ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Lưu Thị Minh Thuỷ

CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC ĐẠI SỐ SINH BỞI HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Lưu Thị Minh Thuỷ

CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC ĐẠI SỐ SINH BỞI HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu

Đồng nhất thức là một trong những khái niệm cơ bản của chương trình Toán ở bậc học phổ thông. Đặc biệt, ở các trường THPT chuyên và các lớp chuyên toán có rất nhiều dạng toán liên quan đến đồng nhất thức. Trong các đề thi tuyển sinh đến các đề thi học sinh giỏi các cấp có nhiều bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình ...được giải bằng cách áp dụng các đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác. Hiện nay các tài liệu có tính hệ thống về vấn đề này còn chưa được đề cập nhiều.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và giảng dạy môn Toán ở bậc phổ thông, luận văn "Các đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác và áp dụng" nhằm hệ thống và giải quyết các bài toán liên quan đến đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác. Luận văn được chia ra làm ba chương.

Chương 1 - Nêu một số đồng nhất thức giữa các hàm số và đa thức lượng giác, đồng thời trình bày các hệ thức lượng giác trong tam giác và một số dạng hệ thức lượng giác trong hình học.

Chương 2 - Trình bày các đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm sin, hàm cosin, hàm tang và hàm cotang. Đặc biệt trong chương này còn trình bày một số đồng nhất thức hàm và áp dụng của đồng nhất thức hàm để sinh ra các bài toán về chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

Chương 3 - Sử dụng các đồng nhất thức đại số nêu ở chương 2 để giải và biện luận phương trình bậc ba, giải và biện luận hệ phương trình đại số. Phần cuối của chương trình bày một số dạng bất đẳng thức đại số được giải bằng biến đổi lượng giác.

Để hoàn thành luận văn này, trước nhất tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã dành thời gian hướng dẫn, chỉ bảo tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình xây dựng đề tài cũng như hoàn thiện luận văn. Tiếp theo, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành các thầy cô đã đọc, kiểm tra, đánh giá và cho những ý kiến quý báu để luận văn được đầy đủ hơn, phong phú hơn. Qua đây, tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu, phòng Sau Đại học, phòng Đào tạo, khoa

Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian, trình độ và điều kiện nghiên cứu còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, Tháng 07 năm 2013.

Lưu Thị Minh Thủy

Chương 1

Đẳng thức lượng giác

1.1 Một số đồng nhất thức giữa các đa thức lượng giác

1.1.1 Định nghĩa và tính chất của đa thức lượng giác

Định nghĩa 1.1 (Xem [5]). Hàm số có dạng

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

trong đó a_n và b_n không đồng thời bằng 0 (tức là $a_n^2 + b_n^2 > 0$), $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ với $i = 0, 1, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n$ được gọi là *đa thức lượng giác bậc n* ($n \in \mathbb{N}^*$). Khi tất cả các $b_j = 0$ với $j = 1, 2, \ldots, n$ ta có

Định nghĩa 1.2 (Xem [5]). Hàm số có dạng

$$C_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx \qquad (a_n \neq 0),$$

được gọi là *đa thức lượng giác bậc n theo cosin*. Tương tự, khi tất cả các $a_i = 0$ với $i = 0, 1, \ldots, n$ ta có

Định nghĩa 1.3 (Xem [5]). Hàm số có dạng

$$S_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx \quad (b_n \neq 0),$$

được gọi là *đa thức lượng giác bậc n theo sin*.

Sau đây, ta liệt kê một số tính chất đơn giản của đa thức lượng giác.

Tính chất 1.1. Tổng của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc nhỏ hơn hoặc bằng $\max\{n, m\}$.

Tính chất 1.2. Tích của hai đa thức lượng giác $A_n(x)$ và $B_m(x)$ là một đa thức lượng giác có bậc bằng $n + m$.

Tính chất 1.3. Nếu đa thức lượng giác

$$A_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

đồng nhất bằng 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$, thì tất cả các hệ số của nó đều bằng 0, tức là

$$a_0 = a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \cdots = a_n = b_n = 0.$$

1.1.2 Một số đồng nhất thức giữa các hàm số lượng giác

Bài toán 1.1. Biểu diễn các hàm số $\sin^n x$ và $\cos^n x$ dưới dạng các đa thức lượng giác.

Lời giải. Giả sử $z = \cos t + i \sin t$. Khi đó

$$z^{-1} = (\cos t + i \sin t)^{-1} = \cos t - i \sin t.$$

Do đó

$$\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad \text{và} \quad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}\cdot$$

Ta có

$$(z + z^{-1})^n = z^n + C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} + \cdots + C_n^{n-1} z z^{-n+1} + z^{-n}$$
$$= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) + C_n^1 (z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + C_n^{\frac{n}{2}} & \text{(nếu } n \text{ chẵn)}, \\ (z^n + z^{-n}) + C_n^1 (z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}} (z + z^{-1}) & \text{(nếu } n \text{ lẻ)}. \end{cases}$$

Và

$$(z - z^{-1})^n = z^n - C_n^1 z^{n-1} z^{-1} + C_n^2 z^{n-2} z^{-2} + \cdots + (-1)^n z^{-n}$$
$$= \begin{cases} (z^n + z^{-n}) - C_n^1 (z^{n-2} + z^{-(n-2)}) + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, \\ (z^n - z^{-n}) - C_n^1 (z^{n-2} - z^{-(n-2)}) + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} (z - z^{-1}). \end{cases}$$

Vậy

$$\cos^n x = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}} \Big[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + \dfrac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} \Big] & \text{(nếu } n \text{ chẵn)}, \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \Big[\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}} \cos x \Big] & \text{(nếu } n \text{ lẻ)}. \end{cases}$$

$$\sin^n x = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} \Big[2\cos nx - 2C_n^1 \cos(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}} \Big], \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n} \Big[2\sin nx - 2i C_n^1 \sin(n-2)x + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_n^{\frac{n-1}{2}} 2 \sin x \Big]. \end{cases}$$

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin^{2p} x$ (p là một số tự nhiên) là một đa thức lượng giác theo cosin.

Lời giải. Từ công thức $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dễ dàng suy ra

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\cdot$$

Do đó

$$\sin^{2p} x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^{2p},$$

suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k . e^{ikx} . e^{-i(2p-k)x} \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k . e^{2ikx - 2ipx} + \sum_{k=p+1}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k . e^{2i(k-p)x}\right) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_{2p}^k (e^{2i(k-p)x} + e^{-2i(k-p)x}) + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}} \\ &= \frac{(-1)^p}{2^{2p-1}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k . C_{2p}^k . \cos 2(k-p)x + \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}\cdot \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là một đa thức lượng giác bậc $2p$ theo cosin.

Bài toán 1.3. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d. Tính các tổng sau:

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin a_k$,

b) $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos a_k$.

Lời giải.

a) - Nếu $d = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $S_n = n \sin a_1$.

- Nếu $d \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $\sin \dfrac{d}{2} \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} 2 \sin a_n \sin \frac{d}{2} &= 2 \sin[a_1 + (n-1)d] \sin \frac{d}{2} \\ &= \cos \Big[a_1 + (n - \frac{3}{2})d\Big] - \cos \Big[a_1 + (n - \frac{1}{2})d\Big]. \end{aligned}$$

Xét $g(n)=\cos\Big[a_1+(n-\dfrac{3}{2})d\Big]$, ta có

$$2\sin a_n.\sin\frac{d}{2}=g(n)-g(n+1).$$

Vậy

$$\begin{cases}2\sin a_1.\sin\dfrac{d}{2}=g(1)-g(2),\\ 2\sin a_2.\sin\dfrac{d}{2}=g(2)-g(3),\\ \dots\dots\dots\\ 2\sin a_n.\sin\dfrac{d}{2}=g(n)-g(n+1).\end{cases}$$

Cộng các đồng nhất thức theo vế, ta được

$$\begin{aligned}2S_n\sin\frac{d}{2}&=g(1)-g(n+1)\\ &=\cos\Big(a_1-\frac{d}{2}\Big)-\cos\Big[a_1+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)d\Big]\\ &=-2\sin\Big(a_1+\frac{n-1}{2}d\Big)\sin\Big(-\frac{n}{2}d\Big).\end{aligned}$$

Do đó

$$S_n=\frac{\sin\Big(a_1+\dfrac{n-1}{2}d\Big)\sin\Big(\dfrac{n}{2}d\Big)}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

b) Theo cách giải như trên, ta thu được
- Nếu $d=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ thì $T_n=n\cos a_1$.
- Nếu $d\neq 2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ thì

$$T_n=\frac{\cos\Big(a_1+\dfrac{n-1}{2}d\Big)\sin\dfrac{n}{2}d}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

Chú ý 1.1. Như vậy, với mỗi một cấp số cộng, ta tìm được một công thức tính tổng tương ứng. Chẳng hạn, với $x\neq l\pi(l\in\mathbb{Z})$ ta có

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x\\ &=\frac{\cos\Big(x+\dfrac{n-1}{2}.2x\Big).\sin\Big(\dfrac{n}{2}.2x\Big)}{\sin\dfrac{2x}{2}}=\frac{\cos nx.\sin nx}{\sin x}=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.\end{aligned}$$

Nhận xét 1.1. Với những giá trị của x sao cho $\sin 2nx = \sin x$ $(\sin x \neq 0)$ thì ta luôn có $T_n = \dfrac{1}{2}\cdot$ Từ đó, ta thu được một số kết quả sau:

Với $n = 2$, chọn $x = \dfrac{\pi}{5}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\cdot$$

Với $n = 3$, chọn $x = \dfrac{\pi}{7}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}\cdot$$

Với $n = 4$, chọn $x = \dfrac{\pi}{9}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}\cdot$$

Bài toán 1.4. Tính các tổng sau:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\sin kx, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx \quad \text{với } x \neq 2l\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải. Trước hết, ta nhắc lại rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\sin\dfrac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\cos\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)\sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}\cdot$$

Ta có:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k.\sin kx = \sum_{k=1}^{n}[-(\cos kx)'] = -\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)',$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k.\cos kx = \sum_{k=1}^{n}[(\sin kx)'] = \left(\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right)'.$$

Từ đó suy ra các công thức cần tìm.

Bài toán 1.5. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với công sai d. Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \sin a_k.$$

Lời giải. Xét $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin a_k$. Ta có

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k-(k-1)]B_k + n.B_n = -\sum_{k=1}^{n-1} B_k + n.B_n.$$

Theo kết quả Bài toán 1 ta có

- Nếu $d = 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ thì $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \sin a_1$.
- Nếu $d \neq 2l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ thì

$$\begin{aligned}
S_n &= -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos\left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right) - \cos\left[a_1\left(k - \dfrac{1}{2}\right)d\right]}{2\sin\dfrac{d}{2}} \\
&\qquad + n\,\frac{\sin\left(a_1 + \dfrac{n-1}{2}d\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}d\right)}{\sin\dfrac{d}{2}} \\
&= -\frac{1}{2\sin\dfrac{d}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\cos\left[a_1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)d\right]\right. \\
&\qquad \left. -2n\sin\left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)\sin\left(\frac{n}{2}d\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{\sin\dfrac{d}{2}}\left\{(n-1)\cos\left(a_1 - \frac{d}{2}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\cos\left[a_1 + \left(k - \frac{1}{2}\right)d\right]\right. \\
&\qquad \left. -2n\sin\left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)\sin\left(\frac{n}{2}d\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Trong đó

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(a_1 + \frac{d}{2} + kd\right) = \frac{\cos\left(a_1 - \dfrac{d}{2} + \dfrac{n-2}{2}d\right)\sin\left(\dfrac{n-1}{2}d\right)}{\sin\dfrac{d}{2}}.$$

Nhận xét 1.2. *Tương tự ta cũng tính được các tổng dạng*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos a_k, \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin b_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos b_k.$$

Trong đó $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *là hai cấp số cộng.*

1.1.3 Tính giá trị của một số biểu thức lượng giác

Bài toán 1.6. Tính các tổng sau

1) $S_1 = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cdot$

2) $S_2 = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{3\pi}{10} + \cos\frac{5\pi}{10} + \cos\frac{7\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10}\cdot$

Lời giải.

1) Ta có

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7})\\
&\qquad = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\\
&\qquad = \sin\frac{2\pi}{7} - (\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}) + (\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7})\\
&\qquad = \sin\frac{\pi}{7}\cdot
\end{aligned}$$

Vậy

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}\cdot$$

2) Ta có $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
\cos 5\alpha &= \cos(2\alpha + 3\alpha)\\
&= \cos 2\alpha\cos 3\alpha - \sin 2\alpha\sin 3\alpha\\
&= (2\cos^2\alpha - 1)(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - 2\sin\alpha\cos\alpha(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\\
&= 8\cos^5\alpha - 4\cos^3\alpha - 6\cos^3\alpha + 3\cos\alpha\\
&- 6(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha - 8(1-\cos^2\alpha)^2\cos\alpha\\
&= 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Với các giá trị

$$\alpha = \frac{\pi}{10},\ \alpha = \frac{3\pi}{10},\ \alpha = \frac{5\pi}{10},\ \alpha = \frac{7\pi}{10},\ \alpha = \frac{9\pi}{10}$$

thì $\cos 5\alpha = 0$. Do vậy

$$\cos\frac{\pi}{10},\ \cos\frac{3\pi}{10},\ \cos\frac{5\pi}{10},\ \cos\frac{7\pi}{10},\ \cos\frac{9\pi}{10}$$

là các nghiệm của đa thức $f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$. Theo định lí Vieta, ta thu được $S_2 = 0$.

Bài toán 1.7. Tính tổng

$$S = \cos 5^0 + \cos 77^0 + \cos 221^0 + \cos 293^0.$$

Lời giải. Ta có

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.$$

Với các giá trị

$$\alpha = 5^0,\ \alpha = 77^0,\ \alpha = 149^0,\ \alpha = 221^0,\ \alpha = 293^0$$

thì $\cos 5\alpha$ đều bằng $\cos 25^0$. Do đó

$$\cos 5^0,\ \cos 77^0,\ \cos 149^0,\ \cos 221^0,\ \cos 293^0$$

là các nghiệm của đa thức $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos 25^0$. Theo định lí Vieta, ta có $S = 0$.

Bài toán 1.8. Tính tổng

$$S = \cos 0 + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \ldots + \cos\frac{6\pi}{7}\cdot$$

Lời giải. Đặt

$$S_1 = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \ldots + \cos\frac{6\pi}{7}\cdot$$

Theo bài toán 1.3 ta có

$$S_1 = \frac{\cos(\frac{\pi}{7} + \frac{5\pi}{14})\sin\frac{3\pi}{14}}{\sin\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{14}}{\sin\frac{\pi}{14}} = 0.$$

Vậy nên $S = \cos 0 = 1$.

Bài toán 1.9. Tính tổng

$$S = \cos\frac{\pi}{19} + \cos\frac{3\pi}{19} + \cos\frac{5\pi}{19} + \cdots + \cos\frac{17\pi}{19}\cdot$$

Lời giải. Theo bài toán 1.3 ta có

$$S = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{19} + \frac{8\pi}{19}\right)\sin\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{2\pi}{19}\right)}{\sin\frac{\pi}{19}} = \frac{\cos\frac{9\pi}{19}\cdot\sin\frac{9\pi}{19}}{\sin\frac{\pi}{19}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{18\pi}{19}}{\sin\frac{\pi}{19}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{19}}{\sin\frac{\pi}{19}} = \frac{1}{2}\cdot$$

Bài toán 1.10. Tính $\sin 18^0, \cos 36^0$.
Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\cos 54^0 = \sin 36^0 &\Leftrightarrow \cos(3.18^0) = \sin(2.18^0)\\ &\Leftrightarrow 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0 = 2\sin 18^0 \cos 18^0\\ &\Leftrightarrow 4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Suy ra $\sin 18^0$ là nghiệm dương của phương trình $4t^2 + 2t - 1 = 0$. Do đó

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

và suy ra

$$\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}\cdot$$

1.2 Hệ thức lượng giác trong tam giác

Ta quy ước ký hiệu độ dài các cạnh, các đường trung tuyến, đường phân giác, đường cao, các bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và bàng tiếp của tam giác ABC lần lượt là a, b, c; m_a, m_b, m_c; l_a, l_b, l_c; h_a, h_b, h_c; R, r; r_a, $r_b, r_c; p = \dfrac{a + b + c}{2}$ là nửa chu vi tam giác, S là diện tích tam giác.

1.2.1 Các hệ thức cơ bản trong tam giác

Định lý 1.1 (Xem [7], Định lí hàm số cosin)**.** *Trong tam giác ABC, ta luôn có*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

tương tự ta có các hệ thức đối với b, c.

Định lý 1.2 (Xem [7], Định lí hàm số sin). *Trong mọi tam giác* ABC, *ta đều có*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Định lý 1.3 (Xem [7], Công thức đường trung tuyến). *Trong tam giác* ABC, *ta luôn có*

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

tương tự ta có các hệ thức đối với m_b, m_c.

Định lý 1.4 (Xem [7], Định lí hàm số tang). *Trong tam giác* ABC, *ta luôn có*

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} = \tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}\cdot$$

Định lý 1.5 (Xem [7], Định lí về hình chiếu cho tam giác ABC).

$$a = b\cos C + c\cos B = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right),$$

tương tự ta có các hệ thức đối với b, c.

Định lý 1.6 (Xem [7]). *Diện tích* S *của tam giác* ABC *được tính bằng các công thức sau đây:*

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A,$$
$$S = \frac{abc}{4R},$$
$$S = p.r,$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Định lý 1.7 (Xem [7]). *Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác*

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$
$$R = \frac{abc}{4S},$$
$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\cdot$$

Định lý 1.8 (Xem [7]). *Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác*

$$\begin{aligned} r &= (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2} \\ &= \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\cdot \end{aligned}$$

Định lý 1.9 (Xem [7]). *Bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác*

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

tương tự ta có các hệ thức đối với r_b, r_c.

Định lý 1.10. (Xem [7], Công thức đường phân giác). Trong tam giác ABC, ta luôn có

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

tương tự ta có các hệ thức đối với l_b, l_c.

1.2.2 Các hệ thức lượng giác thường gặp trong tam giác

Bài toán 1.11. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có hệ thức

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= \sin(B+C) + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ &= 2\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) \\ &= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot \end{aligned}$$

Bài toán 1.12. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có hệ thức

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot$$

Lời giải. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}VT &= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\ &= 1 + 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)\\ &= 1 + 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)\\ &= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = VP.\end{aligned}$$

Bài toán 1.13. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$$

Lời giải. Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT &= \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2}\\ &= \frac{3}{2} - \frac{\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C}{2}\\ &= VP.\end{aligned}$$

Bài toán 1.14. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C.$$

Lời giải. Dùng công thức hạ bậc ta có

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B &= \frac{1}{2}(1+\cos 2A) + \frac{1}{2}(1+\cos 2B)\\ &= 1 - \cos(A+B)\cos(A-B).\end{aligned}$$

Vì $\cos C = -cos(A+B)$ nên

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= 1 + \cos(A+B)[\cos(A-B) + \cos(A+B)]\\ &= 1 + 2\cos(A+B)\cos A\cos B\\ &= 1 - 2\cos A\cos B\cos C.\end{aligned}$$

Bài toán 1.15. Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác. CMR:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C.$$

Lời giải. Vì $B + C = \pi - A$ nên

$$\begin{aligned}&\tan(B+C) = -\tan A\\ \Leftrightarrow &\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\tan C} = -\tan A\\ \Leftrightarrow &\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B.\end{aligned}$$

Bài toán 1.16. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\cdot$$

Lời giải. Vì $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}$ nên

$$\begin{aligned}
&\cot(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})=\cot(\frac{B}{2}+\frac{C}{2})\\
\Leftrightarrow&\tan\frac{A}{2}=\frac{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-1}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}=\frac{1}{\cot\frac{C}{2}}\\
\Leftrightarrow&\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{A}{2}\\
\Leftrightarrow&\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\cdot
\end{aligned}$$

Bài toán 1.17. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta luôn có

$$\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}\cdot \tag{1.1}$$

Tương tự ta có các hệ thức đối với $\cot B$ và $\cot C$.

Lời giải. Theo định lý hàm số cosin, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, theo định lý hàm số sin, $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ và theo công thức tính diện tích tam giác $S=\dfrac{abc}{4R}$ ta có

$$\begin{aligned}
\cot A&=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{a}{2R}=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}\\
&=\frac{R(b^2+c^2-a^2)}{4RS}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}\cdot
\end{aligned}$$

1.3 Một số dạng hệ thức lượng giác trong hình học

Bài toán 1.18. Cho tam giác ABC. Giả sử G là giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác ABC. Kí hiệu $\widehat{GAB}=\alpha,\widehat{GBC}=\beta,\widehat{GCA}=\gamma$. Chứng minh rằng

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S}\cdot$$

Lời giải. Gọi 3 đường trung tuyến ứng với 3 cạnh BC, CA, AB là m_a, m_b, m_c. Áp dụng định lí hàm số cosin cho tam giác ABM ta có

$$\begin{aligned}
&BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB.AM.\cos\alpha\\
\Leftrightarrow &\frac{a^2}{4} = c^2 + m_a^2 - 2AB.AM.\sin\alpha\cot\alpha\\
\Leftrightarrow &\frac{a^2}{4} = c^2 + m_a^2 - 2.S\cot\alpha\\
\Leftrightarrow &\cot\alpha = \frac{4c^2 + 4m_a^2 - a^2}{8S}\cdot
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Tương tự:

$$\cot\beta = \frac{4a^2 + 4m_b^2 - b^2}{8S}, \tag{1.3}$$

$$\cot\gamma = \frac{4b^2 + 4m_c^2 - c^2}{8S}\cdot \tag{1.4}$$

Cộng từng vế (1.2), (1.3), (1.4) ta có

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) + 4(m_a^2 + m_b^2) + m_c^2}{8S}\cdot$$

Ta biết rằng

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Như vậy

$$\begin{aligned}
&\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) + 4\cdot\dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)}{8S}\\
\Leftrightarrow &\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}\cdot
\end{aligned}$$

Bài toán 1.19. Cho tam giác ABC và M là một điểm bất kỳ trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\cot\widehat{AA_1B} + \cot\widehat{BB_1C} + \cot\widehat{CC_1A} = 0.$$

Lời giải. Áp dụng công thức (1.1) vào tam giác ABA_1, ta có

$$\cot\widehat{AA_1B} = \frac{AA_1^2 + BA_1^2 - AB^2}{4S_{AA_1B}}\cdot \tag{1.5}$$

Ta có
$$\cot\widehat{AA_1B} = -\cot\widehat{AA_1C}, \tag{1.6}$$
và do đó lại theo công thức (1.1) áp dụng vào tam giác AA_1C có
$$\cot\widehat{AA_1C} = \frac{AA_1^2 + A_1C^2 - AC^2}{4S_{AA_1C}}\cdot \tag{1.7}$$
Từ (1.5), (1.6), (1.7) suy ra
$$\cot\widehat{AA_1B} = \frac{AA_1^2 + BA_1^2 - AB^2}{4S_{AA_1B}} = \frac{AC^2 - AA_1^2 - A_1C^2}{4S_{AA_1C}}\cdot \tag{1.8}$$
Từ (1.8) và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau (với chú ý là $S = S_{AA_1B} + S_{AA_1C}$) ta đi đến
$$\cot\widehat{AA_1B} = \frac{BA_1^2 - CA_1^2 + AC^2 - AB^2}{4S}\cdot \tag{1.9}$$
Rõ ràng
$$BA_1^2 - CA_1^2 = (MB^2 - MA_1^2) - (MC^2 - MA_1^2) = MB^2 - MC^2.$$
Vậy suy ra
$$\cot\widehat{AA_1B} = \frac{AC^2 - AB^2 + MB^2 - MC^2}{4S}\cdot \tag{1.10}$$
Hoàn toàn tương tự ta có
$$\cot\widehat{BB_1C} = \frac{BA^2 - BC^2 + MC^2 - MA^2}{4S}, \tag{1.11}$$
$$\cot\widehat{CC_1A} = \frac{CB^2 - CA^2 + MA^2 - MB^2}{4S}\cdot \tag{1.12}$$
Cộng từng vế (1.10), (1.11), (1.12) suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.20. Cho hình bình hành với hai cạnh a, b $(a > b)$. Hai đường chéo $2x, 2y$ $(x > y)$. Gọi φ là góc nhọn của hình bình hành, và φ_1 là góc nhọn giữa hai đường chéo. Chứng minh

1. $\cos\varphi\cos\varphi_1 = \dfrac{(x^2 - y^2)(a^2 - b^2)}{4abxy}\cdot$
2. $\tan\varphi_1 = \dfrac{2ab\sin\varphi}{a^2 - b^2}\cdot$

Lời giải.

1. Áp dụng định lí hàm số cosin trong các tam giác COD và ABD, ta có

$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi_1, \tag{1.13}$$
$$4y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi. \tag{1.14}$$

Từ (1.13) suy ra

$$2xy\cos\varphi_1 = x^2 + y^2 - b^2,$$

và từ (1.14) có

$$2ab\cos\varphi = a^2 + b^2 - 4y^2.$$

Suy ra

$$4abxy\cos\varphi\cos\varphi_1 = (x^2 + y^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 4y^2). \tag{1.15}$$

Theo hệ thức lượng trong hình bình hành ta có

$$4x^2 + 4y^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Suy ra

$$x^2 + y^2 - b^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - b^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}, \tag{1.16}$$
$$a^2 + b^2 - 4y^2 = 2(x^2 + y^2) - 4y^2 = 2(x^2 - y^2). \tag{1.17}$$

Thay (1.16), (1.17) vào (1.15) có

$$4abxy\cos\varphi\cos\varphi_1 = (a^2 - b^2)(x^2 - y^2).$$

Suy ra

$$\cos\varphi\cos\varphi_1 = \frac{(x^2 - y^2)(a^2 - b^2)}{4abxy}.$$

2. Áp dụng công thức (1.1) vào tam giác COD, ta có

$$\tan\varphi_1 = \frac{4S_{COD}}{x^2 + y^2 - b^2} = \frac{S_{ABCD}}{\dfrac{a^2 - b^2}{2}} = \frac{2ab\sin\varphi}{a^2 - b^2}.$$

Bài toán 1.21. Cho ΔABC, độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh B và đỉnh C tương ứng là m_b và m_c thỏa mãn $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh rằng

$$2\cot A = \cot B + \cot C.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow c^2m_c^2 = b^2m_b^2.$$

Theo định lý hàm số cosin ta có

$$\begin{aligned} bc.\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} &= b^2 + \frac{c^2}{4} - \Big(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\Big) \\ &= b^2 + \frac{c^2}{4} - m_c^2. \end{aligned}$$

Và

$$bc\cos A = c^2 + \frac{b^2}{4} - \Big(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\Big) = c^2 + \frac{b^2}{4} - m_b^2.$$

Vậy

$$bcc^2\cos A = b^2c^2 + \frac{c^4}{4} - c^2m_c^2, \tag{1.18}$$

$$bcb^2\cos A = b^2c^2 + \frac{b^4}{4} - b^2m_b^2. \tag{1.19}$$

Trừ vế với vế của (1.18) cho (1.19) ta được

$$\begin{aligned} bc(c^2-b^2)\cos A &= \frac{1}{4}(c^4-b^4) \qquad\qquad (\text{do } c^2m_c^2 = b^2m_b^2) \\ &= \frac{1}{4}(c^2-b^2)(c^2+b^2). \end{aligned}$$

Suy ra

$$4\cos A = \frac{b^2+c^2}{bc} \qquad (\text{do } b \neq c). \tag{1.20}$$

Do $b^2+c^2 = a^2 = 2bc.\cos A$ nên (1.20) trở thành

$$\begin{aligned} &4\cos A = \frac{a^2+2bc\cos A}{bc} = \frac{a^2}{bc} + 2\cos A \\ \Leftrightarrow &2\cos A = \frac{a^2}{bc} = \frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C} \Leftrightarrow \frac{2\cos A}{\sin A} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C} \\ \Leftrightarrow &\frac{2\cos A}{\sin A} = \frac{\sin B\cos C + \sin C\cos B}{\sin B\sin C} \Leftrightarrow 2\cot A = \cot B + \cot C. \end{aligned}$$

Bài toán 1.22. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và p là nửa chu vi. Chứng minh:

1) $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\dfrac{A+C}{2}}$.

2) $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải.

1) Áp dụng định lý hàm số cosin cho 2 tam giác ABD và BCD, ta có

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Suy ra

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad\cos A - bc\cos C)^2. \tag{1.21}$$

Mặt khác

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(ad\sin A + bc\sin C). \tag{1.22}$$

Từ (1.21) và (1.22) suy ra

$$\begin{aligned}
&S^2_{ABCD} + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\
&\qquad = 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A\cos C - \sin A\sin C)] \\
&\qquad = 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(A + C)] \\
&\qquad = 4\left[(ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\right] \\
&\qquad = 4\left[(ad + bc)^2 - 4abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\right]\cdot
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
16S^2_{ABCD} &= 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2} \\
&= (2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2)(2ad + 2bc + a^2 + d^2 \\
&\qquad - b^2 - c^2) - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2} \qquad (1.23) \\
&= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\cdot
\end{aligned}$$

Đặt $2p = a + b + c + d$ suy ra

$$\begin{aligned}
a(p - a) = -a + b + c + d;\ 2(p - b) = a - b + c + d; \\
2(p - c) = a + b - c + d\ 2(p - d) = a + b + c - d.
\end{aligned}$$

Thay vào (1.23) ta có

$$16S^2_{ABCD} = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - 16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}\cdot$$

Hay

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}\cdot$$

2) Khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp thì

$$\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Suy ra

$$\cos^2\frac{A+C}{2} = 0.$$

Do đó $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Nhận xét 1.3.

1. Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ có $AB = a, BC = b, CD = c$ và $DA = d$. Khi đó diện tích S của tứ giác được tính theo công thức

$$S = \sqrt{abcd}\sin\frac{A+C}{2}\cdot$$

2. Cho tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp $ABCD$ có $AB = a, BC = b, CD = c$ và $DA = d$. Khi đó diện tích S của tứ giác được tính bằng công thức

$$S = \sqrt{abcd}.$$

Bài toán 1.23. Cho tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp có diện tích S và nửa chu vi p. Chứng minh rằng

$$\frac{p^2}{S} = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\cdot \tag{1.24}$$

Lời giải. Gọi O, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Qlần lượt là hình chiếu của O lên AB, BC, CD, DA. Ta có:

$$p = AM + BN + CP + DQ = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} + \cot\frac{D}{2}\right)\cdot$$

Theo giả thiết thì $\dfrac{A+C}{2} = \dfrac{B+D}{2} = \dfrac{\pi}{2}$, nên $\sin\dfrac{A}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$,
$\sin\dfrac{C}{2} = \cos\dfrac{A}{2}$ và

$$\begin{cases} \cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{C}{2}}, \\ \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{A+C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{C}{2}}. \end{cases}$$

Suy ra
$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{D}{2}\cdot$$
Từ đó ta nhận được
$$p=r\Big(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{D}{2}\Big)=r\Big(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\Big).$$
Suy ra $r=p\Big(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\Big)^{-1}$ và
$$S=pr=p^2\Big(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\Big)^{-1}$$
nên
$$\frac{p^2}{S}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\cdot$$

Chương 2

Các đồng nhất thức đại số liên quan đến biến đổi lượng giác

2.1 Các đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm sin và cosin

Nhận xét rằng đẳng thức cơ bản để dẫn đến sự phong phú của hệ thống các đồng nhất thức lượng giác là công thức

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \ \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Gắn với hệ thức (2.1) là đồng nhất thức Lagrange

$$(2x)^2 + (1 - x^2)^2, \ \text{mọi } x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Hai đồng nhất thức (2.1) và (2.2) là hai cách viết của một hệ thức. Nếu ta thay $x = \tan\dfrac{t}{2}$ vào (2.2) thì dễ dàng thu được (2.1) và ngược lại. Như vậy là mỗi công thức lượng giác sẽ tương ứng với một đồng nhất thức đại số tương ứng. Điều đó cũng thật dễ hiểu nếu chúng ta nhớ lại quá trình dẫn dắt đến định nghĩa các hàm số lượng giác cơ bản đối với góc nhọn được mô tả dựa theo Định lý Pytago:

Trong tam giác vuông ABC với cạnh huyền BC ta luôn có hệ thức.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Tuy nhiên, với số lượng các công thức biến đổi lượng giác quá nhiều, bản thân các hệ thức lượng giác tạo thành một chuyên đề có tính độc lập tương đối, dần tách hẳn cơ sở đại số của nó, đã làm cho chúng ta quên đi một lượng lớn các hệ thức đại số có cùng xuất xứ từ một hệ thức lượng giác quen biết. Đặc biệt trong chương trình toán bậc phổ thông hiện nay, các hàm số lượng giác ngược, hàm lượng gác hyperbolic, không nằm trong phần kiến thức bắt buộc thì những bài toán liên quan đến chúng là một thách thức lớn đối với học sinh và cả giáo viên.

Ta nhắc lại công thức Euler quen biết

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Khi đó

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}. \end{cases}$$

Rõ ràng khi khảo sát hàm số $\cos t$ thì ít ai nghĩ trong đầu rằng nó có dạng $\dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$ vì khi đó a không còn là một số thực. Nhưng nếu ta chú ý đến biểu thức

$$\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

thì đó chính là $\cos(i\alpha)\,(= \cosh\alpha)$ và vì vậy, về mặt hình thức, ta sẽ có nhiều biến đổi thu được từ các công thức liên quan đến biến $x \notin [-1, 1]$, giống như công thức đối với hàm $\cos t$.

Ví dụ 2.1. Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^2 - 1.$$

Ví dụ 2.2. Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = 4\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)^3\right] - 3\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right],$$

hay

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$$

với

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

Ví dụ 2.3. Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 4t = 2\cos^2 2t - 1$$

chính là công thức:

$$\frac{1}{2}\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\right]^2 - 1.$$

Sử dụng kết quả khai triển của hàm lượng giác $\cos 2t$, ta thu được đồng nhất thức đại số dạng bậc 4.

$$\frac{1}{2}\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) = 8m^4 - 8m^2 + 1$$

với

$$m = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cdot$$

Ví dụ 2.4. Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 5t + \cos t = 2\cos 3t \cos 2t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) + \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)\right]\left[\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\right]\cdot$$

Từ ví dụ trên, sử dụng kết quả khai triển các hàm lượng giác $\cos 3t$ và $c$os$2t$, ta thu được đồng nhất thức đại số dạng bậc 5.

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = -m + 2(4m^3 - 3m)(2m^2 - 1),$$

trong đó

$$m = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cdot$$

Ví dụ 2.5. Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cos 6t = 4\cos^3 2t - 3\cos 2t$$

chính là công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^6 + \frac{1}{a^6}\right) = 4\left[\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\right]^3 - \left[\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\right]\cdot$$

Sử dụng kết quả khai triển hàm lượng giác $\cos 2t$, ta thu được đồng nhất thức dạng bậc 6.

$$\frac{1}{2}\left(a^6+\frac{1}{a^6}\right)=4(2m^2-1)^3-3(2m^2-1)$$

với

$$m=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\cdot$$

Bây giờ, ta chuyển sang xét các hệ thức đại số liên quan đến hàm số $\sin t$. Từ công thức Euler, ta thu được hệ thức

$$i\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}\cdot$$

Từ đây suy ra biểu thức $i\sin(it)$ nhận giá trị thực. Điều này gợi ý cho ta cách chuyển đổi các đồng nhất thức đối với hàm số sin sang các đồng nhất thức đại số.

Ví dụ 2.6. Xét công thức khai triển

$$\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t.$$

Từ đây ta thu được công thức (hình thức)

$$i\sin i(3t)=3(i\sin it)+4(i\sin it)^3.$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)=3\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]+4\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]^3,$$

hay

$$4x^3+3x=\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)$$

với

$$x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad a\neq 0.$$

Ví dụ 2.7. Xét công thức biến đổi

$$\sin 5t+\sin t=2\sin 3t(1-2\sin^2 t).$$

Ta viết lại công thức dưới dạng

$$i\sin i(5t)+i\sin it=2i\sin i(3t)(1+2(i\sin it)^2).$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{1}{2}\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)+\frac{1}{2}\left[a-\frac{1}{a}\right]=2\left[\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\right]\left[1+2\left(\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right)^2\right].$$

Từ ví dụ trên, sử dụng kết quả khai triển hàm lượng giác $\sin 3t$ ta thu được đồng nhất thức đại số sau

$$\frac{1}{2}\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)=-n+2(4n^3+3n)(2n^2+1),$$

trong đó

$$n=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

Từ những kết quả trên ta sẽ đi xét các hệ thức đại số giữa hàm số $\sin t$ và hàm số $\cos t$.

Ví dụ 2.8. Xét công thức khai triển

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t.$$

Từ đây ta thu được công thức (hình thức)

$$i\sin i(2t)=2(i\sin it)\cos t.$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)=2\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right].\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),$$

hay

$$\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)=2mn,$$

với

$$m=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),\quad n=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

Ví dụ 2.9. Tương tự như 2.8, xét công thức khai triển

$$\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t.$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức dạng bậc 4 sau:

$$\frac{1}{2}\left(a^4-\frac{1}{a^4}\right)=2mn(2n^2-1)$$

với

$$m=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),\quad n=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

Ví dụ 2.10. Xét đồng nhất thức

$$\sin^4 t - \cos^4 t = 1 - 2\cos^2 t.$$

Trước hết ta chứng minh đồng nhất thức trên. Ta có

$$\begin{aligned}\sin^4 t - \cos^4 t &= \left(\sin^2 t - \cos^2 t\right)\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\\ &= \sin^2 t - \cos^2 t = 1 - 2\cos^2 t.\end{aligned}$$

Từ đồng nhất thức lượng giác đã cho ta có đồng nhất thức đại số sau:

$$\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right]^4 - \left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^4 = 1 - 2\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^2,$$

hay

$$\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right]^4 = m^4 - 2m^2 + 1,$$

với

$$m = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cdot$$

Ví dụ 2.11. Xét đồng nhất thức

$$\sin^4 t + \cos^4 t = \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}\cdot$$

Ta sẽ chứng minh đồng nhất thức đã cho. Ta có

$$\begin{aligned}\sin^4 t + \cos^4 t &= \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t\\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4t)\\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t.\end{aligned}$$

Từ đồng nhất thức lượng giác đã cho ta có đồng nhất thức đại số sau

$$\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right]^4 + \left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^4 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right)\right] + \frac{3}{4},$$

hay

$$\frac{1}{8}\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) = n^4 + m^4 - \frac{3}{4},$$

trong đó

$$n = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right), \quad m = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cdot$$

Ví dụ 2.12. Xét đồng nhất thức

$$3 - 4\cos 2t + \cos 4t = 8\sin^4 t.$$

Ta sẽ chứng minh đồng nhất thức đã cho. Ta có

$$\begin{aligned} 3 - 4\cos 2t + \cos 4t &= 3(1-\cos 2t) + \cos 4t - \cos 2t \\ &= 6\sin^2 t - 2\sin t \sin 3t \\ &= 6\sin^2 t - 2\sin t(3\sin t - 4\sin^3 t) \\ &= 2\sin^2 t(3 - 3 + 4\sin^2 t) = 8\sin^4 t. \end{aligned}$$

Từ đồng nhất thức lượng giác trên ta có đồng nhất thức đại số sau

$$3 - 4\left[\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) = 8\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right]^4\cdot$$

Sử dụng kết quả khai triển các hàm lượng giác $\cos 2t$ và $\cos 4t$ ta thu được đồng nhất thức đại số sau

$$3 - 4(2m^2 - 1) + (8m^4 - 8m^2 + 1) = 8\left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right]^4,$$

trong đó

$$m = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\cdot$$

Ví dụ 2.13. Xét đẳng thức sau

$$\sin 3t.\sin^3 t + \cos 3t.\cos^3 t = \cos^3 2t.$$

Trước hết ta đi chứng minh đồng nhất thức đã cho. Theo công thức nhân ba, ta có

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t \Rightarrow \sin^3 t = \frac{3\sin t - \sin 3t}{4}\cdot$$

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t \Rightarrow \cos^3 t = \frac{3\cos t + \cos 3t}{4}\cdot$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sin 3t.\sin^3 t + \cos 3t.\cos^3 t &= \sin 3t\left(\frac{3\sin t - \sin 3t}{4}\right) + \cos 3t\left(\frac{3\cos t + \cos 3t}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(\cos 3t\cos t + \sin 3t\sin t\right) - \frac{1}{4}\left(\sin^2 3t - \cos^2 3t\right) \\ &= \frac{3}{4}\cos(3t - t) + \frac{1}{4}\cos 6t = \frac{1}{4}\left[3\cos 2t + \cos 6t\right] \\ &= \cos^3 2t. \end{aligned}$$

Từ đồng nhất thức đã cho, ta có đồng nhất thức đại số sau:

$$\frac{1}{2}\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\right]^3+\frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\cdot\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]^3=\left[\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\right]^3\cdot$$

Sử dụng kết quả biến đổi hàm số lượng giác $\sin 3t,\ \cos 3t$ và $\cos 2t$, ta thu được đồng nhất thức đại số

$$(4n^3+3n).n^3+\left(4m^3-3m\right).m^3=\left[\frac{1}{2}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\right]^3,$$

trong đó

$$n=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad m=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\cdot$$

2.2 Các đồng nhất thức đại số liên quan đến hàm tang và cotang

Theo công thức lượng giác cơ bản ta có

$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t},\quad t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Từ công thức Euler, ta thu được hệ thức

$$i\tan t=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}.$$

Từ đây suy ra

$$i\tan(it)=\frac{e^{-\alpha}-e^{\alpha}}{e^{-\alpha}+e^{\alpha}},$$

hay

$$i\tan(it)=\frac{a^2-1}{a^2+1}.$$

Ta thấy biểu thức $i\tan(it)$ nhận giá trị thực. Điều này gợi ý cho ta cách chuyển đổi các đồng nhất thức đối với hàm số $\tan t$ sang các đồng nhất thức đại số.

Ví dụ 2.14. Xét công thức khai triển

$$\tan 2t=\frac{2\tan t}{1-\tan^2 t},\quad \left(t, 2t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right)\cdot$$

Từ đây ta thu được công thức (hình thức)

$$i\tan i(2t) = \frac{2i\tan(it)}{1+(i\tan it)^2}\cdot$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^4-1}{a^4+1} = \frac{2\dfrac{a^2-1}{a^2+1}}{1+\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2},$$

hay

$$\frac{a^4-1}{a^4+1} = \frac{2x}{1+x^2},$$

với

$$x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.15. Xét công thức khai triển

$$\tan 3t = \frac{3\tan t - \tan^3 t}{1-3\tan^2 t}, \quad ,(t, 3t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z})\cdot$$

Từ đây ta thu được công thức (hình thức)

$$i\tan i(3t) = \frac{3i\tan(it)+(i\tan it)^3}{1+3(i\tan it)^2}\cdot$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^6-1}{a^6+1} = \frac{3.\dfrac{a^2-1}{a^2+1}+\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^3}{1+3\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2},$$

hay

$$\frac{a^6-1}{a^6+1} = \frac{3x+x^3}{1+3x^2} \quad \text{với} \quad x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.16. Xét công thức biến đổi

$$\tan 4t = \frac{2\tan 2t}{1-\tan^2 2t}, \quad \left(2t, 4t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\cdot$$

Ta viết lại công thức trên dưới dạng

$$i\tan i(4t) = \frac{2i\tan i(2t)}{1+\left(i\tan i(2t)\right)^2}\cdot$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^8-1}{a^8+1} = \frac{2.\dfrac{a^4-1}{a^4+1}}{1+\left(\dfrac{a^4-1}{a^4+1}\right)^2}\cdot$$

Từ ví dụ trên, sử dụng kết quả khai triển hàm lượng giác $\tan 2t$, ta thu được đồng nhất thức đại số sau.

$$\frac{a^8-1}{a^8+1} = \frac{\dfrac{4x}{1+x^2}}{1+\dfrac{2x}{1+x^2}}, \quad \text{với} \quad x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.17. Xét công thức biến đổi

$$\tan 5t = \tan(2t+3t) = \frac{\tan 2t + \tan 3t}{1-\tan 2t\tan 3t}, \quad \left(2t, 3t, 5t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)\cdot$$

Từ đây ta thu được công thức (hình thức)

$$i\tan i(5t) = \frac{i\tan i(2t) + i\tan i(3t)}{1 + i\tan i(2t) i\tan i(3t)}\cdot$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^{10}-1}{a^{10}+1} = \frac{\dfrac{a^4-1}{a^4+1} + \dfrac{a^6-1}{a^6+1}}{1+\dfrac{a^4-1}{a^4+1}\cdot\dfrac{a^6-1}{a^6+1}}\cdot$$

Từ ví dụ trên, sử dụng kết quả khai triển các hàm lượng giác $\tan 2t$ và $\tan 3t$, ta thu được đồng nhất thức đại số sau:

$$\frac{a^{10}-1}{a^{10}+1} = \frac{\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}}{1+\dfrac{2x}{1+x^2}\cdot\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}}, \quad \text{với} \quad x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Bây giờ ta chuyển sang xét các hệ thức đại số liên quan đến hàm số cotang. Từ công thức lượng giác cơ bản

$$\tan t.\cot t = 1 \quad \text{suy ra} \quad \cot t = \frac{1}{\tan t} \quad (t \neq k\frac{\pi}{2})\cdot$$

Do đó

$$i\cot(it) = \frac{-1}{i\tan(it)}\cdot$$

Từ đây suy ra

$$i\cot(it) = \frac{-(a^2+1)}{a^2-1}, \quad (a \neq \pm 1).$$

Ví dụ 2.18. Hệ thức đại số ứng với công thức

$$\cot(2t) = \frac{1}{\tan 2t}, \quad (2t \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}),$$

chính là đồng nhất thức đại số dưới đây

$$\frac{a^4+1}{a^4-1} = \frac{1+x^2}{2x}, \quad \text{với} \quad x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.19. Hệ thức đại số ứng với công thức biến đổi

$$\cot 3t = \frac{1}{\tan 3t}, \quad (3t \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}),$$

chính là đồng nhất thức sau:

$$\frac{a^6+1}{a^6-1} = \frac{1+3x^2}{3x+x^3}, \quad \text{với} \quad x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.20. Hệ thức đại số ứng với công thức biến đổi

$$\cot 4t = \frac{1}{\tan 4t}, \quad (4t \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}),$$

chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^8+1}{a^8-1} = \frac{1+\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}{\dfrac{4x}{1+x^2}}, \quad \text{với} \quad x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.21. Hệ thức đại số ứng với công thức biến đổi

$$\cot 5t = \frac{1}{\tan 5t}, \quad (5t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}),$$

chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^{10}+1}{a^{10}-1} = \frac{1 + \dfrac{2x}{1+x^2} \cdot \dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}}{\dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}},$$

trong đó

$$x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Sau đây ta đi xét các hệ thức đại số giữa hàm số tang và hàm số cotang.

Ví dụ 2.22. Xét đồng nhất thức

$$(\tan t + \cot t)^2 - (\tan t - \cot t)^2 = 4.$$

Ta sẽ chứng minh đồng nhất thức đã cho. Ta có

$$VT = 2\tan t \cot t + 2\tan t \cot t = 4 = VP\cdot$$

Ta viết lại đồng nhất thức đã cho dưới dạng

$$[i\tan(it) + i\cot(it)]^2 - [i\tan(it) - i\cot(it)]^2 = -4\cdot$$

Hệ thức đại số ứng với công thức trên chính là đồng nhất thức

$$\left(\frac{a^2-1}{a^2+1} - \frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 - \left(\frac{a^2-1}{a^2+1} + \frac{a^2+1}{a^2-1}\right)^2 = -4,$$

hay

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = -4, \quad \text{với} \quad x = \frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.23. Xét đồng nhất thức

$$\tan t.\tan 3t = \frac{\tan^2 2t - \tan^2 t}{1 - \tan^2 t.\tan 2t}\cdot$$

Ta sẽ chứng minh đồng nhất thức đã cho. Ta có

$$\begin{aligned} VP &= \frac{\tan 2t + \tan t}{1 - \tan t.\tan 2t} \cdot \frac{\tan 2t - \tan t}{1 - \tan t.\tan 2t} \\ &= \tan(2t+t).\tan(2t-t) \\ &= \tan 3t.\tan t = VT. \end{aligned}$$

Ta viết lại đồng nhất thức đã cho dưới dạng

$$i\tan(it).i\tan i(3t) = \frac{(i\tan i(2t))^2 - (i\tan it)^2}{1-(i\tan it)^2(i\tan i(2t))^2}.$$

Hệ thức đại số ứng với đẳng thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot\frac{a^6-1}{a^6+1} = \frac{\left(\frac{a^4-1}{a^4+1}\right)^2 - \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2}{1-\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)^2\left(\frac{a^4-1}{a^4-1}\right)^2},$$

hay

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot\frac{a^6-1}{a^6+1} = \frac{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 - x^2}{1-x^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2},\quad \text{với}\quad x=\frac{a^2-1}{a^2+1}.$$

Ví dụ 2.24. Xét đồng nhất thức

$$\cot t - \tan t - 2\tan 2t = 4\cot 4t.$$

Trước hết ta chứng minh đồng nhất thức đã cho. Ta có

$$\cot x - \tan x = \frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{1-\tan^2 x}{\tan x} = 2\cot 2x. \tag{2.3}$$

$$\left(\text{Vì } 2\cot 2x = \frac{2}{\tan 2x} = \frac{2}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} = \frac{1-\tan^2 x}{\tan x}\right).$$

Lần lượt thay x bởi t, 2t thì đẳng thức (2.3) trở thành

$$\cot t - \tan t = 2\cot 2t. \tag{2.4}$$

$$2(\cot 2t - \tan 2t) = 4\cot 4t. \tag{2.5}$$

Cộng các vế của (2.4) và (2.5) và làm gọn ta được

$$\cot t - \tan t - 2\tan 2t = 4\cot 4t.$$

Ta viết lại đồng nhất thức đã cho dưới dạng

$$i\cot it - i\tan it - 2i\tan i(2t) = 4i\cot i(4t).$$

Hệ thức đại số ứng với đẳng thức trên chính là đồng nhất thức

$$\frac{a^2+1}{a^2-1}+\frac{a^2-1}{a^2+1}+2.\frac{a^4-1}{a^4+1}=4\cdot\frac{a^8+1}{a^8-1},$$

hay

$$\frac{1}{x}+x+2\cdot\frac{2x}{1+x^2}=4\cdot\frac{a^8+1}{a^8-1},\quad \text{với}\quad x=\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

Ví dụ 2.25. Xét đồng nhất thức

$$\tan t+2\cot 2t=\cot t.$$

Trước hết ta chứng minh đồng nhất thức đã cho. Ta có

$$\begin{aligned}\tan t-\cot t&=\frac{\sin t}{\cos t}-\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{\cot 2t}{\sin t\cos t}=-\frac{2\cot 2t}{\sin 2t}\\&=-2\cot 2t.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\tan t+2\cot 2t=\cot t.$$

Ta viết lại đồng nhất thức đã cho dưới dạng

$$i\tan it+2i\cot i(2t)=i\cot it.$$

Hệ thức đại số ứng với đẳng thức trên chính là đồng nhất thức đại số

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}-2\frac{a^4+1}{a^4-1}=-\frac{a^2+1}{a^2-1},$$

hay

$$x-\frac{1+x^2}{x}=-\frac{a^2+1}{a^2-1},\quad \text{với}\quad x=\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot$$

2.3 Một số dạng đồng nhất thức hàm

2.3.1 Phép chuyển đổi bảo toàn góc của tam giác

Trong tài liệu [3], bài toán cơ bản sau đây đã được đề cập.

Bài toán 2.1. Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[0;\pi]$, sao cho $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ luôn tạo thành số đo các góc của một tam giác nào đó ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét rằng, hai hàm số $f(x) = x$ và $f(x) = \dfrac{\pi}{3}$ thỏa mãn bài toán.
Ta phát biểu bài toán dưới dạng sau

Xác định các hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[0;\pi]$ và

$$f(x) > 0, f(x)+f(y)+f(\pi - x - y) = \pi, \forall x, y \in (0;\pi), x+y < \pi. \quad (2.6)$$

Cho $y \to 0^+$, ta thu được

$$f(x) + f(0) + f(\pi - x) = \pi, \forall x \in (0;\pi)$$

hay

$$f(\pi - x) = \pi - f(0) - f(x), \forall x \in (0;\pi).$$

Thay vào (2.6), ta thu được

$$f(x) + f(y) + (\pi - f(0) - f(x+y)) = \pi, \forall x, y \in (0;\pi), x + y \leq \pi$$

hay

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0), \forall x, y \in [0;\pi], x + y < \pi. \quad (2.7)$$

Đặt $f(x) = f(0) + g(x)$. Khi đó $g(x)$ liên tục trong đoạn $[0;\pi]$ và (2.7) có dạng

$$f(0)+g(x)+f(0)+g(y) = f(0)+g(x+y)+f(0), \forall x, y \in [0;\pi], x+y < \pi$$

$$\Leftrightarrow g(x) + g(y) = g(x+y), \forall x, y \in [0;\pi], x + y < \pi. \quad (2.8)$$

Do $g(x)$ liên tục trong đoạn $[0;\pi]$ nên (2.8) là phương trình hàm Cauchy, một dạng phương trình hàm cơ bản, có nghiệm $g(x) = \alpha x$. Suy ra $f(x) = f(0) + \alpha x$.

Đặt $f(0) = \beta$, ta được $f(x) = \alpha x + \beta$.

Ta cần xác định α, β để $f(x) > 0$, $\forall x \in (0;\pi)$, $x + y < \pi$ và $f(A) + f(B) + f(C) = \pi$ hay

$$\begin{cases} \alpha x + \beta > 0, \forall x \in (0;\pi); \\ \alpha A + \beta + \alpha B + \beta + \alpha C + \beta = \pi. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta > 0, \forall x \in (0;\pi); \\ \alpha(A + B + C) + 3\beta = \pi. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta > 0, \forall x \in (0; \pi); \\ \alpha\pi + 3\beta = \pi. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta > 0, \forall x \in (0; \pi); \\ \beta = \dfrac{(1-\alpha)\pi}{3}. \end{cases}$$

Do đó

$$f(x) = \alpha x + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \forall x \in (0; \pi). \tag{2.9}$$

Cho $x \to 0^+$, từ (2.9), suy ra

$$\frac{(1-\alpha)\pi}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1.$$

Cho $x \to \pi^-$, từ (2.9), suy ra

$$\alpha\pi + \frac{(1-\alpha)\pi}{3} \geq 0 \text{ hay } \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

Vậy $-\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Với $-\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$, thì $f(x)$ xác định bởi (2.9) hiển nhiên thỏa mãn bài toán.

Xét $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ thì $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Thật vậy, với $0 < x < \pi$ thì $f(x) > f(\pi) = 0$. Suy ra $f(x) > 0$, $\forall x \in (0; \pi)$.

Xét $\alpha = 1$ thì $f(x) = x$ hiển nhiên thỏa mãn điều kiện bài ra. Vậy các hàm số cần tìm đều có dạng

$$f(x) = \alpha x + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1.$$

Như vậy, lời giải trên đây đã vét hết tất cả các nghiệm, là các hàm số $f(x)$, thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Bây giờ, ta tiếp tục tìm kiếm những áp dụng cụ thể của bài toán trên và xét những trường hợp khác mà bài toán chưa đề cập.

Từ Bài toán đã xét, ta có

Mệnh đề 2.1. *Với* $-\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$*, nếu* A*,* B*,* C *là ba góc của một tam giác, thì* A_1*,* B_1*,* C_1 *xác định như sau*

$$A_1 = \alpha A + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},\;\; B_1 = \alpha B + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},\;\; C_1 = \alpha C + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 2.2. *Với* $\alpha < -\dfrac{1}{2}$*, nếu* A*,* B*,* C *là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\max\{A, B, C\} < \dfrac{(\alpha-1)\,\pi}{3\alpha}$*, thì* A_1*,* B_1*,* C_1 *xác định như sau*

$$A_1 = \alpha A + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},\;\; B_1 = \alpha B + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},\;\; C_1 = \alpha C + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Thật vậy, với $\alpha < -\dfrac{1}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
&\max\{A, B, C\} < \frac{(\alpha-1)\,\pi}{3\alpha}\\
&\Rightarrow A < \frac{(\alpha-1)\,\pi}{3\alpha}\\
&\Rightarrow 3\alpha A + (1-\alpha)\,\pi > 0\\
&\Rightarrow \alpha A + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3} > 0 \Rightarrow A_1 > 0.
\end{aligned}$$

Tương tự $B_1 > 0$ và $C_1 > 0$. Hơn nữa, $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$, nên ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 2.3. *Với* $\alpha > 1$*, nếu* A*,* B*,* C *là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\min\{A, B, C\} > \dfrac{(\alpha-1)\,\pi}{3\alpha}$*, thì* A_1*,* B_1*,* C_1 *xác định như sau*

$$A_1 = \alpha A + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},\;\; B_1 = \alpha B + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},\;\; C_1 = \alpha C + \frac{(1-\alpha)\,\pi}{3},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Thật vậy, với $\alpha > 1$, ta có

$$\min\{A, B, C\} > \frac{(\alpha - 1)\pi}{3\alpha}$$

$$\Rightarrow A > \frac{(\alpha - 1)\pi}{3\alpha}$$

$$\Rightarrow 3\alpha A + (1 - \alpha)\pi > 0$$

$$\Rightarrow \alpha A + \frac{(1 - \alpha)\pi}{3} > 0 \Rightarrow A_1 > 0.$$

Tương tự $B_1 > 0$ và $C_1 > 0$. Hơn nữa, $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$, nên ta có điều phải chứng minh.

Dưới đây là một số trường hợp riêng, minh họa cho các mệnh đề trên.

- Từ Mệnh đề 2.1, với $\alpha = -\frac{1}{2}$, ta có

Hệ quả 2.1. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{\pi - A}{2}, \quad B_1 = \frac{\pi - B}{2}, \quad C_1 = \frac{\pi - C}{2}$$

hay

$$A_1 = \frac{B + C}{2}, \quad B_1 = \frac{C + A}{2}, \quad C_1 = \frac{A + B}{2}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 2.1, với $\alpha = \frac{1}{2}$, ta có

Hệ quả 2.2. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{\pi + 3A}{6}, \quad B_1 = \frac{\pi + 3B}{6}, \quad C_1 = \frac{\pi + 3C}{6}$$

hay

$$A_1 = \frac{4A + B + C}{6}, \quad B_1 = \frac{4B + C + A}{6}, \quad C_1 = \frac{4C + A + B}{6}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 2.2, với $\alpha = -\frac{2}{3}$, ta có

Hệ quả 2.3. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn*

$$\max\{A, B, C\} < \frac{5\pi}{6}$$

thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = \frac{5\pi - 6A}{9}, \quad B_1 = \frac{5\pi - 6B}{9}, \quad C_1 = \frac{5\pi - 6C}{9}$$

hay

$$A_1 = \frac{5B + 5C - A}{9}, \quad B_1 = \frac{5C + 5A - B}{9}, \quad C_1 = \frac{5A + 5B - C}{9}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 2.2, với $\alpha = -\frac{4}{5}$, ta có

Hệ quả 2.4. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn*

$$\max\{A, B, C\} < \frac{3\pi}{4}$$

thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = \frac{3\pi - 4A}{5}, \quad B_1 = \frac{3\pi - 4B}{5}, \quad C_1 = \frac{3\pi - 4C}{5}$$

hay

$$A_1 = \frac{3B + 3C - A}{5}, \quad B_1 = \frac{3C + 3A - B}{5}, \quad C_1 = \frac{3A + 3B - C}{5}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 2.2, với $\alpha = -1$, ta có

Hệ quả 2.5. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn*

$$\max\{A, B, C\} < \frac{2\pi}{3}$$

thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = \frac{2\pi}{3} - A, \quad B_1 = \frac{2\pi}{3} - B, \quad C_1 = \frac{2\pi}{3} - C$$

hay

$$A_1 = \frac{2B + 2C - A}{3}, \quad B_1 = \frac{2C + 2A - B}{3}, \quad C_1 = \frac{2A + 2B - C}{3}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 2.2, với $\alpha = -2$, ta có

Hệ quả 2.6. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn*

$$\max\{A, B, C\} < \frac{\pi}{2}$$

tức là tam giác ABC nhọn, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = \pi - 2A, \quad B_1 = \pi - 2B, \quad C_1 = \pi - 2C$$

hay

$$A_1 = B + C - A, \quad B_1 = C + A - B, \quad C_1 = A + B - C$$

cũng là ba góc của một tam giác.
- Từ Mệnh đề 2.3, với $\alpha = 2$, ta có

Hệ quả 2.7. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn*

$$\min\{A, B, C\} > \frac{\pi}{6}$$

thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = 2A - \frac{\pi}{3}, \quad B_1 = 2B - \frac{\pi}{3}, \quad C_1 = 2C - \frac{\pi}{3}$$

hay

$$A_1 = \frac{5A - B - C}{3}, \quad B_1 = \frac{5B - C - A}{3}, \quad C_1 = \frac{5C - A - B}{3}$$

cũng là ba góc của một tam giác.
- Từ Mệnh đề 2.3, với $\alpha = 4$, ta có

Hệ quả 2.8. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn*

$$\min\{A, B, C\} > \frac{\pi}{4}$$

thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = 4A - \pi, \quad B_1 = 4B - \pi, \quad C_1 = 4C - \pi$$

hay

$$A_1 = 3A - B - C, \quad B_1 = 3B - C - A, \quad C_1 = 3C - A - B$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Bây giờ, nhận xét rằng, với $-\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha A + \frac{(1-\alpha)\pi}{3} \\ &= \alpha A + \frac{(1-\alpha)(A+B+C)}{3} \\ &= \frac{(1+2\alpha)}{3}A + \frac{(1-\alpha)}{3}B + \frac{(1-\alpha)}{3}C. \end{aligned}$$

Tương tự như biểu diễn trên đối với B_1 và C_1.

Đặt

$$\alpha_1 = \frac{1+2\alpha}{3}, \beta_1 = \gamma_1 = \frac{1-\alpha}{3}.$$

Thế thì α_1, β_1, $\gamma_1 \geq 0$ và $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$. Khi đó

$$A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C,\ \ B_1 = \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A,\ \ C_1 = \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Nhận xét trên gợi ý cho ta kết quả sau

Mệnh đề 2.4. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$\begin{cases} A_1 = \alpha A + \beta B + \gamma C; \\ B_1 = \alpha B + \beta C + \gamma A; \\ C_1 = \alpha C + \beta A + \gamma B, \end{cases} \tag{2.10}$$

trong đó α, β, $\gamma \geq 0$ và $\alpha + \beta + \gamma = 1$, cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra được rằng A_1, B_1, $C_1 > 0$ và

$$A_1 + B_1 + C_1 = (\alpha + \beta + \gamma)(A + B + C) = 1.\pi = \pi.$$

Bây giờ, giả sử ngược lại, A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác cho trước. Ta cần xác định các góc A, B, C của tam giác ABC thỏa mãn hệ phương trình (2.10) nêu trên.

Giải hệ phương trình tuyến tính này (có thể bằng phương pháp sử dụng định thức), ta được

$$A = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma) A_1 + (\gamma^2 - \alpha\beta) B_1 + (\beta^2 - \gamma\alpha) C_1}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$

$$B = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)\, B_1 + (\gamma^2 - \alpha\beta)\, C_1 + (\beta^2 - \gamma\alpha)\, A_1}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$
$$C = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)\, C_1 + (\gamma^2 - \alpha\beta)\, A_1 + (\beta^2 - \gamma\alpha)\, B_1}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma},$$

với điều kiện phát sinh là α, β, γ không đồng thời bằng nhau (bằng $\frac{1}{3}$).

Để thống nhất trong việc trình bày nội dung các mệnh đề, ta thay đổi kí hiệu các góc của hai tam giác cho nhau và thu được kết quả sau

Mệnh đề 2.5. *Cho các số α, β, $\gamma \geq 0$, không đồng thời bằng nhau (bằng $\frac{1}{3}$) và $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$\begin{cases} A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C; \\ B_1 = \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A; \\ C_1 = \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B, \end{cases} \tag{2.11}$$

trong đó

$$\alpha_1 = \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$
$$\beta_1 = \frac{\gamma^2 - \alpha\beta}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$
$$\gamma_1 = \frac{\beta^2 - \gamma\alpha}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chẳng hạn, các số α, β, γ sau đây thỏa mãn Mệnh đề 2.5

$$\alpha = \sin^2\varphi, \quad \beta = \cos^2\varphi, \quad \gamma = 0.$$

Do đó, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C;$$
$$B_1 = \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A;$$
$$C_1 = \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B,$$

trong đó

$$\alpha_1 = \frac{\sin^4\varphi}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi};$$
$$\beta_1 = \frac{-\sin^2\varphi.\cos^2\varphi}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi};$$
$$\gamma_1 = \frac{\cos^4\varphi}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Bây giờ, ta tiếp tục các hướng khai thác khác để các kết quả tìm được phong phú hơn.

Nhận xét rằng, trong các kết quả ở các phần trên đây, cách thiết lập các góc A_1, B_1, C_1 từ các góc A, B, C có tính hoán vị vòng quanh. Do đó, vai trò của các góc A_1, B_1, C_1 là như nhau. Trong phần tiếp theo, ta sẽ thiết lập các góc của một tam giác mà vai trò của chúng không như nhau, vì tính hoán vị vòng quanh không thực hiện được.

Chẳng hạn, từ Mệnh đề 2.1 ta thấy rằng, với α là số thực bất kì, nếu đặt

$$A_2 = \alpha A, \quad B_2 = \alpha B, \quad C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\,\pi,$$

thì $A_2 + B_2 + C_2 = \pi$. Do đó, nếu $A_2 > 0$, $B_2 > 0$, $C_2 > 0$ thì A_2, B_2, C_2 là ba góc của một tam giác. Ta có các kết quả sau

Mệnh đề 2.6. *Với $0 < \alpha \le 1$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = \alpha A, \quad B_2 = \alpha B, \quad C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\,\pi,$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Rõ ràng $A_2 > 0$, $B_2 > 0$, $C_2 > 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

- Từ Mệnh đề 2.6, với $\alpha = \dfrac{1}{2}$, ta có

Hệ quả 2.9. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = \frac{A}{2}, \quad B_2 = \frac{B}{2}, \quad C_2 = \frac{\pi + C}{2}$$

cũng là ba góc của một tam giác, trong đó C_2 là góc tù.

Mệnh đề 2.7. *Với $0 < \alpha \leq 2$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, trong đó C là góc tù, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = \alpha A, \quad B_2 = \alpha B, \quad C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\,\pi,$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Rõ ràng $A_2 > 0$, $B_2 > 0$. Ngoài ta, ta có

$$C > \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\,\pi > \alpha\frac{\pi}{2} + (1-\alpha)\,\pi = \frac{(2-\alpha)\,\pi}{2} \geq 0 \Rightarrow C_2 > 0.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

- Từ Mệnh đề 2.7, với $\alpha = 2$, ta có

Hệ quả 2.10. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, trong đó C là góc tù, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = 2A, \quad B_2 = 2B, \quad C_2 = 2\pi - C$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 2.8. *Với $-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \alpha A + m\pi, \quad B_3 = \alpha B + n\pi, \quad C_3 = \alpha C + p\pi,$$

trong đó

$$m \geq -\alpha, \;\; n \geq -\alpha, \;\; p \geq -\alpha, \;\; m + n + p = 1 - \alpha,$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Ta có

$$A_3 + B_3 + C_3 = \alpha\,(A + B + C) + (m + n + p)\,\pi = \alpha\pi + (1-\alpha)\,\pi = \pi.$$

Ngoài ra, ta có

$$A < \pi \Rightarrow -\alpha A < -\alpha\pi \Rightarrow -\alpha > \frac{-\alpha A}{\pi}.$$

Theo giả thiết, ta có $m \geq -\alpha$. Dó đó

$$m > \frac{-\alpha A}{\pi} \Rightarrow \alpha A + m\pi > 0 \Rightarrow A_3 > 0.$$

Tương tự, ta có $B_3 > 0$ và $C_3 > 0$.
Cuối cùng, vì $m \geq -\alpha$, $n \geq -\alpha$, $p \geq -\alpha$, nên $1-\alpha = m+n+p \geq -3\alpha$.
Như vậy, giả thiết $\alpha \geq -\dfrac{1}{2}$ sẽ đảm bảo được rằng $1-\alpha \geq -3\alpha$.
Ta có điều phải chứng minh.

- Từ Mệnh đề 2.8, với $\alpha = -\dfrac{1}{4}$, $m = \dfrac{1}{4}$, $n = \dfrac{1}{4}$, $p = \dfrac{3}{4}$, ta có

Hệ quả 2.11. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = -\frac{A}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad B_3 = -\frac{B}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad C_3 = -\frac{C}{4} + \frac{3\pi}{4},$$

cũng là ba góc của một tam giác.
Tiếp theo, dễ dàng chứng minh được các kết quả sau đây

Mệnh đề 2.9. *Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn (hoặc vuông tại C), thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \frac{\pi}{2} - A, \quad B_3 = \frac{\pi}{2} - B, \quad C_3 = \pi - C,$$

cũng là ba góc của một tam giác tù (hoặc vuông tại C_3).

Mệnh đề 2.10. *Nếu tam giác ABC có góc C tù (hoặc vuông), thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \frac{\pi}{2} - A, \quad B_3 = \frac{\pi}{2} - B, \quad C_3 = \pi - C,$$

cũng là ba góc của một tam giác nhọn (hoặc vuông tại C_3).

2.3.2 Áp dụng

Từ những kết quả ở phần trên ta thấy rằng, với ba góc của một tam giác cho trước, có thể tạo ra được ba góc của một tam giác mới và do đó có thể suy ra được nhiều hệ thức lượng giác liên quan đến các góc của tam giác đó. Hơn nữa, bằng cách phối hợp những phương pháp khác nhau, ta còn có thể tạo ra được nhiều đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác khác, vô cùng phong phú.

Sau đây là một vài ví dụ.

Giả sử rằng, ta đã chứng minh được các hệ thức sau đây và xem chúng là những hệ thức "gốc" ban đầu

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{2.12}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \tag{2.13}$$

$$0 < \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}, \tag{2.14}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C. \tag{2.15}$$

Áp dụng Hệ quả 2.1 vào (2.12), ta có

$$\sin\left(\frac{\pi - A}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi - B}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi - C}{2}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.1. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Áp dụng Hệ quả 2.1 vào (2.13), ta có

$$\cos\left(\frac{\pi - A}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi - B}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi - C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.2. $\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$

Áp dụng Hệ quả 2.1 vào (2.15), ta có

$$\sin 2\left(\frac{\pi - A}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi - B}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi - C}{2}\right) = 4 \sin\frac{\pi - A}{2} \sin\frac{\pi - B}{2} \sin\frac{\pi - C}{2}$$

hay

$$\sin(\pi - A) + \sin(\pi - B) + \sin(\pi - C) = 4 \sin\frac{\pi - A}{2} \sin\frac{\pi - B}{2} \sin\frac{\pi - C}{2}.$$

Như vậy, ta đã tạo được đẳng thức sau

Đẳng thức 2.1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

Bây giờ, để sáng tác thêm những hệ thức đa dạng hơn, ta tiếp tục khai thác những kết quả trên, chẳng hạn từ Bất đẳng thức 2.2 ta có

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right) \le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin A\sin B\sin C \le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \tag{2.16}$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.3. $\sin A\sin B\sin C \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

Bởi (2.15) và Đẳng thức 2.1, từ (2.16), ta có bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.4. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sin A + \sin B + \sin C.$

Ta tiếp tục khai thác Bất đẳng thức 2.4. Nhận xét rằng, nếu tam giác ABC là tam giác nhọn thì, áp dụng Hệ quả 2.6 vào Bất đẳng thức 2.4, ta có

$$\begin{aligned} & \sin 2(\pi - 2A) + \sin 2(\pi - 2B) + \sin 2(\pi - 2C) \\ & \le \sin(\pi - 2A) + \sin(\pi - 2B) + \sin(\pi - 2C) \\ \Leftrightarrow\ & -\sin 4A - \sin 4B - \sin 4C \le \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C. \end{aligned}$$

Như vậy, ta tiếp tục tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.5.

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C \ge 0.$$

Bây giờ, áp dụng Hệ quả 2.9 vào Bất đẳng thức 2.4, ta có

$$\sin\left(2.\frac{A}{2}\right) + \sin\left(2.\frac{B}{2}\right) + \sin\left(2.\frac{\pi + C}{2}\right) \le \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{\pi + C}{2}.$$

Ta tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.6. $\sin A + \sin B - \sin C \leq \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}.$

Bây giờ, giả sử tam giác ABC có góc C tù. Áp dụng Hệ quả 2.10 vào Bất đẳng thức 2.1, ta có

$$\cos\frac{2A}{2} + \cos\frac{2B}{2} + \cos\frac{2C-\pi}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ta tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.7. $\cos A + \cos B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(C > \dfrac{\pi}{2}\right).$

Tiếp theo, giả sử tam giác ABC nhọn (hoặc vuông tại C). Áp dụng Mệnh đề 2.9 vào (2.14), ta có

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\sin(\pi - C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot$$

Ta được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.8. $0 < \cos A\cos B\sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \quad \left(C \leq \dfrac{\pi}{2}\right).$

Bây giờ, giả sử tam giác ABC có góc C tù (hoặc vuông). Áp dụng Mệnh đề 2.10 vào (2.12), ta có

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \sin(\pi - C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Ta được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.9. $0 < \cos A + \cos B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(C \geq \dfrac{\pi}{2}\right).$

2.3.3 Phép chuyển đổi bảo toàn cạnh của tam giác

Hai bài toán sau cũng đã được tài liệu [3] đề cập

Bài toán 2.2. Xác định các cặp số α, β để hàm số $f(x) = \alpha x + \beta$ có

Tính chất 2.1. là $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ luôn lập thành độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải. Để $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết ta phải có

$$f(a) > 0, f(b) > 0, f(c) > 0, \quad \forall \Delta ABC.$$

Suy ra

$$\alpha a+\beta>0, \alpha b+\beta>0, \alpha c+\beta>0, \quad \forall \Delta ABC. \tag{2.17}$$

Do đó $\alpha \geq 0$. Thật vậy, nếu $\alpha < 0$, β tùy ý thì ta chọn tam giác ABC có a đủ lớn. Khi đó, theo tính chất của nhị thức bậc nhất, ta cũng sẽ nhận được $\alpha a+\beta<0$.

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\alpha=0$, $\beta=0$ thì $f(x) \equiv 0$ không thỏa mãn bài toán.

Ngược lại, với $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta>0$ thì ta thấy $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Thật vậy, ta có

$$f(a)+f(b)>f(c), \quad f(b)+f(c)>f(a), \quad f(c)+f(a)>f(b),$$

tức là

$$\begin{cases} \alpha a+\beta+\alpha b+\beta>\alpha c+\beta \\ \alpha b+\beta+\alpha c+\beta>\alpha a+\beta \\ \alpha c+\beta+\alpha a+\beta>\alpha b+\beta \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \alpha(a+b)+\beta>\alpha c \\ \alpha(b+c)+\beta>\alpha a \\ \alpha(c+a)+\beta>\alpha b. \end{cases}$$

Điều này hiển nhiên vì $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta>0$.

Vậy với $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha+\beta>0$ thì hàm số $f(x)=\alpha x+\beta$ có tính chất là $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ luôn lập thành độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bài toán 2.3. Xác định các cặp số α, β để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\alpha x+\beta}$ có tính chất là $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ luôn lập thành độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta luôn giả thiết $a \geq b \geq c$.

Nhận xét rằng, hàm số $g(x)=\dfrac{1}{x}$ (phép nghịch đảo) không có tính chất $g(a)$, $g(b)$, $g(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác

ABC cho trước. Thật vậy, xét tam giác cân ABC có $a = b = 2$, $c = 1$, thì ta có $g(a) = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$, $g(b) = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$, $g(c) = \dfrac{1}{c} = 1$.

Khi đó
$$g(a) + g(b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = g(c).$$

Để $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác cho trước, trước hết ta phải có

$$f(a) > 0, f(b) > 0, f(c) > 0, \quad \forall \Delta ABC.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\alpha a + \beta} > 0, \frac{1}{\alpha b + \beta} > 0, \frac{1}{\alpha c + \beta} > 0, \quad \forall \Delta ABC$$

hay
$$\alpha a + \beta > 0, \alpha b + \beta > 0, \alpha c + \beta > 0, \quad \forall \Delta ABC. \tag{2.18}$$

Từ (2.18), ta thu được $\alpha \geq 0$. Thật vậy, nếu $\alpha < 0$, β tùy ý cho trước, thì ta chọn tam giác ABC có a đủ lớn. Khi đó, theo tính chất của nhị thức bậc nhất, ta sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$.

Tương tự, cũng từ (2.18) suy ra $\beta \geq 0$. Thật vậy, nếu $\beta < 0$ thì ta chọn tam giác ABC có a đủ nhỏ. Khi đó, theo tính chất của nhị thức bậc nhất, ta cũng sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$.

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\alpha = 0$, $\beta = 0$ thì $f(x)$ không xác định.

Với $\alpha = 0$, $\beta > 0$, ta thu được hàm hằng dương $f(x) = \dfrac{1}{\beta}$ nên $f(a) = f(b) = f(c) > 0$ và $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác đều.

Với $\alpha > 0$, $\beta = 0$, thì $f(x) = \dfrac{1}{\alpha x}$ không thỏa mãn bài toán (do nhận xét trên).

Xét trường hợp $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Khi đó, với $a \geq b \geq c$, ta có

$$\alpha a + \beta \geq \alpha b + \beta \geq \alpha c + \beta > 0.$$

Suy ra
$$\frac{1}{\alpha a + \beta} \leq \frac{1}{\alpha b + \beta} \leq \frac{1}{\alpha c + \beta}$$

hay
$$f(a) \leq f(b) \leq f(c).$$

Vậy ta cần xác định các số $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sao cho luôn có $f(a) + f(b) > f(c)$ ứng với mọi tam giác ABC thỏa mãn $a \geq b \geq c$ hay

$$\frac{1}{\alpha a + \beta} + \frac{1}{\alpha b + \beta} > \frac{1}{\alpha c + \beta}, \ \ \forall \Delta ABC : a \geq b \geq c. \qquad (2.19)$$

Xét các tam giác cân ABC đồng dạng với tam giác cân cạnh 3, 3, 1, tức là $a = b = 3d$, $c = d$ với $d > 0$ tùy ý. Khi đó (2.19) có dạng

$$\frac{1}{3d\alpha + \beta} + \frac{1}{3d\alpha + \beta} > \frac{1}{d\alpha + \beta}, \ \ \forall d > 0.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2}{3d\alpha + \beta} > \frac{1}{d\alpha + \beta}, \ \ \forall d > 0$$

hay

$$2d\alpha + 2\beta > 3d\alpha + \beta, \ \ \forall d > 0,$$

tức là $\beta > d\alpha$, $\forall d > 0$. Điều này không xảy ra khi d đủ lớn.

Vậy với $\alpha = 0$, $\beta > 0$, thì hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta},$$

(tức là hàm hằng, dương) có tính chất $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Trên đây là hai bài toán khá tổng quát để xác định một số hàm số có tính chất $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bây giờ, ta cũng tiếp tục tìm kiếm những áp dụng cụ thể của bài toán trên và xét những trường hợp khác mà bài toán chưa đề cập.

Mệnh đề 2.11. Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$\frac{1}{a+b}, \ \ \frac{1}{b+c}, \ \ \frac{1}{c+a}$$

cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{2(b+c)}.$$

Thật vậy

$$b + c > a \Rightarrow b + 2c > a \Rightarrow 2b + 2c > a + b \Rightarrow \frac{1}{a+b} > \frac{1}{2\left(b+c\right)}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{2\left(b+c\right)}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c}.$$

Do đó, tương tự, ta có

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{c+a}, \frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Mệnh đề 2.12. Nếu h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao của một tam giác có ba cạnh a, b, c, thì $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho.

Chứng minh. Ta có

$$2S = \frac{a}{\left(\dfrac{1}{h_a}\right)} = \frac{b}{\left(\dfrac{1}{h_b}\right)} = \frac{c}{\left(\dfrac{1}{h_c}\right)}.$$

Suy ra $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác có ba cạnh là a, b, c, tỉ số đồng dạng là $k = \frac{1}{2S}$.

Mệnh đề 2.13. Độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c lập thành ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh. Giả sử tam giác ABC có các trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại G. Qua C_1 kẻ đường thẳng song song với AA_1, cắt BB_1, BC tại E, Q. Qua C kẻ đường thẳng song song với BB_1, cắt C_1Q tại P. Ta có

$$EG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}m_b = \frac{1}{3}m_b;$$

$$\frac{EG}{PC} = \frac{C_1G}{C_1C} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow EG = \frac{1}{3}PC.$$

Suy ra $PC = m_b$. Ta có

$$\frac{C_1E}{C_1P} = \frac{C_1G}{C_1C} = \frac{1}{3} \Rightarrow C_1E = \frac{1}{3}C_1P;$$

$$C_1E = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}m_a = \frac{1}{3}m_a.$$

Suy ra $C_1P = m_a$ và $CC_1 = m_c$. Từ đó tam giác CC_1P có ba cạnh là m_a, m_b, m_c (đpcm).

Mệnh đề 2.14. Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác A, B, C, thỏa mãn $\min(A, B, C) \geq \frac{\pi}{12}$, thì $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Gỉa sử $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$ không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác. Khi đó ta phải có, chẳng hạn, bất đẳng thức sau

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} \leq \sqrt{ca}$$

hay

$$\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \leq 1. \tag{2.20}$$

Từ (2.20), suy ra $\min\left(\sqrt{\frac{b}{c}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \leq \frac{1}{2}$, chẳng hạn $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2}$ hay $\frac{b}{c} \leq \frac{1}{4}$. Theo Định lí Hàm số sin, suy ra $\frac{\sin B}{\sin C} \leq \frac{1}{4}$ hay

$$\sin B \leq \frac{1}{4}. \tag{2.21}$$

Ngoài ra, ta có

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} > \frac{1}{4}.$$

Từ đó ta có, góc nhọn α mà $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ thì $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$.

Bởi (2.21), ta có $\sin B \le \sin \alpha$. Xét hai khả năng có thể xảy ra, như sau

- Nếu $B \le \alpha < \dfrac{\pi}{12}$, thì điều này vô lí, vì $B \ge \min(A, B, C) \ge \dfrac{\pi}{12}$.

- Nếu $B \ge \pi - \alpha$, thì A và C đều nhỏ hơn $\dfrac{\pi}{12}$. Điều này cũng vô lý, vì $\min(A, B, C) \ge \dfrac{\pi}{12}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.3.4 Áp dụng

Từ Bài toán 2.3, ta có thể sáng tác được bài toán sau đây.

Bài toán 2.4. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác có ba cạnh là

$$\frac{1}{a+1},\ \ \frac{1}{b+1},\ \ \frac{1}{c+1},$$

trong đó a, b, c là ba cạnh của một tam giác (không phải là tam giác đều) nào đó.

Tiếp theo là một phương pháp để sáng tác một số bài toán khác.

Theo Mệnh đề 2.12, ta có $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác. Do đó $\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} > \dfrac{1}{h_a}$. Vậy nếu ta chọn h_a, h_b, h_c sao cho $\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} \le \dfrac{1}{h_a}$, thì $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$ không thể lập thành ba cạnh của một tam giác. Chẳng hạn, chọn

$$h_a = 1,\ \ h_b = \sqrt{5},\ \ h_c = 1 + \sqrt{5},$$

thì

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{9\sqrt{5}-5}{20} < 1 = \frac{1}{h_a}.$$

Từ đó, ta thu được bài toán sau

Bài toán 2.5. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác có ba đường cao là

$$h_a = 1,\ \ h_b = \sqrt{5},\ \ h_c = 1 + \sqrt{5}.$$

Ta biết rằng, nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác, thì

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)\,. \tag{2.22}$$

Thật vậy, ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ca$. Tương tự, ta có $b^2 < bc + ab$, $c^2 < ca + bc$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Ngoài ra, ta có thể chứng minh được rằng

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, \tag{2.23}$$

với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Thật vậy, ta có $S = rp = r\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

Suy ra

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Vì $\dfrac{1}{h_a}$, $\dfrac{1}{h_b}$, $\dfrac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác (theo Mệnh đề 2.12) nên từ (2.19) và (2.20), ta có

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} < 2\left(\frac{1}{h_ah_b} + \frac{1}{h_bh_c} + \frac{1}{h_ch_a}\right).$$

Vậy

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)^2 < 4\left(\frac{1}{h_ah_b} + \frac{1}{h_bh_c} + \frac{1}{h_ch_a}\right).$$

Tóm lại, từ các phương pháp phối hợp trên đây, ta đã tạo ra được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.10. $\dfrac{1}{h_ah_b} + \dfrac{1}{h_bh_c} + \dfrac{1}{h_ch_a} > \dfrac{1}{4r^2}$.

Hơn nữa, phối hợp các mệnh đề và áp dụng các công thức trên, ta sẽ thu được nhiều kết quả thú vị. Chẳng hạn, từ Mệnh đề 2.13, bởi (2.19), ta có bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.11. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < 2\left(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a\right)$.

Một cách phối hợp khác, chẳng hạn, từ Mệnh đề 2.12 ta biết rằng $\dfrac{1}{h_a}$, $\dfrac{1}{h_b}$, $\dfrac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác. Do đó, theo Mệnh đề 2.11, ta có

$$\frac{1}{\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b}},\quad \frac{1}{\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}},\quad \frac{1}{\dfrac{1}{h_c} + \dfrac{1}{h_a}}$$

hay

$$\frac{h_ah_b}{h_a+h_b},\quad \frac{h_bh_c}{h_b+h_c},\quad \frac{h_ch_a}{h_c+h_a}$$

cũng lập thành ba cạnh của một tam giác.

Từ nhận xét trên, ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 2.12. $$\frac{h_ah_b}{h_a+h_b}+\frac{h_bh_c}{h_b+h_c}>\frac{h_ch_a}{h_c+h_a}.$$

Chương 3

Một số lớp phương trình và bất phương trình trong đại số giải bằng các đồng nhất thức

3.1 Giải và biện luận phương trình bậc ba

Xét phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (a \neq 0).$$

Bài toán 3.1. Giải phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \ \ (a \neq 0) \tag{3.1}$$

biết $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
Lời giải. Vì $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình (3.1) nên ta có thể viết (3.1) dưới dạng

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d.$$

Suy ra

$$(x - x_0)[ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c] = 0.$$

Xét phương trình

$$ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c = 0. \tag{3.2}$$

Ta có

$$\Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a(ax_0^2 + bx_0 + c).$$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình (3.2) vô nghiệm, do đó phương trình (3.1) có nghiệm duy nhất là $x = x_0$.

Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình (3.2) có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Vậy phương trình (3.1) có ba nghiệm là

$$x_0, x_{1,2} = \frac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Bài toán 3.2. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = m, \quad |m| \leq 1. \tag{3.3}$$

Lời giải. Đặt

$$m = \cos\alpha(\text{ hay } m = \cos(\alpha \pm 2\pi)).$$

Vì

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$$

nên có thể viết phương trình (3.3) dưới dạng

$$4x^3 - 3x = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Từ đó, ta nhận được phương trình

$$(x - \cos\frac{\alpha}{3})[4x^2 + 4x\cos\frac{\alpha}{3} + 4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \cos\frac{\alpha}{3} = 0 \\ \\ 4x^2 + 4x\cos\frac{\alpha}{3} + 4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3] = 0. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình (3.3) có ba nghiệm là

$$x_1 = \cos\frac{\alpha}{3};\ x_{2,3} = \cos\frac{\alpha \pm 2\pi}{3}.$$

Bài toán 3.3. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = m, |m| > 1. \tag{3.4}$$

Lời giải. Ta nhận xét rằng khi $|x| \leqslant 1$ thì giá trị tuyệt đối của biểu thức ở vế trái của phương trình không vượt quá 1 nên khác m. Vì vậy, ta có thể đặt

$$x = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}),\ a \neq 0.$$

Khi đó, ta sẽ chứng minh được

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3}).$$

Từ đó ta có cách giải đối với phương trình (3.4) như sau.
Đặt

$$m = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right).$$

Suy ra

$$a = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 - 1}}$$

Với cách đặt m như trên thì phương trình (3.4) có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Thật vậy, giả sử phương trình (3.4) có nghiệm x_0 thì $x_0 \notin [-1; 1]$. Suy ra $|x_0| > 1$. Khi đó (3.4) có dạng

$$4x^3 - 3x = 4x_0^3 - 3x_0$$

hay

$$(x - x_0)(4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3) = 0.$$

Xét phương trình

$$4x^2 + 4xx_0 + 4x_0^2 - 3) = 0 \tag{3.5}$$

Ta có $\Delta' = 12 - 12x_0^2 < 0$. Do đó phương trình (3.5) vô nghiệm.
Vậy phương trình (3.4) có một nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}}).$$

Bài toán 3.4. Giải và biện luận phương trình

$$4x^3 + 3x = m,\ m \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Lời giải. Ta có nhận xét rằng nếu phương trình (3.6) có nghiệm $x = x_0$ thì đó cũng chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy, với $x > x_0$ thì

$$4x^3 + 3x > 4x_0^3 + 3x_0 = m$$

và với $x < x_0$ thì

$$4x^3 + 3x < 4x_0^3 + 3x_0 = m.$$

Do đó phương trình (3.6) có không quá một nghiệm.

Đặt

$$x = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a}), a \neq 0.$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$4x^3 + 3x = \frac{1}{2}(a^3 - \frac{1}{a^3})\cdot$$

Từ đó ta có cách giải phương trình (3.6) như sau.

Đặt

$$m = \frac{1}{2}\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$$

thì

$$a = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 + 1}}.$$

Khi đó phương trình (3.6) có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{2}(a - \frac{1}{a}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2+1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2+1}}).$$

Bài toán 3.5. Giải và biện luận phương trình

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{3.7}$$

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét rằng mọi phương trình bậc ba dạng tổng quát

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0, \quad (a_1 \neq 0)$$

đều đưa được về dạng phương trình (3.7) với

$$a = \frac{b_1}{a_1}, b = \frac{c_1}{a_1}, c = \frac{d_1}{a_1}.$$

Đặt $x = y - \dfrac{a}{3}$ ta thu được phương trình

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0$$

hay

$$y^3 - py = q, \tag{3.8}$$

với $p = \dfrac{a^3}{3} - b; q = \dfrac{-2a^3}{27} + \dfrac{ab}{3} - c.$

1) Nếu $p = 0$ thì phương trình (3.8) có nghiệm duy nhất $y = \sqrt[3]{q}$.

2) Nếu $p > 0$ thì ta đưa phương trình (3.8) về dạng bài toán 3.2 hoặc bài toán 3.3 bằng cách đặt $y = 2\sqrt{\frac{p}{3}}t$, khi đó ta được phương trình

$$4t^3 - 3t = m, \tag{3.9}$$

với $m = \dfrac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}}$.

a) Nếu $m = 1$ thì phương trình (3.9) có một nghiệm đơn $t_1 = 1$ và một nghiệm kép $t_2 = \dfrac{-1}{2}$.

b) Nếu $m = -1$ thì phương trình (3.9) có một nghiệm đơn $t_1 = -1$ và một nghiệm kép $t_2 = \dfrac{1}{2}$.

c) Nếu $|m| < 1$, thì ta đặt $m = \cos\alpha$. Khi đó phương trình (3.9) có ba nghiệm

$$t_1 = \cos\frac{\alpha}{3},\ t_{2,3} = \cos\frac{\alpha \pm 2\pi}{3}\cdot$$

d) Nếu $|m| > 1$, thì ta đặt $m = \dfrac{1}{2}(d^3 + \dfrac{1}{d^3})$, trong đó

$$d^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}.$$

Khi đó phương trình (3.9) có nghiệm duy nhất

$$t = \frac{1}{2}(d + \frac{1}{d}) = \frac{1}{1}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}}).$$

3) Nếu $p < 0$ thì đặt $y = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}t$. Khi đó ta được phương trình

$$4t^3 + 3t = m, \tag{3.10}$$

với

$$m = \frac{-3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}.$$

Đặt

$$m = \frac{1}{2}(d^3 - \frac{1}{d^3})$$

với

$$d^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1}.$$

Khi đó phương trình (3.10) có nghiệm duy nhất là

$$t = \frac{1}{2}(d - \frac{1}{d}) = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}}).$$

Từ nghiệm t ta tính được nghiệm y và từ đó suy ra nghiệm x.

Sau đây là một số ví dụ về giải phương trình bậc ba nhằm minh họa cho các bài toán đã trình bày ở trên.

Ví dụ 3.1. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}\cdot \tag{3.11}$$

Lời giải. Ta có $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}\cdot$ Theo công thức nhân ba thì

$$\cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}.$$

Do đó ta có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\begin{aligned}
&4x^3 - 3x = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}.\\
\Leftrightarrow\ &(x - \cos\frac{\pi}{9})(4x^2 + 4x\cos\frac{\pi}{9} + 4\cos^2\frac{\pi}{9} - 3) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&x - \cos\frac{\pi}{9} = 0\\ &4x^2 + 4x\cos\frac{\pi}{9} + 4\cos^2\frac{\pi}{9} - 3 = 0\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình (3.11) có ba nghiệm là

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{9}, x_2 = \cos\frac{5\pi}{9}, x_3 = \cos\frac{7\pi}{9}.$$

Ví dụ 3.2. Giải phương trình

$$8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0 \tag{3.12}$$

Lời giải. Ta có

$$8x^3 - 6x + \sqrt{3} = 0 \ \Leftrightarrow\ 4x^3 - 3x = \frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot \tag{3.13}$$

Đặt $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{5\pi}{6}$. Khi đó phương trình (3.13) được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} &4x^3 - 3x = 4\cos^3\frac{5\pi}{18} - 3\cos\frac{5\pi}{18} \\ \Leftrightarrow\ &\left(x - \cos\frac{5\pi}{18}\right)\left(4x^2 + 4x\cos\frac{5\pi}{18} + 4\cos^2\frac{5\pi}{18} - 3\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \cos\dfrac{5\pi}{18}, \\ \\ 4x^2 + 4x\cos\dfrac{5\pi}{18} + 4\cos^2\dfrac{5\pi}{18} - 3 = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình (3.12) có ba nghiệm là

$$x_1 = \cos\frac{5\pi}{18}, x_2 = \cos\frac{17\pi}{18}, x_3 = \cos\frac{7\pi}{18}.$$

Ví dụ 3.3. Giải phương trình

$$8x^3 + 24x^2 + 6x - 10 - 3\sqrt{6} = 0 \tag{3.14}$$

Lời giải. Phương trình (3.14) tương đương với phương trình sau

$$x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{10 + 3\sqrt{6}}{8} = 0.$$

Đặt $x = y - 1$, ta thu được phương trình

$$y^3 - \frac{9}{4}y - \frac{3\sqrt{6}}{8} = 0.$$

Lại đặt $y = t\sqrt{3}$ ta thu được phương trình

$$4t^3 - 3t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Phương trình này có các nghiệm là

$$t_1 = \cos\frac{\pi}{12}, t_2 = \cos\frac{3\pi}{4}, t_3 = \cos\frac{7\pi}{12}.$$

Trở lại với ẩn x thì phương trình (3.14) có các nghiệm là

$$x_1 = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12} - 1, x_2 = \sqrt{3}\cos\frac{3\pi}{4} - 1, x_3 = \sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{12} - 1.$$

Ví dụ 3.4. Giải phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 6x + 3 = 0 \tag{3.15}$$

Lời giải. Đặt $x = y - 1$, ta thu được phương trình

$$y^3 - 9y + 11 = 0. \tag{3.16}$$

Lại đặt $y = 2\sqrt{3}t$ ta được phương trình

$$4t^3 - 3t = \frac{-11}{6\sqrt{3}} \tag{3.17}$$

Vì $\left|\frac{-11}{6\sqrt{3}}\right| > 1$ nên ta giải phương trình (3.17) như bài toán 3.3. Do đó phương trình (3.17) có một nghiệm là

$$t = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-11+\sqrt{13}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{-11-\sqrt{13}}{6\sqrt{3}}}\right).$$

Suy ra phương trình (3.16) có một nghiệm là

$$y = 2\sqrt{3}\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{-11+\sqrt{13}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{-11-\sqrt{13}}{6\sqrt{3}}}\right) = \sqrt[3]{\frac{-11+\sqrt{13}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-11-\sqrt{13}}{2}}.$$

Trở lại với ẩn x thì phương trình (3.15) có một nghiệm là

$$x = \sqrt[3]{\frac{-11+\sqrt{13}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-11-\sqrt{13}}{2}} - 1.$$

Ví dụ 3.5. Giải phương trình

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 68 = 0. \tag{3.18}$$

Lời giải. Đặt $x = y + 3$, ta thu được phương trình

$$y^3 + 9y - 14 = 0. \tag{3.19}$$

Lại đặt $y = 2\sqrt{3}t$, ta có phương trình

$$4t^3 + 3t = \frac{7}{3\sqrt{3}}. \tag{3.20}$$

Giải như bài toán 3.4 thì phương trình (3.20) có một nghiệm là

$$t = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{76}}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{76}}{3\sqrt{3}}}\right).$$

Khi đó phương trình (3.19) có một nghiệm là

$$y = \sqrt[3]{7+\sqrt{76}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{76}}.$$

Vậy phương trình (3.18) có một nghiệm là

$$x = \sqrt[3]{7+\sqrt{76}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{76}} + 3.$$

Ở Chương I ta đã chứng minh được các đồng nhất thức sau

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}\cdot \tag{3.21}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}\cdot \tag{3.22}$$

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha\cdot \tag{3.23}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}\cdot \tag{3.24}$$

$$\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{3\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}\cdot \tag{3.25}$$

Từ (3.21) dùng công thức nhân ba ta suy ra đồng nhất thức

$$4\cos^3\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} = 0.$$

Do đó ta sẽ có bài toán sau

Bài toán 3.6. Giải phương trình

$$8t^3 - 4t - 1 = 0.$$

Phương trình này có 3 nghiệm là: $t = \cos\frac{\pi}{5}, t = \cos\frac{3\pi}{5}, t = \cos\frac{2\pi}{3}\cdot$ Từ đây ta cũng tính được

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot$$

Với $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ta suy ra

$$4\cos^3\frac{\pi}{15} - 3\cos\frac{\pi}{15} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot$$

Như vậy ta sẽ có phương trình sau.

Bài toán 3.7. Giải phương trình

$$16x^3 - 12x = \sqrt{5} + 1.$$

Từ (3.22) dùng công thức nhân đôi và công thức nhân ba ta suy ra đồng nhất thức

$$4\cos^3\frac{\pi}{7} - 2\cos^2\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{7} + \frac{1}{2} = 0.$$

Bởi vậy ta tiếp tục có bài toán sau.

Bài toán 3.8. Giải phương trình

$$8t^3 - 4t^2 - 4t + 1 = 0.$$

Phương trình có 3 nghiệm là $t = \cos\dfrac{\pi}{7}, t = -\cos\dfrac{2\pi}{7}, t = \cos\dfrac{3\pi}{7}\cdot$

Bài toán 3.9. Chứng minh $\tan^2 20^0, \tan^2 40^0, \tan^2 80^0$ là các nghiệm của phương trình

$$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0.$$

Lời giải. Ta có

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\cdot \tag{3.26}$$

Với $\alpha = 20^0$ thì

$$\begin{aligned}(3.26) \Rightarrow \tan 60^0 &= \frac{3\tan 20^0 - \tan^3 20^0}{1 - 3\tan^2 20^0}\\ &\Rightarrow \sqrt{3}(1 - 3\tan^2 20^0) = 3\tan 20^0 - \tan^3 20^0\\ &\Rightarrow 3(1 - 3\tan^2 20^0)^2 = (3\tan 20^0 - \tan^3 20^0)^2\\ &\Rightarrow \tan^6 20^0 - 33\tan^4 20^0 + 27\tan^2 20^0 - 3 = 0.\end{aligned}$$

Vậy $\tan^2 20^0$ là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0.$$

Làm tương tự bằng cách thay $\alpha = 40^0, \alpha = 80^0$ vào (3.26) ta được $\tan^2 40^0, \tan^2 80^0$ cũng là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0.$$

Ngoài các phương trình bậc ba ta cũng có thể xây dựng được các phương trình bậc cao hơn từ các đồng nhất thức lượng giác. Chẳng hạn từ đồng nhất thức (3.23)

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.$$

Với các giá trị

$$\alpha = 5^0, \alpha = 77^0, \alpha = 149^0, \alpha = 221^0, \alpha = 293^0$$

thì $\cos 5\alpha$ đều bằng $\cos 25^0$. Do đó $\cos 5^0, \cos 77^0, \cos 149^0, \cos 221^0, \cos 293^0$ là các nghiệm của đa thức

$$f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos 25^0.$$

Do đó ta có bài toán sau.

Bài toán 3.10. Giải phương trình

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos 25^0 = 0.$$

Từ đồng nhất thức (3.24) ta suy ra đồng nhất thức

$$16\cos^5\frac{\pi}{7} - 16\cos^3\frac{\pi}{7} + 3\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} = 0.$$

Bởi vậy ta có phương trình sau.

Bài toán 3.11. Giải phương trình

$$32t^5 - 32t^3 + 6t - 1 = 0.$$

Phương trình này có 5 nghiệm là

$$t_1 = \cos\frac{\pi}{7}, t_2 = \cos\frac{3\pi}{7}, t_3 = \cos\frac{5\pi}{7}, t_4 = -\cos\frac{\pi}{5}, t_5 = \cos\frac{2\pi}{5}\cdot$$

Từ đồng nhất thức (3.25) ta suy ra đồng nhất thức

$$64\cos^7\frac{\pi}{9} - 96\cos^5\frac{\pi}{9} + 40\cos^3\frac{\pi}{9} - 4\cos\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} = 0.$$

Do đó ta tiếp tục tạo ra phương trình sau.

Bài toán 3.12. Chứng minh rằng phương trình

$$64x^7 - 96x^5 + 40x^3 - 4x - \frac{1}{2} = 0,$$

có nghiệm là

$$x = \cos\frac{\pi}{9},\ x = \cos\frac{3\pi}{9},\ x = \cos\frac{5\pi}{9},\ x = \cos\frac{7\pi}{9}\cdot$$

Bài toán 3.13. Chứng minh rằng phương trình

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 2 = 0$$

có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Lời giải.

1) Xét $x \in [-1; 1]$. Đặt $x = \cos\alpha,\ \alpha \in [0; \pi]$, phương trình đã cho trở thành phương trình

$$\begin{aligned} &16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\cos 5\alpha + 2 = 0 \quad \text{(phương trình vô nghiệm).} \end{aligned}$$

2) Xét $x \notin [-1; 1] \Leftrightarrow |x| > 1$.

Khi đó tồn tại duy nhất giá trị $a \in \mathbb{R},\ |a| > 1$ mà $x = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$. Giá trị a đó là $x - \sqrt{x^2 - 1}$ nếu $x < -1$; là $x + \sqrt{x^2 - 1}$ nếu $x > 1$.

Lúc đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) + 2 = 0.$$

Đặt $t = a^5$ ta sẽ có $a^5 = -2 - \sqrt{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm thực duy nhất là

$$x = \frac{\sqrt[5]{-2-\sqrt{3}} + \sqrt[5]{-2+\sqrt{3}}}{2}.$$

3.2 Giải và biện luận hệ phương trình đại số

Bài toán 3.14. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = \dfrac{-3}{4} \\ xyz = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Lời giải. Áp dụng định lí Vieta về nghiệm của phương trình bậc ba, ta có x, y, z là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 3t = \frac{1}{2}.$$

Đây là phương trình đã được giải ở ví dụ (3.3), phương trình này có ba nghiệm là

$$t_1 = \cos\frac{\pi}{9}, t_2 = \cos\frac{5\pi}{9}, t_3 = \cos\frac{7\pi}{9}.$$

Do đó hệ phương trình đã cho có sáu nghiệm là

$$\begin{cases} x = \cos\dfrac{\pi}{9}, \\ y = \cos\dfrac{5\pi}{9}, \\ z = \cos\dfrac{7\pi}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos\dfrac{5\pi}{9}, \\ y = \cos\dfrac{7\pi}{9}, \\ z = \cos\dfrac{\pi}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos\dfrac{7\pi}{9}, \\ y = \cos\dfrac{\pi}{9}, \\ z = \cos\dfrac{5\pi}{9}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos\dfrac{\pi}{9}, \\ y = \cos\dfrac{7\pi}{9}, \\ z = \cos\dfrac{5\pi}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos\dfrac{5\pi}{9}, \\ y = \cos\dfrac{\pi}{9}, \\ z = \cos\dfrac{7\pi}{9}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \cos\dfrac{7\pi}{9}, \\ y = \cos\dfrac{5\pi}{9}, \\ z = \cos\dfrac{\pi}{9}. \end{cases}$$

Bài toán 3.15. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} 4x^3 = y + 1 \\ y^3 + y - 27x^3 = 27x^2 + 12x + 2 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có phương trình

$$y^3 + y - 27x^3 = 27x^2 + 12x + 2 \Leftrightarrow y^3 + y = (3x+1)^3 + 3x + 1.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$.
Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với $\forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Từ phương trình

$$f(y) = f(3x+1) \Leftrightarrow y = 3x + 1,$$

ta thu được phương trình

$$4x^3 - 3x = 2.$$

Phương trình này có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}).$$

Suy ra

$$y = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}) + 1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right) \\ y = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right) + 1. \end{cases}$$

Bài toán 3.16. *Giải hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} x^3 + 3x = y + 5\sqrt{3} \\ y^3 + 3y = z + 5\sqrt{3} \\ z^3 + 3z = x + 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Lời giải. Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - 5\sqrt{3}$.
Ta có

$$f^{'}(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta viết lại hệ phương trình đã cho như sau

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Lúc đó

$$x \le y \ \Rightarrow \ f(x) \le f(y) \ \Rightarrow \ y \le z \ \Rightarrow \ f(y) \le f(z) \ \Rightarrow \ z \le x$$

hay

$$x \le y \le z \le x \ \Rightarrow \ x = y = z.$$

Với $x = y = z$, xét phương trình: $x^3 + 2x = 5\sqrt{3}$. Đặt $x = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}t$, ta thu được phương trình

$$4t^3 + 3t = \frac{45}{4\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình bậc ba đã nêu cách giải, phương trình này có nghiệm duy nhất là

$$t = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{45+\sqrt{2057}}{4\sqrt{2}}} + \sqrt[3]{\frac{45-\sqrt{2057}}{4\sqrt{2}}}\right).$$

Suy ra

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{45+\sqrt{2057}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{45-\sqrt{2057}}{2}}\right).$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là (x, y, z) với

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{45+\sqrt{2057}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{45-\sqrt{2057}}{2}}\right).$$

Bài toán 3.17. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ (1-x)(1+y) = 2. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện của bài toán là

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1. \end{cases}$$

Đặt $x = \cos\alpha, y = \cos\beta$ với $\alpha, \beta \in [0; \pi]$, khi đó hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha = 1 \\ (1-\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0. \end{cases}$$

Đặt $t = \sin\alpha - \cos\alpha, |t| \leq \sqrt{2}$ suy ra $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{2}\cdot$ Khi đó ta có

$$t - \frac{1-t^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1$, ta có

$$\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = 0, y = 1.$$

Vậy hệ đã cho có một nghiệm là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

Bài toán 3.18. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \tag{3.27}$$

Lời giải. Do $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x, y \in [-1; 1]$. Đặt $x = \sin\alpha, y = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$. Khi đó phương trình thứ nhất của (3.27) tương đương với

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)(1 + 2\sin 2\alpha) = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow &\sqrt{2}.\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cdot\left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow &4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sin 2\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow &8\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-2\left[\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow -2\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=-35^0+k120^0\\ \alpha=65^0+k120^0\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{R}).$$

Từ đó suy ra hệ có 6 nghiệm: $(x,y)=\{(\sin 65^0,\cos 65^0),(-\sin 35^0,\cos 35^0),$ $(\sin 85^0,\cos 85^0),(-\sin 5^0,-\cos 5^0),(-\sin 25^0,-\cos 25^0),(\sin 305^0,\cos 305^0)\}.$

Bài toán 3.19. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x-3z^2x-3z+z^3=0\\ y-3x^2y-3x+x^3=0\\ z-3y^2z-3y+y^3=0\end{cases}$$

Lời giải. Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases}x(1-3z^2)=3z-z^3\\ y(1-3x^2)=3x-x^3\\ z(1-3y^2)=3y-y^3.\end{cases}\tag{3.28}$$

Từ đó, dễ thấy nếu (x,y,z) là nghiệm của phương trình đã cho thì phải có $x,y,z\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Bởi thế hệ (3.28) tương đương với hệ

$$\begin{cases}x=\dfrac{3z-z^3}{1-3z^2}\\ y=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\\ z=\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}.\end{cases}\tag{3.29}$$

Đặt $x=\tan\alpha$ với

$$\alpha\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\tag{3.30}$$

và sao cho

$$\tan\alpha,\tan 3\alpha,\tan 9\alpha\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tag{3.31}$$

Khi đó từ các phương trình của hệ (3.29) sẽ có: $y = \tan 3\alpha, z = \tan 9\alpha$, $x = \tan 27\alpha$.

Từ đây dễ dàng suy ra (x, y, z) là nghiệm của (3.29) khi và chỉ khi $y = \tan 3\alpha, z = \tan 9\alpha, x = \tan 27\alpha$ với α được xác định bởi (3.30), (3.31) và

$$\tan\alpha = \tan 27\alpha. \tag{3.32}$$

Lại có

$$(3.32) \Leftrightarrow 26\alpha = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì thế α thỏa mãn đồng thời (3.30) và (3.32) khi và chỉ khi $\alpha = \dfrac{k\pi}{26}$ với k nguyên thỏa mãn: $-12 \le k \le 12$. Dễ dàng kiểm tra được rằng, tất cả các giá trị α được xác định như vừa nêu đều thỏa mãn (3.31). Vậy tóm lại hệ phương trình đã cho có tất cả 25 nghiệm, đó là

$$\left(x = \tan\frac{k\pi}{26}, y = \tan\frac{3k\pi}{26}, z = \tan\frac{9k\pi}{26}\right),\ k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 12.$$

Bài toán 3.20. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = 5\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

Lời giải. Nhận xét: $xyz \neq 0; x, y, z$ cùng dấu. Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì $(-x, -y, -z)$ cũng là nghiệm của hệ, nên chúng ta sẽ tìm nghiệm x, y, z dương.

Đặt $x = \tan\alpha, y = \tan\beta, z = \tan\gamma$ $(0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^0)$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\left(\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha}\right) = 4\left(\tan\beta + \dfrac{1}{\tan\beta}\right) = 5\left(\tan\gamma + \dfrac{1}{\tan\gamma}\right) \\ \tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\gamma + \tan\gamma\tan\alpha = 1. \end{cases} \tag{3.33}$$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ (3.33), ta được

$$\begin{aligned} &3\left(\frac{1 + \tan^2\alpha}{\tan\alpha}\right) = 4\left(\frac{1 + \tan^2\beta}{\tan\beta}\right) = 5\left(\frac{1 + \tan^2\gamma}{\tan\gamma}\right) \\ \Leftrightarrow &\frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma}. \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ (3.33), suy ra

$$\tan\gamma(\tan\alpha+\tan\beta)=1-\tan\beta\tan\alpha$$
$$\Rightarrow \cot\gamma=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\beta\tan\alpha}=\tan(\alpha+\beta).$$

Suy ra
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\tan(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\cdot$$

Do
$$\begin{cases}\dfrac{3}{\sin 2\alpha}=\dfrac{4}{\sin 2\beta}=\dfrac{5}{\sin 2\gamma}\\ 0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2};\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

nên $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ là các góc của một tam giác có số đo ba cạnh là $3, 4, 5$. Do tam giác có ba cạnh $3, 4, 5$ là tam giác vuông nên $2\gamma=90^0$ suy ra $\gamma=45^0$ suy ra $z=\tan\gamma=1$. Ta có

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{2x}{1-x^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{3}\cdot$$
$$\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{2y}{1-y^2}=\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot$$

Bài toán 3.21. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm*

$$\begin{cases}|x|+|y|=1\\ x^2+y^2=m.\end{cases}$$

Lời giải. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $|x|\le 1, |y|\le 1$. Do đó ta có thể đặt
$$|x|=\sin^2 t, |y|=\cos^2 t.$$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1 \text{ (luôn đúng với mọi } t\in\mathbb{R}).$$

Từ đó ta có hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}&\sin^4 t+\cos^4 t=m\\ \Leftrightarrow&(\sin^2 t+\cos^2 t)^2-2\sin^2 t\cos^2 t=m\\ \Leftrightarrow&1-\frac{1}{2}\sin^2 2t=m\\ \Leftrightarrow&\cos 4t=4m-3.\end{aligned}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình

$$\cos 4t = 4m - 3$$

có nghiệm. Suy ra

$$\begin{aligned} & -1 \le 4m - 3 \le 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \le m \le 1. \end{aligned}$$

Bài toán 3.22. *Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 1 \\ x - y + a \le 0. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2.$$

Do đó ta đặt

$$\begin{cases} x + 1 = \sqrt{2}\sin\alpha \\ y = \sqrt{2}\cos\alpha, \end{cases}$$

với $\alpha \in [0; 2\pi]$. Khi đó

$$x - y + a = \sqrt{2}(\sin\alpha - \cos\alpha) - 1 + a = 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + a - 1.$$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì

$$2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + a - 1 \le 0$$

có nghiệm duy nhất. Suy ra

$$-1 = \frac{1-a}{2} \Leftrightarrow a = 3 \quad (\text{ Vì } -1 \le \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1-a}{2}).$$

Vậy khi $a = 3$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

3.3 Một số dạng bất đẳng thức đại số giải bằng biến đổi lượng giác

Khi giải các bài toán về chứng minh bất đẳng thức đại số, trong một số trường hợp ta có thể chuyển chúng thành các bài toán lượng giác để giải.

Việc lựa chọn phương pháp biến đổi lượng giác nào cho bài toán được xác định thông qua các dấu hiệu đặc biệt của các biến có mặt trong bài toán và các dấu hiệu đó lại được xác định thông qua miền giá trị cùng với các công thức lượng giác thông thường. Chẳng hạn nếu điều kiện ràng buộc giữa các ẩn được qui về dạng $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$, thì ta có thể đặt $x = a\sin\alpha, y = a\cos\alpha$ hoặc nếu có $x + y + z = xyz$, thì ta có thể đặt $x = \tan\alpha, y = \tan\beta, z = \tan\gamma$ với $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$...
Sau khi đặt ẩn phụ ta qui bài toán ban đầu về bài toán lượng giác. Giải bài toán lượng giác, từ kết quả đó ta có kết quả của bài toán chứng minh bất đẳng thức đại số.

Bài toán 3.23. Cho $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$. Chứng minh rằng

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2(1 + 2\sqrt{3})x + (4 - 2\sqrt{3})y - 3 + 4\sqrt{3} \leq 2.$$

Lời giải. Từ điều kiện $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, suy ra

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

Đặt $x - 1 = \sin\alpha, y - 2 = \cos\alpha$, khi đó

$$\begin{aligned}\Big|x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy - 2(1 + 2\sqrt{3})x \quad &+ (4 - 2\sqrt{3})y - 3 + 4\sqrt{3}\Big| \\ &= \left|\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\right| \\ &= \left|\sqrt{3}\sin\alpha - \cos 2\alpha\right| \\ &= 2\left|\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6})\right| \leq 2.\end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.24. Cho $a > 0, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh rằng

$a)ab \leq \dfrac{1}{4}$

$b)\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{a}{b+1} + \dfrac{b}{a+1} \leq 1.$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

Lời giải. Từ giả thiết $a > 0, b > 0$ và $a + b = 1$, suy ra tồn tại góc α thuộc $[0; \pi]$ sao cho

$$\begin{cases} a = \cos^2\alpha \\ b = \sin^2\alpha \end{cases}$$

a) Ta có $ab = \sin^2\alpha\cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}sin^2 2\alpha \leq \dfrac{1}{4}$, ta có điều phải chứng minh.
Dấu "=" xảy ra khi

$$\sin^2 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{4} \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{4}, \end{array}\right.$$

tức là

$$a = b = \frac{1}{2}\cdot$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} &= \frac{\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{1+cos^2\alpha} \\
&= \frac{\cos^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^4\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\sin^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)} \\
&= \frac{2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \leq 1, \quad \forall\alpha \in [0;\pi]
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin\alpha\cos\alpha = 0$ tức là $a = 1, b = 0$, hoặc $a = 0, b = 1$.
Lại có

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} - \frac{2}{3} &= \frac{2 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{2 + \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{2(1-\sin^2 2\alpha)}{3(2+\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha)} \geq 0, \quad \forall\alpha \in [0;\pi].
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$sin^2 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{4} \\ \alpha = \dfrac{3\pi}{4}, \end{array}\right.$$

hay

$$a = b = \frac{1}{2}\cdot$$

Vậy

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq \frac{2}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài toán 3.25. Cho $a, b, x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$x + y \geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Lời giải. Vì $a, b, x, y > 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ nên tồn tại $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} = \cos^2\alpha \\ \dfrac{b}{y} = \sin^2\alpha \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos^2\alpha} \\ y = \dfrac{b}{\sin^2\alpha} \end{cases} \quad \text{và} \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b}\tan^2\alpha.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{a}{\cos^2\alpha} + \frac{b}{\sin^2\alpha} \\ &= a(1 + \tan^2\alpha) + b(1 + \cot^2\alpha) \\ &= a + b + a\tan^2\alpha + b\cot^2\alpha \\ &\geq a + b + 2\sqrt{ab\cot^2\alpha}\tan^2\alpha \end{aligned}$$

hay $x + y \geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

Dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{aligned} & a\tan^2\alpha = b\cot^2\alpha = \frac{b}{\tan^2\alpha} \\ \Leftrightarrow\ & \tan^4\alpha = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan^2\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y}\cdot\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot$$

Bài toán 3.26. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ và với mọi a ta có

$$-(1+a^2)^n \leq (2a)^n + (1-a^2)^n \leq (1+a^2)^n.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$-1 \leq (\frac{2a}{1+a^2})^n + (\frac{1-a^2}{1+a^2})^n \leq 1.$$

Đặt $a = \tan\frac{\alpha}{2}$ với $-\pi < \alpha < \pi$, ta có

$$\frac{2a}{1+a^2} = \sin\alpha; \quad \frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos\alpha.$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$-1 \leq \sin^n\alpha + \cos^n\alpha \leq 1.$$

Thật vậy, ta có

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \Rightarrow -\sin^2\alpha \leq \sin^n\alpha \leq \sin^2\alpha, \quad \text{với } \forall n \geq 2.$$

Tương tự

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \Rightarrow -\cos^2\alpha \leq \cos^n\alpha \leq \cos^2\alpha, \quad \text{với } \forall n \geq 2.$$

Do đó $-1 \leq \sin^n\alpha + \cos^n\alpha \leq 1$, bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.27. Chứng minh rằng với mọi x, y ta có

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \leq \frac{1}{4}\cdot$$

Lời giải. Đặt $x = \tan\alpha, y = \tan\beta$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\cdot$ Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)(1-\tan^2\alpha\tan^2\beta)}{(1+\tan^2\alpha)^2(1+\tan^2\beta)^2} \leq \frac{1}{4}\cdot$$

Thật vậy đặt

$$A = \frac{(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)(1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta)}{(1 + \tan^2\alpha)^2(1 + \tan^2\beta)^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\dfrac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} \cdot \dfrac{\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\dfrac{1}{\cos^4\alpha\cos^4\beta}} \\ &= \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) \\ &= \frac{1}{4}\sin[2(\alpha - \beta)]\sin[2(\alpha + \beta)]. \end{aligned}$$

Do đó

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)(1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta)}{(1 + \tan^2\alpha)^2(1 + \tan^2\beta)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

$A = \dfrac{1}{4}$ khi và chỉ khi

$$\text{hoặc } \begin{cases} \sin[2(\alpha - \beta)] = 1 \\ \sin[2(\alpha + \beta)] = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc } \begin{cases} \sin[2(\alpha - \beta)] = -1 \\ \sin[2(\alpha + \beta)] = -1. \end{cases}$$

Chẳng hạn

$$\begin{cases} 2(\alpha - \beta) = \dfrac{\pi}{2} \\ 2(\alpha + \beta) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{hoặc } \begin{cases} 2(\alpha - \beta) = -\dfrac{\pi}{2} \\ 2(\alpha + \beta) = -\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

hay $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{4}, \beta = 0$ tức là $x = \pm 1, y = 0$.

$A = -\dfrac{1}{4}$ khi và chỉ khi

$$\text{hoặc } \begin{cases} \sin[2(\alpha - \beta)] = 1 \\ \sin[2(\alpha + \beta)] = -1 \end{cases} \quad \text{hoặc } \begin{cases} \sin[2(\alpha - \beta)] = -1 \\ \sin[2(\alpha + \beta)] = 1 \end{cases}$$

Chẳng hạn $\alpha = 0, \beta = \pm\dfrac{\pi}{4}$ tức là $x = 0, y = \pm 1$.

Bài toán 3.28. Cho các số x, y, z thỏa mãn $0 < x, y, z < 1$ và

$$xy + yz + zx = 1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Lời giải. Đặt

$$A=\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\cdot$$

Vì $0<x,y,z<1$ nên có thể chọn được α,β,γ sao cho

$$x=\tan\alpha,\ y=\tan\beta,\ z=\tan\gamma\ \text{ với } 0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{4}\cdot$$

Ta có

$$\begin{aligned} xy+yz+zx=1 &\Leftrightarrow \tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1\\ &\Leftrightarrow \tan\beta(\tan\alpha+\tan\gamma)=1-\tan\alpha\tan\gamma. \end{aligned}$$

Vì $0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ nên $\tan\alpha,\tan\beta,\tan\gamma>0$ suy ra

$$\tan\beta(\tan\alpha+\tan\gamma)>0\Rightarrow 1-\tan\alpha\tan\gamma\neq 0.$$

Do đó

$$\tan\beta\Big(\frac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma}\Big)=1\Leftrightarrow\tan\beta\tan(\alpha+\gamma)=1$$

(Ở đây $\tan(\alpha+\gamma)$ hoàn toàn xác định vì $0<\alpha,\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ nên $0<\alpha+\gamma<\dfrac{\pi}{2}$)
Từ $\tan\beta\tan(\alpha+\gamma)=1$, suy ra

$$\begin{aligned} \sin\beta\sin(\alpha+\gamma)=\cos\beta\cos(\alpha+\gamma) &\Leftrightarrow\cos(\alpha+\beta+\gamma)=0\\ &\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\cdot \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2A &=\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}\\ &=\tan 2\alpha+\tan 2\beta+\tan 2\gamma. \end{aligned}$$

Mặt khác $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ suy ra

$$\tan(2\alpha+2\beta)=\tan(\pi-2\gamma).$$

Cũng vì $0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{4}$ suy ra $\tan 2\alpha,\tan 2\beta,\tan 2\gamma$ có nghĩa nên

$$\frac{\tan 2\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan 2\alpha\tan 2\beta}=-\tan 2\gamma,$$

tương đương với

$$\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma.$$

Dễ thấy $\tan 2\alpha, \tan 2\beta, \tan 2\gamma$ là các số dương nên theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \geq 3\sqrt[3]{\tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \geq 3\sqrt[3]{\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma}. \\ \Leftrightarrow\ & (\tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma)^2 \geq 27 \\ \Leftrightarrow\ & \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \geq 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy $A \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 3.29. Cho bốn số dương a_1, a_2, a_3, a_4. Chứng minh rằng trong bốn số ấy bao giờ cũng chọn được hai số $a_i, a_j (i \neq j)$ sao cho

$$0 \leq \frac{a_i - a_j}{1 + a_i + a_j + 2a_i a_j} < 2 - \sqrt{3}.$$

Lời giải. Đặt

$$b_i = 1 + \frac{1}{a_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Do $a_i > 0$ nên $b_i > 1$.
Đặt $b_i - \tan \alpha_i$ thì

$$\frac{\pi}{4} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Như vậy trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ có 4 số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, vậy phải tồn tại hai số α_i, α_j sao cho

$$0 \leq \alpha_j - \alpha_i < \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Suy ra

$$0 \leq \tan(\alpha_j - \alpha_i) < \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\tan \alpha_j - \tan \alpha_i}{1 + \tan \alpha_i \tan \alpha_j} < 2 - \sqrt{3}.$$

Hay

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq \frac{b_j - b_i}{1 + b_i b_j} < 2 - \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \frac{\left(1 + \dfrac{1}{a_j}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{a_i}\right)}{1 + \left(1 + \dfrac{1}{a_j}\right)\left(1 + \dfrac{1}{a_i}\right)} < 2 - \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \frac{a_i - a_j}{1 + a_i + a_j + 2a_i a_j} < 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Kết luận

Luận văn "Các đồng nhất thức đại số sinh bởi hàm lượng giác và áp dụng" đã đạt được một số kết quả sau:

- Trình bày một số đồng nhất thức giữa các hàm số và đa thức lượng giác, từ đó đi giải quyết một số bài toán về tính giá trị của biểu thức lượng giác.
- Hệ thống hóa các hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác.
- Chứng minh một số hệ thức lượng giác thường gặp trong tam giác và một số dạng hệ thức lượng giác trong hình học.
- Trình bày một số lớp các đồng nhất thức đại số liên quan đến các hàm số lượng giác.
- Trình bày một số dạng đồng nhất thức hàm và áp dụng.
- Phần cuối của luận văn trình bày một số lớp phương trình và bất phương trình trong đại số được giải bằng các đồng nhất thức. Chúng tôi hy vọng luận văn này sẽ là tài liệu tham khảo có ích cho học sinh THPT và các độc giả quan tâm đến vấn đề này. Đồng thời hy vọng các độc giả quan tâm đóng góp ý kiến cho luận văn hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2004.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lí và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Ngọc, *Chuyên đề chọn lọc: Đa thức đối xứng và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

[5] Nguyễn Văn Mậu, Phạm Thị Bạch Ngọc, *Một số bài toán chọn lọc về lượng giác*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2004.

[6] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2009.

[7] Tạ Duy Phượng, *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[8] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.