$ ở hai vế, nhận được $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3a_2$, và $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geq 2$. Vậy $f(3) = e^3$ và $f(n+2)f(n) = f(n+1)^3$ với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Từ công thức đóng $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 1} = x + 1 + \frac{3x - 1}{x^2 - 3x + 1}$ ta suy ra

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x - 1}{\left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)} = x + 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{a^2}{x - a} - \frac{b^2}{x - b} \right)$$

với $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Ta có $f(x) = x + 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{a}{bx - 1} - \frac{b}{ax - 1} \right)$

do $ab = 1$. Như vậy $f(x) = x + 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{b}{1 - ax} - \frac{a}{1 - bx} \right)$. Viết thành chuỗi

$$f(x) = x + 1 + \frac{b}{\sqrt{5}}(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots) - \frac{a}{\sqrt{5}}(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3 + \dots)$$

và nhận được công thức xác định $a_n = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}}$. Công thức xác định

$$f(n) = e^{\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}}} \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

$$(ii) \text{ Ta có } a_n = \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}}{\sqrt{5}} = F_{2n-1}.$$

Vậy $f(n) = e^{F_{2n-1}}$. $\square$

Ví dụ 2.3.5. Giả sử hàm $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện: $f(1) = e$ và $f(n) = \frac{f(n-2)^2 f(n-4)^4}{f(n-1)^1 f(n-3)^3} \dots$ với mọi số nguyên $n \geq 2$. Khi đó ta có

$$(i) f(n+2)f(n+1)^3f(n) = 1 \text{ với mọi } n \geq 2.$$

$$(ii) f(n) = e^{(-1)^{n-1}F_{2n-1}} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

$$(iii) \prod_{k=1}^{2n} f(k+1)^{\binom{2n}{k}} = e^{F_{2n-1}}.$$

Bài giải. (i) Đặt $a_n = \ln f(n)$. Khi đó ta có $a_1 = 1, a_n = -1a_{n-1} + 2a_{n-2} - \dots + (-1)^{n-1}(n-1)a_1$ với mọi số nguyên $n \geq 2$. Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$. Tích hai chuỗi lũy thừa

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \left(-1x + 2x^2 - 3x^3 + \dots \right) \\ &= -1a_1x^2 + (-1a_2 + 2a_1)x^3 + (-1a_3 + 2a_2 - 3a_1)x^4 + \dots \\ &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots = f(x) - x. \end{aligned}$$

Từ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$ suy ra chuỗi lũy thừa sau:

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5 - \dots. \text{ Do đó ta được}$$

$$\frac{-x}{(1+x)^2} = -1x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \dots. \text{ Thế vào } F(x) \text{ có}$$

$f(x) \left(\frac{-x}{(1+x)^2} \right) = f(x) - x$ hay $f(x) [x^2 + 3x + 1] = x^3 + 2x^2 + x$. Từ đồng nhất $[a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots] [x^2 + 3x + 1] = x^3 + 2x^2 + x$ sẽ suy ra

ngay $a_1 = 1, a_2 + 3a_1 = 2, a_3 + 3a_2 = 0, a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0, n \geq 2$. Vậy $f(n+2)f(n+1)^3f(n) = 1$ với mọi $n \geq 2$.

(ii) Từ công thức đóng $f = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 3x + 1} = x - 1 + \frac{3x + 1}{x^2 + 3x + 1}$ có

$$f = x - 1 + \frac{3x + 1}{\left(x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)} = x - 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{u^2}{x - u} - \frac{v^2}{x - v}\right)$$

với $u = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, v = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. Vậy $f = x - 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{u}{vx - 1} - \frac{v}{ux - 1}\right)$ do

$uv = 1$ và nhận được $f = x - 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{v}{1 - ux} - \frac{u}{1 - vx}\right)$. Viết thành chuỗi $f = x - 1 + \frac{v}{\sqrt{5}}(1 + ux + u^2x^2 + u^3x^3 + \dots) - \frac{u}{\sqrt{5}}(1 + vx + v^2x^2 + v^3x^3 + \dots)$ và

nhận được công thức xác định $a_n = \frac{u^{n-1} - v^{n-1}}{\sqrt{5}}$ hay $a_n = \frac{u^{n-1} - v^{n-1}}{\sqrt{5}} =$

$(-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}}{\sqrt{5}}$. Như vậy $a_n = (-1)^{n-1} F_{2n-1}$ và ta

có $f(n) = e^{(-1)^{n-1} F_{2n-1}}$ với mọi $n \geq 2$.

(iii) Vì $\sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k [u^k - v^k] = \frac{(1 + u)^{2n} - (1 + v)^{2n}}{\sqrt{5}}$ nên

$\sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{\sqrt{5}} = F_{2n-1}$ hay ta nhận được biểu

diễn $\sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k \ln f(k+1) = F_{2n-1}$. Từ đây suy ra $\prod_{k=1}^{2n} f(k+1)^{\binom{2n}{k}} = e^{F_{2n-1}}$. $\square$

Ví dụ 2.3.6. Xác định tất cả các hàm $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = e, g(0) = e^3 \\ f(n+1)g(n)^6 = f(n)^{17}e^{10} \\ g(n+1)g(n)^{12} = f(n)^{35}e^{22}, \text{ với } n \geq 0. \end{cases}$$

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n)$, với $n \geq 0$.

Khi đó $\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = 17a_n - 6b_n + 10 \\ b_{n+1} = 35a_n - 12b_n + 22, \end{cases}$ với $n \geq 0$.

Đặt $x_n = a_n + 1, y_n = b_n + 1$. Khi đó $\begin{cases} x_0 = 2, y_0 = 4 \\ x_{n+1} = 17x_n - 6y_n \\ y_{n+1} = 35x_n - 12y_n \end{cases}$ với mọi

$n \geq 0$. Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Bởi vì $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ nên ta có ngay quan hệ $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ và xác định được $a_n = x_n - 1 = 2(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 1$, $b_n = y_n - 1 = 2(7 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n) - 1$ với mọi số tự nhiên n . Từ đây suy ra $f(n) = e^{a_n} = e^{2(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 1}$, $g(n) = e^{2(7 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n) - 1}$. $\square$

Ví dụ 2.3.7. Xác định tất cả các hàm $f, g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = e^2, g(0) = e^{-1} \\ f(n) = f(n-1)^{21} g(n-1)^4 \\ g(n) = g(n-1)^2 f(n-1)^{23}, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $x_n = \ln f(n)$, $y_n = \ln g(n)$. Hai dãy số (x_n) , (y_n) xác định bởi hệ các phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x_0 = 2, y_0 = -1 \\ x_n = 21x_{n-1} + 4y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} + 23y_{n-1}, n \geq 1. \end{cases}$$

Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 2 \cdot 19^n$, $y_n = 19^n$. Tóm lại $f(n) = e^{2 \cdot 19^n}$, $g(n) = e^{19^n}$. $\square$

Ví dụ 2.3.8. Xác định tất cả các hàm $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = e^2, g(0) = e^3 \\ f(n+1)g(n)^6 = f(n)^{17} \\ g(n+1)g(n)^{12} = f(n)^{35}, \text{ với } n \geq 0. \end{cases}$$

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n)$, $b_n = \ln g(n)$ với $n \geq 0$.

Khi đó hai dãy số (a_n) và (b_n) xác định bởi: $\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = 17a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 35a_n - 12b_n, n > 0. \end{cases}$

Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ma trận $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}$ có phương trình đặc trưng $\begin{vmatrix} 17-x & -6 \\ 35 & -12-x \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Với giá trị

riêng $x = 2$ được vectơ riêng $(2; 5)$ và với giá trị riêng $x = 3$ được vectơ riêng $(3; 7)$. Hai vectơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và ta có ma trận hệ thức

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ hay } A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đây suy ra $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
hay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và nhận được công thức xác định a_n và b_n như sau: $\begin{cases} a_n = 12 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n \\ b_n = 28 \cdot 3^n - 25 \cdot 2^n, n \geq 0. \end{cases}$ Từ đó suy ra $f(n) = e^{12 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n}, g(n) = e^{28 \cdot 3^n - 25 \cdot 2^n}$. $\square$

Ví dụ 2.3.9. Giả sử các hàm $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e, g(0) = e^4 \\ f(n+1) = f(n)g(n)^4 \\ g(n+1) = f(n)^2g(n)^3, n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $|\ln f(n) - \ln g(n)| = 3$ với mọi $n \geq 0$ và $(\ln f(2012) + 2)(\ln g(2012) - 1)$ chia hết cho 5^{4024} , nhưng không chia hết cho 5^{4025} .

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n)$ với $n \geq 0$. Khi đó hai dãy số nguyên dương (a_n) và (b_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_0 = 1, b_0 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \\ n \geq 0. \end{cases}$$

Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-1 & -4 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$. Với giá trị riêng $x = 5$ được vectơ riêng $(1; 1)$ và với giá trị riêng $x = -1$ được vectơ riêng $(2; -1)$. Hai vectơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ và có ma trận hệ thức

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ hay } A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đây suy ra $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
 hay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ và nhận

được công thức xác định $\begin{cases} a_n = 3 \cdot 5^n - 2(-1)^n \\ b_n = 3 \cdot 5^n + (-1)^n \end{cases}$ với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Như vậy $|\ln f(n) - \ln g(n)| = 3, n \geq 0$. Kết quả $(\ln f(2012) + 2)(\ln g(2012) - 1)$ chia hết cho 5^{4024} , nhưng không thể chia hết cho 5^{4025} là hiển nhiên. $\square$

Ví dụ 2.3.10. Giả sử các hàm $f, g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^2, g(0) = e^3 \\ f(n+1)g(n)^6 = f(n)^{17} \\ g(n+1)g(n)^{12} = f(n)^{35}, n \geq 0. \end{cases}$$

Tìm dư của phép chia số $\ln f(2011) + \ln g(2011)$ cho 2011.

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n)$ với $n \geq 0$.

Khi đó hai dãy $(a_n), (b_n)$ xác định bởi $\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = 17a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 35a_n - 12b_n, n > 0. \end{cases}$ Biểu

diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ma trận $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}$ có phương trình đặc trưng

$\begin{vmatrix} 17-x & -6 \\ 35 & -12-x \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Với giá trị riêng $x = 2$

được vectơ riêng $(2; 5)$ và với giá trị riêng $x = 3$ được vectơ riêng $(3; 7)$. Hai

vectơ này độc lập tuyến tính. Đặt $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch

đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ và ta có ma trận hệ thức

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ hay } A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Từ đây suy ra $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

hay $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ và nhận được công

thức xác định a_n và b_n như sau: $\begin{cases} a_n = 12.3^n - 10.2^n \\ b_n = 28.3^n - 25.2^n, n \geq 0. \end{cases}$ Do bởi $3^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ và $2^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$ nên $\ln f(2011) + \ln g(2011)$ chia cho 2011 được $40.3 - 35.2 = 50$. $\square$

Ví dụ 2.3.11. Giả sử các hàm $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^a, g(0) = e^b \\ f(n+1)g(n)^6 = f(n)^{17}e^{22} \\ g(n+1)g(n)^{12} = f(n)^{35}e^{48}, n \geq 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

(i) $\ln f(n) \equiv 3^{n+2} - 1 \pmod{2^{n+3}}$, $\ln g(n) \equiv -5.2^{n+2} + 1 \pmod{3^{n+1}}$
và quan hệ $12 \ln f(n) - 5 \ln g(n) = 3^{n+1} + 2^{n+2} - 17$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ khi $a = 0, b = 2$.

(ii) $7 \ln f(n) + 10 = 3 \ln g(n)$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ khi $a = 2, b = 8$.

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $x_n = \ln f(n), y_n = \ln g(n)$ với $n \geq 0$. Khi đó hai dãy $(x_n), (y_n)$ xác định bởi $x_0 = a, y_0 = b$ và số hạng khác:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 17x_n - 6y_n + 22 \\ y_{n+1} = 35x_n - 12y_n + 48, n \geq 0. \end{cases}$$

(i) Phép biến đổi $\begin{cases} x_{n+1} + 1 = 17(x_n + 1) - 6(y_n - 1) \\ y_{n+1} - 1 = 35(x_n + 1) - 12(y_n - 1). \end{cases}$ Nếu coi $x_n + 1$ và $y_n - 1$ như a_n và b_n thì có biểu diễn dạng ma trận sau đây

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Vì $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ nên ta có biểu diễn
 $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hay có biểu diễn

$$\begin{pmatrix} x_n + 1 \\ y_n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.2^n + 9.3^n \\ -20.2^n + 21.3^n \end{pmatrix} \text{ hay } \begin{cases} x_n = -8.2^n + 9.3^n - 1 \\ y_n = -20.2^n + 21.3^n + 1. \end{cases}$$

Việc kiểm tra $12 \ln f(n) - 5 \ln g(n) = 3^{n+1} + 2^{n+2} - 17$ để có (i) với mọi số nguyên $n \geq 0$ là tầm thường.

(ii) Biểu diễn $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ hay có
 $\begin{pmatrix} x_n + 1 \\ y_n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} \\ 7.3^n \end{pmatrix}$. Như vậy $\ln f(n) = x_n = 3^{n+1} - 1, \ln g(n) = y_n =$

$7 \cdot 3^n + 1$. Từ đây suy ra $7 \ln f(n) + 10 = 3 \ln g(n)$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ khi $a = 2, b = 8$. $\square$

Ví dụ 2.3.12. Xác định tất cả các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = e, g(0) = e^2, h(0) = e^4 \\ f(n+1) = f(n)^2 g(n) \\ g(n+1)h(n) = g(n) \\ h(n+1) = g(n)^2 h(n)^4, \text{ với } n \geq 0. \end{cases}$$

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$ với $n \geq 0$. Khi đó ba dãy số $(a_n), (b_n), (c_n)$ xác định bởi $a_0 = 1, b_0 = 2, c_0 = 4$ và:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = b_n - c_n \\ c_{n+1} = 2b_n + 4c_n, n > 0. \end{cases}$$

Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x-3)$. Với giá trị riêng $x = 2$ được một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $(1; 0; 0)$; với giá trị riêng $x = 3$ được vectơ riêng $(1; 1; -2)$. Hai vectơ trên độc lập tuyến tính, không lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Vậy ma trận $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ không thể chéo hoá được.

Để giải quyết tình huống này, biến đổi $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và suy ra $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2)(x-3)$. Với giá trị riêng $x = 2$ được một vectơ riêng độc lập tuyến tính là $(1; -1)$; với giá trị riêng $x = 3$ được vectơ riêng $(1; -2)$. Hai vectơ này độc lập tuyến tính, lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ và ta có ngay ma trận $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ hay ta có

được $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$. Từ đây suy ra biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

hay $b_n = 8.2^n - 6.3^n = 2^{n+3} - 2.3^{n+1}$, $c_n = -2^{n+3} + 4.3^{n+1}$.

Vấn đề xác định a_n . Vì $a_{n+1} = 2a_n + b_n = 2a_n + 2^{n+3} - 2.3^{n+1}$ nên ta tìm

a_n trong dạng $a_n = (un + v)2^n + t3^n$. Ta có hệ $\begin{cases} v + t = a_0 = 1 \\ 2u + 2v + 3t = a_1 = 4 \\ 8u + 4v + 9t = a_2 = 6. \end{cases}$

Giải ra được $u = 4, t = -6, v = 7$ và $a_n = (4n + 7)2^n - 2.3^{n+1}$. Từ đây suy ra $f(n) = e^{(4n+7)2^n - 2.3^{n+1}}$, $g(n) = e^{2^{n+3} - 2.3^{n+1}}$, $h(n) = e^{-2^{n+3} + 4.3^{n+1}}$. $\square$

Ví dụ 2.3.13. Xác định tất cả các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^a, g(0) = e^b, h(0) = e^c \\ f(n+1)h(n)^3 = f(n)^4g(n)^3 \\ g(n+1)h(n)^2 = f(n)^2g(n)^3 \\ h(n+1)h(n)^3 = f(n)^4g(n)^4, \text{ với } n \geq 0. \end{cases}$$

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$ với $n \geq 0$. Khi đó ba dãy $(a_n), (b_n), (c_n)$ xác định bởi $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$ và

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c \\ a_{n+1} = 4a_n + 3b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = 4a_n + 4b_n - 3c_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Vì $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ nên ta có

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ hay}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 \\ 2.2^n - 1 \\ 4.2^n - 3 \end{pmatrix}. \text{ Do đó ta nhận được } \begin{cases} a_n = 3.2^n - 2 \\ b_n = 2.2^n - 1 \\ c_n = 4.2^n - 3 \end{cases} \text{ với mọi số}$$

tự nhiên n . Từ đây suy ra $f(n) = e^{3.2^n - 2}, g(n) = e^{2.2^n - 1}, h(n) = e^{4.2^n - 3}$. $\square$

Ví dụ 2.3.14. Xác định các hàm $f, g, h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} f(1) = 3, g(1) = 4, h(1) = 5 \\ f(n+1) = 3f(n) + 2h(n) + 1 \\ g(n+1) = 3f(n) + 2h(n) + 2 \\ h(n+1) = 4f(n) + 3h(n) + 2, n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Chứng minh rằng $2f(n)g(n) + 1$ là một số chính phương.

(ii) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{h(n)}$.

Bài giải. (i) Ký hiệu $x_n = f(n), y_n = g(n), z_n = h(n)$. Ta có sự tương đương giữa hệ đã cho và hệ truy hồi sau đây:

$$\begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5 \\ x_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 1 \\ z_{n+1} = 4x_n + 3z_n + 2 \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Đặt $x_n = t_n - \frac{1}{2}$ ta có hệ sau tương đương với hệ ban đầu:

$$\begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5 \\ t_{n+1} = 3t_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 4t_n + 3z_n \\ x_{n+1} = t_{n+1} - \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Ta biểu diễn $t_{n+1} + \lambda z_{n+1} = (3 + 4\lambda)t_n + (2 + 3\lambda)z_n$. Chọn λ để sao cho $(2 + 3\lambda) = \lambda(3 + 4\lambda)$ hay $4\lambda^2 - 2 = 0$. Khi đó $\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ và $t_{n+1} + \lambda z_{n+1} = (3 + 4\lambda)^n(t_1 + \lambda z_1)$. Với $\lambda = \lambda_{1,2}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} t_{n+1} + \lambda_1 z_{n+1} = (3 + 4\lambda_1)^n(t_1 + \lambda_1 z_1), (1) \\ t_{n+1} + \lambda_2 z_{n+1} = (3 + 4\lambda_2)^n(t_1 + \lambda_2 z_1), (2). \end{cases}$$

Với (1), (2) ta có $2x_n y_n + 1 = z_n^2$ với mọi $n \geq 0$.

(ii) Từ (1) và (2) suy ra các công thức xác định $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ dưới đây:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ z_{n+1} = \frac{(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - (3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, n \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{hay}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(n+1) = -\frac{1}{2} + \frac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4} \\ g(n+1) = \frac{1}{2} + \frac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4} \\ h(n+1) = \frac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) - (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}, n \geq 0. \end{array} \right.$$

(ii) Dễ dàng suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

Ví dụ 2.3.15. Xác định các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = e^3, g(0) = e^2, h(0) = e^4 \\ f(n+1)h(n)^3 = f(n)^4g(n)^3 \\ g(n+1)h(n)^2 = f(n)^2g(n)^3 \\ h(n+1)h(n)^3 = f(n)^4g(n)^4, n \geq 0 \end{array} \right.$$

và chỉ ra $(\ln f(n)^2)^2 + (\ln h(n)^2)^2 = (\ln g(n)^5)^2$ với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n =$

$\ln h(n)$ ta có biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Vì $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ nên ta có

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ hay biểu diễn

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n \\ 2 \cdot 2^n \\ 4 \cdot 2^n \end{pmatrix}$. Do đó ta có công thức $f(n) = e^{3 \cdot 2^n}, g(n) = e^{2^{n+1}}, h(n) =$

$e^{2^{n+2}}$ và $(\ln f(n)^2)^2 + (\ln h(n)^2)^2 = (\ln g(n)^5)^2$ với mọi số nguyên $n \geq 0$.

0. $\square$

Ví dụ 2.3.16. Giả sử các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^3, g(0) = e^4, h(0) = e^5 \\ f(n+1) = ef(n)^3h(n)^2 \\ g(n+1) = e^2f(n)^3h(n)^2 \\ h(n+1) = e^2f(n)^4h(n)^3, n \geq 0. \end{cases}$$

(i) Chứng minh rằng $\ln^2 h(n) = \ln^2 f(n) + \ln^2 g(n)$ và $2 \ln f(n) \ln g(n) + 1 = \ln^2 h(n)$ với mọi $n \geq 0$.

(ii) Xác định $f(n), g(n), h(n)$ theo n .

(iii) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln h(n)}$.

Bài giải. (i) Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$ ta có sự tương đương giữa hệ đã cho và hệ truy hồi sau đây:

$$\begin{cases} x_0 = 3, y_0 = 4, z_0 = 5 \\ x_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 1 \\ z_{n+1} = 4x_n + 3z_n + 2 \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, n \geq 0. \end{cases}$$

Đặt $x_n = t_n - \frac{1}{2}$ ta có hệ sau tương đương với hệ ban đầu:

$$\begin{cases} x_0 = 3, y_0 = 4, z_0 = 5 \\ t_{n+1} = 3t_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 4t_n + 3z_n + 1 \\ x_{n+1} = t_{n+1} - \frac{1}{2} \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, n \geq 0. \end{cases}$$

Ta biểu diễn $t_{n+1} + \lambda z_{n+1} = (3 + 4\lambda)t_n + (2 + 3\lambda)z_n$. Chọn λ để sao cho $(2 + 3\lambda) = \lambda(3 + 4\lambda)$ hay $4\lambda^2 - 2 = 0$. Khi đó $\lambda_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$ và $t_{n+1} + \lambda z_{n+1} = (3 + 4\lambda)^n(t_1 + \lambda z_1)$. Với $\lambda = \lambda_{1,2}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} t_n + \lambda_1 z_n = (3 + 4\lambda_1)^n(t_0 + \lambda_1 z_0), (1) \\ t_n + \lambda_2 z_n = (3 + 4\lambda_2)^n(t_0 + \lambda_2 z_0), (2). \end{cases}$$

Với (1), (2) ta có $2t_n^2 - z_n^2 = 2t_0^2 - z_0^2$. Vậy $z_n^2 = 2x_n^2 + 2x_n + 1 = x_n^2 + (x_n + 1)^2 = x_n^2 + y_n^2$ và $2x_n y_n + 1 = z_n^2$ với mọi $n \geq 0$. Từ đó suy ra $\ln^2 h(n) = \ln^2 f(n) + \ln^2 g(n)$ và $2 \ln f(n) \ln g(n) + 1 = \ln^2 h(n)$ với mọi $n \geq 0$.

(ii) Từ (1) và (2) suy ra các công thức xác định x_n, y_n, z_n dưới đây:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ y_n = \frac{1}{2} + \frac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ z_n = \frac{(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - (3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, n \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{hay}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4} \\ y_n = \frac{1}{2} + \frac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4} \\ z_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) - (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}, n \geq 0. \end{array} \right.$$

Điều đặc biệt là dãy các số nguyên dương x_n, y_n, z_n được tính qua $\sqrt{2}$. Như vậy $f(n) = e^{x_n}, g(n) = e^{y_n}$ và $h(n) = e^{z_n}$.

(iii) Dễ dàng suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(n)}{\ln h(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{z_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 2.3.17. Xác định các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ biết chúng thoả mãn hệ

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = e^{12}, g(0) = e^8, h(0) = e^{16} \\ f(n)h(n-1)^{21} = f(n-1)^{30}g(n-1)^{21} \\ g(n)h(n-1)^{14} = f(n-1)^{14}g(n-1)^{23} \\ h(n)h(n-1)^{19} = f(n-1)^{28}g(n-1)^{28}, n \geq 1 \end{array} \right.$$

và chỉ ra $\ln f(n) : 2^{4n+2}, \ln g(n) : 2^{4n+3}, \ln h(n) : 2^{4n+4}$ và không chia hết $\ln f(n) \nmid 2^{4n+3}, \ln g(n) \nmid 2^{4n+4}, \ln h(n) \nmid 2^{4n+5}$ với mọi $n \geq 0$.

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $x_n = \ln f(n), y_n = \ln g(n), z_n = \ln h(n)$
Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi hệ các phương trình sau đây:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ x_n = 30x_{n-1} + 21y_{n-1} - 21z_{n-1} \\ y_n = 14x_{n-1} + 23y_{n-1} - 14z_{n-1} \\ z_n = 28x_{n-1} + 28y_{n-1} - 19z_{n-1}, n \geq 1. \end{array} \right.$$

Xét $x_n + ty_n = (30 + 14t)x_{n-1} + (21 + 23t)y_{n-1} - (21 + 14t)z_{n-1}$. Chọn t sao cho $21 + 23t = t(30 + 14t)$ hay $2t^2 + t - 3 = 0$ và như vậy $t = 1$

hoặc $t = -\frac{3}{2}$. Với $t = -\frac{3}{2}$ ta có $x_n - \frac{3}{2}y_n = 9(x_{n-1} - \frac{3}{2}y_{n-1})$ và suy ra $x_n - \frac{3}{2}y_n = 9^n(x_0 - \frac{3}{2}y_0) = 9^n(12 - \frac{3}{2}8) = 0$. Ta nhận được $x_n = \frac{3}{2}y_n$. Xét $y_n + uz_n = (14 + 28u)x_{n-1} + (23 + 28u)y_{n-1} - (14 + 19u)z_{n-1}$. Chọn u sao cho $(23 + 28u)u = -14 - 19u$ hay $28u^2 + 42u + 14 = 0$ và như vậy $u = -1$ hoặc $u = -\frac{1}{2}$. Với $u = -\frac{1}{2}$ ta có $y_n - \frac{1}{2}z_n = 9(y_{n-1} - \frac{1}{2}z_{n-1})$ và suy ra $y_n - \frac{1}{2}z_n = 9^n(y_0 - \frac{1}{2}z_0) = 9^n(8 - \frac{1}{2}16) = 0$. Ta nhận được $y_n = \frac{1}{2}z_n$. Tóm lại ta có

$$\begin{cases} x_n = \frac{3}{2}y_n \\ y_n = \frac{1}{2}z_n \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_n = \frac{3}{4}z_n \\ y_n = \frac{1}{2}z_n, n \geq 0. \end{cases} \quad \text{Quy nạp theo } n \text{ dễ dàng suy ra}$$

$x_n = 12 \cdot 16^n, y_n = 8 \cdot 16^n, z_n = 16 \cdot 16^n$. Tóm lại $f(n) = e^{3 \cdot 2^{4n+2}}, g(n) = e^{2^{4n+3}}$ và $h(n) = e^{2^{4n+4}}$ thoả mãn $\ln f(n) : 2^{4n+2}, \ln g(n) : 2^{4n+3}, \ln h(n) : 2^{4n+4}$ và không chia hết $\ln f(n) \not\vdots 2^{4n+3}, \ln g(n) \not\vdots 2^{4n+4}, \ln h(n) \not\vdots 2^{4n+5}$ với mọi $n \geq 0$. $\square$

Ví dụ 2.3.18. Giả sử các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^a, g(0) = e^b, h(0) = e^c \\ f(n+1)h(n)^3 = f(n)^4g(n)^3 \\ g(n+1)h(n)^2 = f(n)^2g(n)^3 \\ h(n+1)h(n)^3 = f(n)^4g(n)^4, n \geq 0. \end{cases}$$

Khi đó hãy chứng minh các kết quả sau:

- (i) $\ln f(n) + \ln g(n) = \ln h(n)$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ khi $a = 1, b = 2, c = 3$.
- (ii) $\ln f(2010) \equiv \ln g(2010) + \ln h(2010) \pmod{2011}$ khi $a = 3, b = 2, c = 1$.
- (iii) $\ln f(n) \ln h(n) = 3 \ln^2 g(n)$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ khi $a = 12, b = 8, c = 16$.

Bài giải. Lấy lôga ln hai vế và đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$. Khi đó ba dãy $(a_n), (b_n), (c_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c \\ a_{n+1} = 4a_n + 3b_n - 3c_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n - 2c_n \\ c_{n+1} = 4a_n + 4b_n - 3c_n \\ n > 0. \end{cases}$$

Biểu diễn dạng ma trận $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ và như vậy có

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Phương trình đặc trưng của $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ là $\begin{vmatrix} x-4 & -3 & 3 \\ -2 & x-3 & 2 \\ -4 & -4 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$. Với giá trị riêng $x=1$ được hai vectơ riêng độc lập tuyến tính là $(1; 2; 3)$ và $(1; 1; 2)$; với giá trị riêng $x=2$ được vectơ riêng $(3; 2; 4)$. Ba vectơ này độc lập tuyến tính.

Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó ma trận nghịch đảo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

và ta có ngay ma trận hệ thức $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hay ta có được

$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$. Từ đây suy ra biểu diễn dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

(i) Ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 2^n & 1 \\ 2 & 2 \cdot 2^n & 1 \\ 3 & 4 \cdot 2^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ khi $a=1, b=2$ và $c=3$. Như vậy $a_n=1, b_n=2, c_n=3$ và $\ln f(n) + \ln g(n) = \ln h(n)$ với mọi $n \geq 0$.

(ii) Ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 2^n & 1 \\ 2 & 2 \cdot 2^n & 1 \\ 3 & 4 \cdot 2^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ khi $a=3, b=2$ và $c=1$.

Như vậy $a_n = 3 \cdot 2^{n+2} - 9, b_n = 2^{n+3} - 6, c_n = 2^{n+4} - 15$ với mọi $n \geq 0$. Từ đây suy ra $\ln f(2010) \equiv \ln g(2010) + \ln h(2010) \pmod{2011}$

(iii) Ta có $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \cdot 2^n & 1 \\ 2 & 2 \cdot 2^n & 1 \\ 3 & 4 \cdot 2^n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ khi $a=12, b=8$ và $c=16$.

Như vậy $a_n = 3 \cdot 2^{n+2}, b_n = 2^{n+3}, c_n = 2^{n+4}$ với mọi $n \geq 0$. Từ đây suy ra $\ln f(n) \ln h(n) = 3 \ln^2 g(n)$. $\square$

2.4 Xây dựng phương trình hàm từ bài toán đã biết

Ví dụ 2.4.1. Giả sử các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^{12}, g(0) = e^8, h(0) = e^{16} \\ \begin{pmatrix} \ln f(n) \\ \ln g(n) \\ \ln h(n) \end{pmatrix} = (A^2 + A + E) \begin{pmatrix} \ln f(n-1) \\ \ln g(n-1) \\ \ln h(n-1) \end{pmatrix}, n > 0 \\ \text{với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hãy xác định ước chung lớn nhất $(\ln f(2011), \ln g(2011), \ln h(2011))$.

Bài giải. Đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = (A^2 + A + E) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 12 \cdot 7^n, y_n = 8 \cdot 7^n, z_n = 16 \cdot 7^n$. Từ đây suy ra ước chung lớn nhất $(\ln f(2011), \ln g(2011), \ln h(2011)) = 4 \cdot 7^{2011}$. $\square$

Ví dụ 2.4.2. Giả sử các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^{12}, g(0) = e^8, h(0) = e^{16} \\ \begin{pmatrix} \ln f(n) \\ \ln g(n) \\ \ln h(n) \end{pmatrix} = (A^2 + 2A + 4E) \begin{pmatrix} \ln f(n-1) \\ \ln g(n-1) \\ \ln h(n-1) \end{pmatrix}, n > 0 \\ \text{với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hãy chứng minh $4 \ln f(n) = 6 \ln g(n) = 3 \ln h(n)$ với mọi $n \geq 0$.

Bài giải. Đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = (A^2 + 2A + 4E) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 12.12^n, y_n = 8.12^n, z_n = 16.12^n$. Từ đây suy ra $4 \ln f(n) = 6 \ln g(n) = 3 \ln h(n)$ với mọi $n \geq 0$. $\square$

Ví dụ 2.4.3. Giả sử các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^{12}, g(0) = e^8, h(0) = e^{16} \\ \begin{pmatrix} \ln f(n) \\ \ln g(n) \\ \ln h(n) \end{pmatrix} = (2A^2 + A + 6E) \begin{pmatrix} \ln f(n-1) \\ \ln g(n-1) \\ \ln h(n-1) \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \\ \text{với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hãy chứng minh $\ln f(n) : 2^{4n+2}, \ln g(n) : 2^{4n+3}, \ln h(n) : 2^{4n+4}$ và không chia hết $\ln f(n) \nmid 2^{4n+3}, \ln g(n) \nmid 2^{4n+4}, \ln h(n) \nmid 2^{4n+5}$ với mọi $n \geq 0$.

Bài giải. Đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = (2A^2 + A + 6E) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 12.16^n, y_n = 8.16^n, z_n = 16.16^n$. Từ đây suy ra $\ln f(n) : 2^{4n+2}, \ln g(n) : 2^{4n+3}, \ln h(n) : 2^{4n+4}$ và không chia hết $\ln f(n) \nmid 2^{4n+3}, \ln g(n) \nmid 2^{4n+4}, \ln h(n) \nmid 2^{4n+5}$ với mọi $n \geq 0$. $\square$

Ví dụ 2.4.4. Giả sử các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^1, g(0) = e^2, h(0) = e^3 \\ \begin{pmatrix} \ln f(n) \\ \ln g(n) \\ \ln h(n) \end{pmatrix} = (A^2 + A + E) \begin{pmatrix} \ln f(n-1) \\ \ln g(n-1) \\ \ln h(n-1) \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \\ \text{với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\ln f(n) + \ln g(n) = 3^{n+1}$.

Bài giải. Đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = (A^2 + A + E) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \text{ và } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 3^n, y_n = 2 \cdot 3^n, z_n = 3^{n+1}$. Từ đây suy ra $\ln f(n) + \ln g(n) = 3^{n+1}$. $\square$

Ví dụ 2.4.5. Giả sử các hàm $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases} f(0) = e^1, g(0) = e^2, h(0) = e^3 \\ \begin{pmatrix} \ln f(n) \\ \ln g(n) \\ \ln h(n) \end{pmatrix} = (A^2 + 2A + 4E) \begin{pmatrix} \ln f(n-1) \\ \ln g(n-1) \\ \ln h(n-1) \end{pmatrix} \text{ với } n > 0 \\ \text{với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\ln f(n) \ln g(n) = 2 \cdot 7^{2n}$.

Bài giải. Đặt $a_n = \ln f(n), b_n = \ln g(n), c_n = \ln h(n)$. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 3 \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = (A^2 + 2A + 4E) \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n > 0 \text{ với } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sử dụng quy nạp theo n được $x_n = 7^n, y_n = 2 \cdot 7^n, z_n = 3 \cdot 7^n$. Từ đây suy ra $\ln f(n) \ln g(n) = 2 \cdot 7^{2n}$. $\square$

2.5 Kết luận

Trong luận văn này chúng tôi đã trình bày được những vấn đề cơ bản sau:

- (1) Sử dụng đại số tuyến tính, ma trận và định thức, vào giải hệ truy hồi.
- (2) Xây dựng được những phương trình hàm mới trên tập $\mathbb{N}$.
- (3) Xây dựng được một vài phương trình hàm mới qua phương trình đã biết.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), 2008, *Chuyên đề chọn lọc Dãy số và áp dụng*, Nhà Xuất bản Giáo dục.
- [2] Đàm Văn Nhỉ, 2011, *Ma trận vuông và dãy số*, Bản tin dạy và Học trong nhà trường DHSP Hà Nội số 2.
- [3] Lê Đình Thịnh, 2001, *Phương trình sai phân và một số ứng dụng*, NXB Giáo dục.
- [4] Nguyễn Duy Thuận (chủ biên), Phi Mạnh Ban, Nông Quốc Chinh, 2003, *Đại Số Tuyến Tính*, NXB Đại học Sư phạm.