

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THU HIỀN

**SỐ TỔ HỢP SUY RỘNG
VÀ MỘT VÀI PHƯƠNG PHÁP
XÂY DỰNG BÀI TOÁN TỔ HỢP**

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

PHẠM THỊ THU HIỀN

**TỔ HỢP SUY RỘNG
VÀ MỘT VÀI PHƯƠNG PHÁP
XÂY DỰNG BÀI TOÁN TỔ HỢP**

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu	3
Chương 1. Tổ hợp suy rộng	6
1.1. Phép chứng minh quy nạp	6
1.1.1. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự	6
1.1.2. Nguyên lý quy nạp	9
1.2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp	12
1.2.1. Quy tắc đếm	12
1.2.2. Hoán vị và chỉnh hợp	13
1.2.3. Tổ hợp	17
1.2.4. Công thức khai triển nhị thức Newton	20
1.3. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng	22
1.3.1. Chỉnh hợp có lặp	22
1.3.2. Tổ hợp có lặp	22
1.3.3. Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau. .	25
1.3.4. Số cách phân bố các đồ vật vào trong hộp	26
1.4. Xây dựng bài toán tổ hợp	27
1.4.1. Phương pháp đạo hàm và tích phân	27
1.4.2. Phương pháp hệ phương trình	30
1.4.3. Phương pháp số phức	38
1.4.4. Phương pháp song ánh	41
Chương 2. Một vài biểu diễn qua tổ hợp	45
2.1. Định lý Hilbert và Định lý Cantor về biểu diễn số	45
2.2. Khai triển đa đơn thức	48
2.3. Sử dụng chỉ số và công thức chuyển đổi ngược	50
2.4. Đồng nhất thức Newton	56
2.5. Định lý Fermat và Định lý Wilson	60

Kết luận	64
Tài liệu tham khảo	65

Mở đầu

Tổ hợp là một phần rất quan trọng của Toán học rời rạc, chuyên nghiên cứu sự sắp xếp hoặc phân bố các đối tượng và tính số cách sắp xếp ấy. Chủ đề này đã được nghiên cứu từ lâu, thế kỷ 17, khi xét các trò chơi may rủi. Thông thường, số các phần tử là hữu hạn và việc phân bố chúng phải thỏa mãn những điều kiện nhất định nào đấy, tùy theo yêu cầu của vấn đề nghiên cứu. Do việc đếm các đối tượng hoặc diễn đạt bài toán dưới dạng sắp xếp, có kể thứ tự hoặc không, các phần tử của một tập hợp, nên ta thường gặp bài toán tổ hợp dưới dạng sau:

1. Bài toán đếm: Đây là bài toán nhằm trả lời câu hỏi "có bao nhiêu cách sắp xếp các phần tử thỏa mãn điều kiện đã nêu?" Phương pháp đếm thường dựa vào một số nguyên lý và một số tính toán không quá phức tạp.
2. Bài toán liệt kê: Đây là bài toán xét tất cả các khả năng nhằm trả lời câu hỏi "thuật toán nào vét hết các khả năng sắp xếp và có bao nhiêu cách sắp xếp các phần tử thỏa mãn điều kiện đã nêu?"
3. Bài toán tối ưu: Đây là bài toán xét những cách sắp xếp tốt nhất, theo một nghĩa nào đó, trong số những cách sắp xếp có thể.
4. Bài toán tồn tại: Đây là bài toán xét sự tồn tại hay không tồn tại cách sắp xếp các phần tử theo yêu cầu đã được đặt ra.

Một vấn đề dễ thấy là các bài toán tổ hợp cũng thường xuất hiện trong các kỳ thi Đại học và Cao đẳng, các kỳ thi Học sinh giỏi cấp quốc gia hay quốc tế. Chúng là những bài toán khó. Đặc biệt, để phục vụ tốt cho việc giảng dạy chương "Tổ hợp và Xác suất" ở lớp 11, giúp học sinh thi Đại học và Cao đẳng và với mong muốn được tìm hiểu sâu hơn nữa về những bài toán tổ hợp nên chúng tôi chọn đề tài ***"Tổ hợp suy rộng"***

và một vài phương pháp xây dựng bài toán tổ hợp." Luận văn tập trung tìm hiểu Bài toán đếm và Bài toán liệt kê (dạng đơn giản).

Ngoài phần mở đầu, và kết luận, luận văn được chia ra làm 2 chương.

Chương 1. Tổ hợp suy rộng.

Chương này tập trung trình bày phương pháp quy nạp ở Mục 1.1; hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, nhị thức Newton ở Mục 1.2; chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng ở Mục 1.3; còn một số phương pháp xây dựng bài toán tổ hợp được trình bày ở Mục 1.4.

Chương 2 . Một vài ứng dụng của tổ hợp.

Trong chương này chúng tôi tập trung trình bày một số ứng dụng của tổ hợp để biểu diễn một vài bài toán. Mục 2.1 trình bày cách vận dụng tổ hợp và hoán vị để biểu diễn số qua Định lí Hilbert và Định lí Cantor. Mục 2.2 trình bày công thức khai triển đa đơn thức. Nó là công thức khai triển nhị thức Newton tổng quát. Trong Mục 2.3 chúng tôi trình bày phương pháp sử dụng chỉ số và công thức chuyển đổi ngược. Đồng nhất thức Newton được trình bày ở Mục 2.4 và cuối cùng là việc chứng minh Định lí Fermat và Định lí Wilson.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS - TS. Đàm Văn Nhĩ - Trường ĐHSP1- Hà nội. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao Học Toán K5A Trường Đại Học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Hùng An - Huyện Bắc Quang đã tạo điều kiện và giúp đỡ tôi hoàn thành kế hoạch học tập.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn, nên luận văn này không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự chỉ dẫn và góp ý của các Thầy Cô, bạn bè để tôi hoàn thành tốt hơn bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 02 tháng 04 năm 2013

Tác giả

Phạm Thị Thu Hiền

Chương 1

Tổ hợp suy rộng

Nội dung chương một tập trung bàn về tổ hợp suy rộng. Chúng ta bắt đầu chương bằng cách trình bày phương pháp quy nạp.

1.1. Phép chứng minh quy nạp

1.1.1. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự

Giả thiết tập $X \neq \emptyset$. Tích đề các $X \times X$ được định nghĩa dưới đây:

$$X \times X = \{(x, y) | x, y \in X\}$$

Định nghĩa 1.1. Tập con S của $X \times X$ là một *quan hệ hai ngôi* trong X . Nếu $(x, y) \in S$ thì ta nói x *quan hệ* S *với* y và viết xSy .

Định nghĩa 1.2. Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong X . Quan hệ S được gọi là một *quan hệ tương đương* trong X nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

- (i) (Phản xạ) Với mọi $x \in X$ có xSx .
- (ii) (Đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có xSy thì cũng có ySx .
- (iii) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có xSy và ySz thì cũng có xSz .

Khi S là một quan hệ tương đương trong X thì ta thường kí hiệu $\sim$ thay cho S . Đặt $C(x) = \{y \in X | y \sim x\}$ và gọi nó là một *lớp tương đương* với x làm *đại diện*. Dễ dàng chỉ ra các tính chất sau:

Tính chất 1.1. *Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương trong X . Khi đó:*

- (i) *Với mọi $x \in X$ có $x \in C(x)$.*
- (ii) *Với mọi $y, z \in C(x)$ có $y \sim z$, $y \sim x$ và $z \sim x$.*
- (iii) *Với mọi $x, y \in X$, có hoặc $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ hoặc $C(x) = C(y)$.*
- (iv) *Tập thương $X/\sim$ là tập các lớp tương đương không giao nhau.*

Ví dụ 1.1. *Tính tổng của tất cả các số gồm 9 chữ số phân biệt được lập từ các số $1, 2, \dots, 8, 9$.*

Bài giải: Tập các số thỏa mãn đầu bài được phân ra làm 9 lớp phân biệt cùng lực lượng: Lớp $C(i) = \{\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 i} | a_k \in \{1, 2, \dots, 9\} \setminus \{i\}\}$ gồm tất cả các số được lập qua việc viết chữ số i vào cuối các số $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$ với các $a_k \in \{1, 2, \dots, 9\} \setminus \{i\}$. Thấy ngay lực lượng của $C(i)$ bằng $8!$. Vậy tổng các chữ số hàng đơn vị của tất cả các số thỏa mãn đầu bài bằng $8!(1 + 2 + \dots + 8 + 9) = 45 \cdot 8!$. Từ đây có tổng các số cần tính $S = 45 \cdot 8!(1 + 10 + \dots + 10^8) = 45 \cdot 8! \frac{10^9 - 1}{9} = 5(10^9 - 1) \cdot 8!$.

Định nghĩa 1.3. Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong X . Quan hệ S được gọi là một *quan hệ thứ tự* trong X nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

- (i) (Phản xạ) với mọi $x \in X$ có xSx .
- (ii) (Phản đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có xSy và ySx thì $x = y$.
- (iii) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có xSy và ySz thì cũng có xSz .

Tập X được gọi là một *tập sắp thứ tự* nếu có một quan hệ thứ tự trong X .

Khi S là một quan hệ thứ tự trong X thì ta thường viết $\leq$ thay cho S . Với $x, y \in X$, thay cho việc viết xSy thì ta viết $x \leq y$ và đọc là x *nhỏ hơn hoặc bằng* y hoặc viết $y \geq x$ và đọc là y *lớn hơn hoặc bằng* x . Từ đây ta có thể định nghĩa $x < y$ khi và chỉ khi $x \leq y, x \neq y$; hoặc $y > x$ khi và chỉ khi $y \geq x, y \neq x$.

Định nghĩa 1.4. Giả thiết X là một tập sắp thứ tự với quan hệ thứ tự $\leq$. Phần tử $a \in X$ được gọi là *phần tử bé nhất* của X nếu nó thỏa mãn $a \leq x$ với mọi $x \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là *phần tử lớn nhất* của X nếu nó thỏa mãn $x \leq b$ với mọi $x \in X$.

Định nghĩa 1.5. Tập sắp thứ tự X được gọi là một *tập sắp thứ tự tốt* nếu mọi bộ phận khác rỗng của X đều có phần tử bé nhất.

Hai kết quả sau đã được chứng minh trong bất kì giáo trình số học nào.

Mệnh đề 1.1. Tập tất cả các số tự nhiên $\mathbb{N}$ cùng quan hệ thứ tự là một tập sắp thứ tự tốt.

Mệnh đề 1.2. Nếu tập bất kì $M \subset \mathbb{N}$ có các tính chất: $0 \in M$ và $n + 1 \in M$ khi $n \in M$, thì $M = \mathbb{N}$.

Ví dụ 1.2. Xác định số nguyên dương k để sao cho tập hợp $X = \{2012, 2012 + 1, 2012 + 2, \dots, 2012 + k\}$ có thể phân ra làm hai tập A và B thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ và tổng của các số thuộc tập A đúng bằng tổng của các số thuộc tập B .

Bài giải: Trước tiên ta tìm điều kiện cho k . Giả sử có hai tập A và B thỏa mãn đầu bài. Đặt s là tổng của tất cả các số thuộc tập A . Khi đó tập B cũng có tổng các số bằng s và tập X có tổng của tất cả các số bằng $2s$. Vậy $4s = 2[2012 + (2012 + 1) + (2012 + 2) + \dots + (2012 + k)] = 4024(k + 1) + k(k + 1)$. Như vậy $k(k + 1)$ chia hết cho 4 và từ đây suy ra $k \equiv 3(\text{mod } 4)$ hoặc $k \equiv 0(\text{mod } 4)$.

Xét trường hợp (1): $k \equiv 3(\text{mod } 4)$. Dễ dàng suy ra: Số phần tử thuộc tập X phải là bội của 4. Hiển nhiên, 4 số tự nhiên liên tiếp $n, n + 1, n + 2, n + 3$ luôn thỏa mãn $n + n + 3 = n + 1 + n + 2$ và $\{n, n + 3\} \cap \{n + 1, n + 2\} = \emptyset$. Tập X thỏa mãn tính chất đòi hỏi.

Trường hợp (2): $k \equiv 0(\text{mod } 4)$. Trong trường hợp này, số phần tử của tập X phải là số lẻ. Giả sử X được phân ra làm hai tập rời nhau A và B và $A \cap B = \emptyset$. Ta có thể giả thiết $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$. Đặt $k = 4m$ với số tự nhiên m . Khi đó $\text{Card}(A) \geq 2m + 1$, $\text{Card}(B) \leq 2m$. Ta có $s \geq 2012 + (2012 + 1) + \dots + (2012 + 2m)$ và $s < (2012 + 2m + 1) + \dots + (2012 + 4m)$. Như vậy, ta có được $2012 + (2012 + 1) + \dots + (2012 + 2m) \leq s < (2012 + 2m + 1) + \dots + (2012 + 4m)$ hay $2012 < 2m \cdot 2m$ hay $m \geq 23$ và $k = 4m \geq 23 \cdot 4 = 92$.

Khi $k = 92$: Ta xét $A_1 = \{2012, 2012 + 1, \dots, 2012 + 46\}$ với tổng các số $a_1 = 2012 + (2012 + 1) + \dots + (2012 + 46)$; và $B_1 = \{(2012 + 47) + \dots + (2012 + 92)\}$ với tổng các số $b_1 = (2012 + 47) + \dots + (2012 + 92)$. Ta có ngay $b_1 - a_1 = 46 \cdot 46 - 2012 = 104$. Thế số $2012 + 52$ trong B_1 bởi số 2012 và thế số 2012 của A_1 bởi số $2012 + 52$. Khi đó $A = A_1 \setminus \{2012\} \cup \{2012 + 52\}$ và $B = B_1 \setminus \{2012 + 52\} \cup \{2012\}$ thỏa mãn đề bài.

Khi $k \equiv 0(\text{mod } 4)$ và $k > 92$. Ta viết $X = \{2012, 2012 + 1, \dots, 2012 + 92\} \cup \{2012 + 93, \dots, 2012 + 4m\}$. Phân tập $X_1 = \{2012, 2012 + 1, \dots, 2012 + 92\}$ thành hai tập A và B như trên; phân tập $X_2 = \{2012 + 93, \dots, 2012 + 4m\}$ với số phần tử chẵn để dàng phân ra làm hai tập C và D thỏa mãn $C \cap D = \emptyset$ và $C \cup D = X_2$ với tổng các số trong tập C và D bằng nhau. Vậy $A_0 = A \cup C, B_0 = B \cup D$ thỏa mãn đầu bài. Tóm lại, hoặc $k \equiv 3(\text{mod } 4)$ hoặc $k \equiv 0(\text{mod } 4)$ với $k \geq 92$.

1.1.2. Nguyên lý quy nạp

Hai nguyên lý dưới đây thường được gọi là nguyên lý thứ nhất và nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học.

Mệnh đề 1.3. [Nguyên lý thứ nhất] Nếu mệnh đề $P(n)$, phụ thuộc vào số tự nhiên n , thỏa mãn:

- (i) $P(\alpha)$ đúng với một $\alpha \in \mathbb{N}$
- (ii) $P(n+1)$ đúng khi $P(n)$ đúng, ở đó $n \geq \alpha, n \in \mathbb{N}$

thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq \alpha$.

Mệnh đề 1.4. [Nguyên lý thứ hai] Nếu mệnh đề $P(n)$, phụ thuộc vào số tự nhiên n , thỏa mãn:

- (i) $P(\alpha)$ đúng với một $\alpha \in \mathbb{N}$
- (ii) $P(n+1)$ đúng khi $P(\alpha), P(\alpha+1), \dots, P(n)$ đúng, ở đó $n \geq \alpha, n \in \mathbb{N}$

thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq \alpha$.

Bây giờ ta sẽ vận dụng hai nguyên lý này để xét một số bài toán sơ cấp.

Ví dụ 1.3. Với số nguyên $n \geq 2$ và $P_n = n!$, hãy chứng minh $2P_n \geq 2^n$.

Bài giải: Với $n = 2$ có $2P_2 = 4 = 2^2$. Như vậy kết luận đúng cho $n = 2$. Giả sử kết luận đúng cho $n > 2$. Khi đó $2P_n \geq 2^n$. Xét tích $2P_{n+1} = (n+1) \cdot 2P_n \geq (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Từ đó suy ra $2P_n \geq 2^n, \forall n \geq 2$.

Ví dụ 1.4. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 6$ ta luôn có $n! > 3^n$.

Bài giải: Bởi vì $7! = 5040 > 2187 = 3^7$ nên kết luận đúng với $n = 7$. Giả sử kết luận đã đúng với n . Khi đó ta có $n! > 3^n$. Với $n + 1$ có $(n + 1)! = n!(n + 1) > 3^n(n + 1)$ theo giả thiết quy nạp. Vì $n + 1 > 3$ nên $(n + 1)! > 3^{n+1}$ và như thế $n! > 3^n$ đúng với mọi số nguyên $n > 6$.

Ví dụ 1.5. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta luôn có bất đẳng thức $\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Bài giải: Bởi vì $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ nên ta nhận được bất đẳng thức $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$. Hiển nhiên $1 < 2$ nên bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n . Khi đó ta có $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$. Lại có $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ và như thế

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2n + 1 + 1}{\sqrt{n+1}}$$

hay $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$. Tóm lại, kết luận đúng với mọi số nguyên $n > 0$.

Ví dụ 1.6. Dãy (a_n) được cho như sau: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 15, a_5 = 21, \dots$. Xác định a_n theo n và chứng minh bất đẳng thức

$$T = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Bài giải: Từ $a_1 = 3 = a_0 + 2, a_2 = 6 = a_1 + 3, a_3 = 10 = a_2 + 4, a_4 = 15 = a_3 + 5, a_5 = 21 = a_4 + 6$ suy ra $a_n = a_{n-1} + n + 1$ và điều này dễ dàng có được qua quy nạp. Vậy $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ và suy ra $1 - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - 1}{a_k} = \frac{(k+1)(k+2) - 2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$. Như

vậy $1 - \frac{1}{a_k} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 + \frac{1}{k+2}\right)$ và ta có được các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned}
 T &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\left(\frac{5^2-1}{5^2}\right) \cdots \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= \frac{2.3.4^2.5^2 \cdots (n-1)^2 n^2 (n+1)(n+2)(n+3)}{2.3^2.4^2.5^2 \cdots (n-1)^2 n^2 (n+1)^2 (n+2)} = \frac{n+3}{3(n+1)} \\
 &< \frac{n+3}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Tóm lại $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ và nhận được bất đẳng thức $T < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$.

Ví dụ 1.7. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta có đồng nhất thức

$$1.2 + 2.2^2 + \cdots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Bài giải: Với $n = 1$ ta có $1.2 = 2 = (1-1)2^{1+1} + 2$ và như vậy kết luận đúng. Giả sử kết luận đúng với n . Khi đó $1.2 + 2.2^2 + \cdots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$. Với $n+1$ ta có kết quả sau: $1.2 + 2.2^2 + \cdots + n2^n + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} = n2^{n+2} + 2$ và như thế kết luận cũng đúng với $n+1$. Tóm lại, ta có đồng nhất thức $1.2 + 2.2^2 + \cdots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

Ví dụ 1.8. Chứng minh rằng với số nguyên $n > 0$ ta có đồng nhất thức

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right].$$

Bài giải: Với $n = 1$ ta có $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2.1+3}{3} \right]$. Giả sử kết luận đúng với $n \geq 1$. Khi đó $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$. Với $n+1$ ta có kết quả sau: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right] + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+1}} \right]$ và như thế kết luận cũng đúng với $n+1$. Tóm lại, ta có đồng nhất thức $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$.

Ví dụ 1.9. Với dãy số thực $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = n + 1, n \geq 1$, có

$$\sum_{i=0}^n \frac{|a_i - a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2 + 1} \sqrt{a_{i+1}^2 + 1}} > \frac{2n}{3(n+2)}.$$

Bài giải: Với ba số a, b, c ta đặt $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$. Khi đó bất đẳng thức $\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{b^2+1}\sqrt{c^2+1}} \geq \frac{|c-a|}{\sqrt{c^2+1}\sqrt{a^2+1}}$ tương đương $|\sin(x-y)| + |\sin(y-z)| \geq |\sin(x-z)|$. Từ $|\sin(u+v)| = |\sin u \cos v + \sin v \cos u| \leq |\sin u| + |\sin v|$ ta suy ra bất đẳng thức sau: $|\sin(x-z)| = |\sin(x-y+y-z)| \leq |\sin(x-y)| + |\sin(y-z)|$. Sử dụng kết quả này: $\frac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1}} + \frac{|a_2 - a_3|}{\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1}} \geq \frac{|a_1 - a_3|}{\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1}}$. Quy nạp theo n được $\sum_{i=0}^n \frac{|a_i - a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2+1}\sqrt{a_{i+1}^2+1}} \geq \frac{|a_0 - a_{n+1}|}{\sqrt{a_0^2+1}\sqrt{a_{n+1}^2+1}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n^2+4n+4}} > \frac{n}{\sqrt{2}(n+2)} > \frac{2n}{3(n+2)}$.

Ví dụ 1.10. Với những con tem 5 xu và 6 xu ta có thể tạo được những loại bưu phí nào?

Bài giải: Ta có ngay những loại bưu phí 5, 6, $10 = 2.5$, $11 = 5 + 6$, $12 = 2.6$, $15 = 3.5$, $16 = 2.5 + 6$, $17 = 2.6 + 5$, $18 = 3.6$, $20 = 4.5$, $21 = 3.5 + 6$, $22 = 2.5 + 2.6$, $23 = 3.6 + 5$, $24 = 4.6$ được gián bằng hai loại tem trên. Bây giờ ta chỉ ra, mọi bưu phí > 24 xu cũng được gián bằng hai loại tem trên. Giả sử $n > 24$ được biểu diễn bằng $n = k.5 + h.6$. Nếu $k \geq 1$ thì $n + 1 = (k - 1).5 + (h + 1).6$; Nếu $k = 0$ thì $h > 4$. Khi đó $n + 1 = 5.5 + (h - 4).6$. Do vậy $n + 1 = s.5 + r.6$ và từ đó suy ra điều cần chứng minh.

1.2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

1.2.1. Quy tắc đếm

Trước tiên ta giới thiệu hai quy tắc đếm cơ bản sau đây thường được sử dụng:

(i) [**Quy tắc cộng**] Giả sử có s công việc. Việc thứ nhất có thể làm n_1 cách, việc thứ hai có thể làm n_2 cách, ..., việc thứ s có thể làm n_s

cách và không có hai công việc nào có thể làm đồng thời. Như vậy có $n_1 + n_2 + \dots + n_s$ cách làm s công việc đó.

(ii) [**Quy tắc nhân**] Giả sử một việc được chia ra làm s công đoạn. Công đoạn thứ nhất có thể làm n_1 cách, công đoạn thứ hai có thể làm n_2 cách,..., công đoạn thứ s có thể làm n_s cách và công việc hoàn thành khi các công đoạn đều đã xong. Như vậy có $n_1.n_2.\dots.n_s$ cách làm công việc đó.

Quy tắc cộng và quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp:

Mệnh đề 1.5. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_s$ là những tập hữu hạn phần tử rời nhau. Khi đó lực lượng của tập hợp $\left(\bigcup_{k=1}^s A_k\right) = \sum_{k=1}^s \text{card}(A_k)$.

Mệnh đề 1.6. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_s$ là những tập hữu hạn phần tử rời nhau. Khi đó

$$\text{Lực lượng của tích Đềcác } \text{card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_s) = \prod_{k=1}^s \text{card}(A_k).$$

1.2.2. Hoán vị và chỉnh hợp

Định nghĩa 1.6. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự của tập T gồm n phần tử khác nhau được gọi là một *hoán vị* của tập n phần tử đó. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự k phần tử của tập T gồm n phần tử khác nhau được gọi là một *chỉnh hợp chập k* của tập n phần tử.

Ký hiệu số hoán vị của tập n phần tử khác nhau là P_n và ký hiệu số chỉnh hợp chập k của tập gồm n phần tử khác nhau là A_n^k . Kết quả sau đây là hiển nhiên.

Mệnh đề 1.7. Số các hoán vị P_n và số các chỉnh hợp A_n^k của một tập gồm n phần tử khác nhau là $P_n = n!$ và $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Qui ước $0! = 1$.

Ví dụ 1.11. Với số nguyên $n \geq 2$ ta luôn có $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$.

Bài giải: Bởi vì $(n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}) = (n-1)P_{n-1} + (n-1)P_{n-2}$ nên $(n-1)(P_{n-1} + P_{n-2}) = nP_{n-1} - P_{n-1} + P_{n-1} = P_n$.

Ví dụ 1.12. Với số nguyên dương n và $P_n = n!$ hãy chứng minh rằng

$$(i) S_n = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \cdots + nP_n = P_{n+1} - 1.$$

$$(ii) T_n = \frac{1}{P_2} + \frac{2}{P_3} + \frac{3}{P_4} + \cdots + \frac{n-1}{P_n} = 1 - \frac{1}{P_{n+1}}.$$

Bài giải: (i) Bởi vì $P_{k+1} = (k+1)k! = kP_k + P_k$ nên $kP_k = P_{k+1} - P_k$.
 Từ đây suy ra $S_n = \sum_{k=1}^n kP_k = \sum_{k=1}^n (P_{k+1} - P_k) = P_{n+1} - 1$.

$$(ii) \text{ Bởi vì } \frac{k-1}{P_k} = \frac{1}{P_{k-1}} - \frac{1}{P_k} \text{ nên } T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{P_{k-1}} - \frac{1}{P_k} \right) = 1 - \frac{1}{P_{n+1}}.$$

Ví dụ 1.13. Một lớp có 100 sinh viên gồm 50 nam và 50 nữ. Giả sử 100 em xếp thành một hàng thẳng. Tính số cách sắp xếp để có ít nhất hai em cùng giới đứng cạnh nhau.

Bài giải: Đánh số vị trí đứng từ 1 đến 100. Xếp 100 em vào 100 chỗ chính là một hoán vị 100 phần tử. Tất cả có $100!$ cách sắp xếp.

Tính số cách sắp xếp để không có hai người cùng giới đứng cạnh nhau: Lần đầu để các em nữ đứng ở vị trí số lẻ, các em nam đứng ở vị trí số chẵn. Có $50!50!$ cách sắp xếp; Lần sau để các em nữ đứng ở vị trí số chẵn, các em nam đứng ở vị trí số lẻ. Có $50!50!$ cách xếp. Vậy số cách xếp cần tính $100! - 2 \cdot 50! \cdot 50!$.

Ví dụ 1.14. Với số nguyên $n > 2$ và $P_n = n!$, hãy chứng minh $P_n^2 > n^n$.

Bài giải: Bởi vì $P_n^2 = [1n][2(n-1)][3(n-2)] \cdots [(n-1)2][n1]$ và dễ dàng nhận được $k(n-k+1) > n$ với $2 \leq k \leq n-1$ nên ta có

$$\begin{cases} 1n \geq n \\ 2(n-1) > n \\ 3(n-2) > n \\ \dots \\ (n-1)2 > n \\ n1 \geq n \end{cases}$$

Nhân tất cả các bất đẳng thức trên được $P_n^2 > n^n$.

Ví dụ 1.15. Với số nguyên $n \geq 1$ ta luôn có $\frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \cdots + \frac{1}{P_n} < 3$.

Bài giải: Vì $T = \frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \cdots + \frac{1}{P_n} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ nên

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $\frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \cdots + \frac{1}{P_n} < 3$.

Ví dụ 1.16. Giả sử các số $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ được định nghĩa như sau đây: $a_1 = 0, a_2 = 1$ và $a_{n+1} = (n+1)a_n + (-1)^{n+1}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$. Chứng minh $a_n = P_n \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{P_n} \right)$ với $n \geq 1$.

Bài giải: Kết luận đúng với $n = 1$ do bởi $a_1 = 0 = P_1 \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} \right)$. Giả sử kết luận đúng với n , có nghĩa: $a_n = P_n \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{P_n} \right)$. Ta chỉ ra kết luận cũng đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)a_n + (-1)^{n+1} \\ &= (n+1)P_n \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{P_n} \right) + (-1)^{n+1} \\ &= P_{n+1} \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{P_n} \right) + (-1)^{n+1} \\ &= P_{n+1} \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{P_n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{P_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Do đó $a_n = P_n \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{P_n} \right)$ với $n \geq 1$.

Ví dụ 1.17. Có bao nhiêu cách chọn 11 cầu thủ nam khác nhau cho đội bóng của lớp trong một lớp chuyên có 25 em học sinh nam và 6 học sinh nữ.

Bài giải: Mỗi cách chọn có thứ tự 11 cầu thủ cho đội bóng là một chỉnh hợp chập 11 của 25 em nam. Do vậy số cách chọn đúng bằng A_{25}^{11} .

Ví dụ 1.18. Có 30 em tham gia cuộc thi tiếng hát học trò. Người nhất sẽ nhận được huy chương vàng, người nhì sẽ nhận được huy chương bạc và người ba sẽ nhận được huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao ba huy chương nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra.

Bài giải: Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập 3 của một tập gồm 30 phần tử. Do vậy số cách trao huy chương đúng bằng A_{30}^3 .

Ví dụ 1.19. Hãy tính tổng $T_n = A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots + A_n^2$ với số nguyên $n \geq 2$.

Bài giải: Từ $T_n = A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \dots + A_n^2 = 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1)n$ suy ra $T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + (1 + 2 + \dots + n - 1)$ hay $T_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Ví dụ 1.20. Hãy tính hai tổng
$$\begin{cases} T_n = \frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} \\ S_n = \frac{1}{A_3^3} + \frac{1}{A_4^3} + \frac{1}{A_5^3} + \dots + \frac{1}{A_n^3}, n \geq 3. \end{cases}$$

Bài giải: Vì $T_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ nên suy ra $T_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Do bởi $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$ nên có thể viết

$$\begin{aligned} 2S_n &= \frac{2}{A_3^3} + \frac{2}{A_4^3} + \frac{2}{A_5^3} + \dots + \frac{2}{A_n^3} \\ &= \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{(n-2)(n-1)n} \\ &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} \\ &\quad - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} - \dots - \frac{1}{(n-1)n}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 2S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n} \text{ hay } S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n-1)n}.$$

Ví dụ 1.21. Với số nguyên $n \geq 2$, hãy chứng minh bất đẳng thức dưới đây:

$$\left[(A_n^1)^2 + (A_n^2)^2 + \cdots + (A_n^n)^2 \right] \left[(P_0)^2 + (P_1)^2 + \cdots + (P_{n-1})^2 \right] \geq n^2 P_n^2.$$

Bài giải: Do $\left[(A_n^1)^2 + (A_n^2)^2 + \cdots + (A_n^n)^2 \right] \left[(P_0)^2 + (P_1)^2 + \cdots + (P_{n-1})^2 \right] \geq \left[A_n^1 P_{n-1} + A_n^2 P_{n-2} + \cdots + A_n^n P_0 \right]^2$
Theo bất đẳng thức Bunhiakópxki và $A_n^k P_{n-k} = P_n = A_n^n$ nên
 $\sum_{k=1}^n (A_n^k)^2 \sum_{k=1}^n (P_{k-1})^2 \geq n^2 P_n^2.$

Ví dụ 1.22. Với số nguyên $n \geq 2$, hãy chứng minh bất đẳng thức:

$$\left[A_n^1 + A_n^2 + \cdots + A_n^n \right] \left[P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1} \right] \geq n^2 A_n^n.$$

Bài giải: Ta có bất đẳng thức $\left[A_n^1 + A_n^2 + \cdots + A_n^n \right] \left[P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1} \right] \geq n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n A_n^k} \cdot n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n P_{k-1}} \geq n^2 P_n$ theo bất đẳng thức Cauchy. Dấu = không xảy ra. Vậy $\left[A_n^1 + A_n^2 + \cdots + A_n^n \right] \left[P_0 + P_1 + \cdots + P_{n-1} \right] \geq n^2 A_n^n.$

Ví dụ 1.23. Với số nguyên lẻ $n \geq 1$ và phép hoán vị p của tập các số $\{1, 2, \dots, n\}$, đặt $T = |p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \cdots + |p(n) - n| = \frac{n^2 - 1}{2}$.
Hãy xác định giá trị lớn nhất của T .

Bài giải: Vì $\{p(1), p(2), \dots, p(n)\} = \{1, 2, \dots, n\}$ nên với việc chọn dấu + hay - một cách thích hợp ta có $|p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \cdots + |p(n) - n| = \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2 \pm \cdots \pm n \pm n$. Tổng $T = |p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \cdots + |p(n) - n| = \frac{n^2 - 1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $(n-1) + (n-2) + \cdots + \left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) + \left|\frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{2}\right| + \left|\frac{n-3}{2} - \frac{n+3}{2}\right| + \cdots + |1 - n| = 2\left(n + \cdots + \frac{n+3}{2}\right) - 2\left(1 + 2 + \cdots + \frac{n-1}{2}\right)$. Do vậy $T_{ln} = \frac{n^2 - 1}{2}$.

1.2.3. Tổ hợp

Định nghĩa 1.7. Mỗi tập con gồm k phần tử của một tập gồm n phần tử khác nhau được gọi là một *tổ hợp chập k* của tập n phần tử đó.

Ký hiệu số tổ hợp chập k của tập gồm n phần tử khác nhau là C_n^k hoặc $\binom{n}{k}$. Kết quả sau đây là hiển nhiên.

Mệnh đề 1.8. Số các tổ hợp chập k của một tập gồm n phần tử khác nhau là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dễ dàng kiểm tra $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Ví dụ 1.24. Có 120 đồ vật xếp vào 3 thùng một cách tùy ý sao cho mỗi thùng có 40 đồ vật. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

Bài giải: Có C_{120}^{40} cách lấy 40 vật từ 120 vật để xếp vào thùng thứ nhất, có C_{80}^{40} cách lấy 40 vật từ 80 vật còn lại để xếp vào thùng thứ hai và có C_{40}^{40} cách lấy 40 vật từ 40 vật để xếp vào thùng thứ ba. Như vậy, số cách sắp xếp là $S = C_{120}^{40} C_{80}^{40} C_{40}^{40} = \frac{120!}{40!80!} \frac{80!}{40!40!} = \frac{120!}{40!40!40!}$.

Ví dụ 1.25. Tính tổng $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + (n-2)(n-1)n$.

Bài giải: Biểu diễn $S_n = 6 [1 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_n^3]$. Sử dụng quan hệ $C_n^3 + C_n^4 = C_{n+1}^4$ ta có $S_n = 6 [1 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_n^3] = 6 C_{n+1}^4$.

Ví dụ 1.26. Chứng minh rằng, với hai số tự nhiên n, k thỏa mãn $0 \leq k \leq n$ luôn có bất đẳng thức $C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq (C_{2n}^n)^2$.

Bài giải: Với $k = 0$, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Với $k > 0$ ta sẽ chỉ ra $C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq C_{2n+k-1}^n \cdot C_{2n-k+1}^n$. Bất đẳng thức này tương đương $\frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} \cdot \frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \leq \frac{(2n+k-1)!}{n!(n+k-1)!} \cdot \frac{(2n-k+1)!}{n!(n-k+1)!}$ hay $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+k-1}$ đúng. Vậy $C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq C_{2n+k-1}^n \cdot C_{2n-k+1}^n$ và từ đây suy ra $C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq \dots \leq (C_{2n}^n)^2$.

Ví dụ 1.27. Với số nguyên $n \geq 2$ có $T_n = 1 C_n^1 + 2 C_n^2 + \dots + n C_n^n = n 2^{n-1}$.

Bài giải: Với $n = 2$ ta có $T_2 = 1 C_2^1 + 2 C_2^2 = 2 + 2 = 4 = 2.2^1$. Vậy công thức đúng cho $n = 2$. Giả sử công thức đúng cho n , có nghĩa:

$T_n = n2^{n-1}$. Ta phải chứng minh công thức đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 1 C_{n+1}^1 + 2 C_{n+1}^2 + \cdots + n C_{n+1}^n + (n+1) C_{n+1}^{n+1} \\ &= T_n + 1 C_n^0 + 2 C_n^1 + \cdots + n C_n^{n-1} + (n+1) \\ &= T_n + T_n + C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n \\ &= 2T_n + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T_{n+1} = (n+1)2^n$ và công thức đúng với $n + 1$.

Ví dụ 1.28. *Giả sử $n > 1$ là số nguyên lẻ. Chứng minh rằng dãy số $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{\frac{n-1}{2}}$ chứa một số lẻ các số nguyên.*

Bài giải: Tổng các số trong dãy đã cho là

$$T = C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2}[C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n - 2]$$
 $= 2^{n-1} - 1$. Vì T là số lẻ nên số các số lẻ trong dãy đã cho là một số lẻ.

Ví dụ 1.29. *Cho dãy Fibonacci $a_0 = 1, a_1 = 1$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Khi đó, với mọi số nguyên dương n ta có $a_{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 + \cdots + C_n^n$ và $a_{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n}^1 + \cdots + C_{n+1}^n$.*

Bài giải: Kết luận được chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Kiểm tra trực tiếp $a_0 = 1 = C_0^0$ và $a_1 = 1 = C_{2,0+1}^{0+1}$. Kết luận đúng. Giả sử kết luận đúng cho a_{2n} và a_{2n+1} , có nghĩa: $a_{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-2}^2 + \cdots + C_n^n$ và $a_{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n-1}^2 + \cdots + C_{n+1}^n$. Từ $S = a_{2n+2} = a_{2n} + a_{2n+1}$ có

$$\begin{aligned} S &= C_{2n}^0 + C_{2n-1}^1 + \cdots + C_n^n + C_{2n+1}^0 + C_{2n}^1 + \cdots + C_{n+1}^n \\ &= [C_{2n}^0 + C_{2n}^1] + [C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2] + \cdots + [C_{n+1}^{n-1} + C_{n+1}^n] + C_{2n+1}^0 + C_n^n \\ &= C_{2n+1}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{n+2}^n + C_{2n+1}^0 + C_n^n \\ &= C_{2n+1}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{n+2}^n + C_{2n+2}^0 + C_{n+1}^{n+1}. \end{aligned}$$

Do vậy $a_{2n+2} = C_{2n+1}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{n+2}^n + C_{2n+2}^0 + C_{n+1}^{n+1}$. Hoàn toàn tương tự, nếu kết luận đúng cho a_{2n-1} và a_{2n} thì ta cũng chứng minh được kết luận đúng cho a_{2n+1} . Tóm lại, ta có điều phải chứng minh.

1.2.4. Công thức khai triển nhị thức Newton

Mệnh đề 1.9. [Newton] Công thức khai triển lũy thừa $(x + y)^n$ như sau: $(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$.

Chứng minh: Ta chứng minh kết quả bằng phương pháp quy nạp theo n . Với $n = 0, 1$ công thức hiển nhiên đúng. Giả sử công thức đúng với n . Ta chỉ ra nó đúng với $n + 1$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có biến đổi:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n (x + y) = \left[\sum_{r=0}^n C_n^r x^r y^{n-r} \right] (x + y) \\ &= \sum_{r=0}^n C_n^r x^{r+1} y^{n-r} + \sum_{r=0}^n C_n^r x^r y^{n-r+1} \\ &= C_n^0 y^{n+1} + [C_n^0 + C_n^1] x y^n + [C_n^1 + C_n^2] x^2 y^{n-1} \\ &\quad + \cdots + [C_n^{n-1} + C_n^n] x^n y + C_n^n x^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} C_{n+1}^r x^r y^{n+1-r}. \end{aligned}$$

Ta suy ra $(x + y)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} C_{n+1}^r x^r y^{n+1-r}$. Vậy ta suy ra công thức đúng với $n + 1$. Tóm lại, công thức đúng với mọi số nguyên không âm n . Tiếp theo, vận dụng công thức trên để giải một vài bài toán về tổ hợp sau:

Ví dụ 1.30. Với số nguyên $n, k, r \geq 0$ và $r \leq n + k$ ta luôn có đồng nhất thức $C_{n+k}^r = \sum_{\substack{i+j=r \\ 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k}} C_n^i C_k^j$.

Bài giải: Từ đồng nhất thức $(1 + x)^{n+k} = (1 + x)^n (1 + x)^k$ suy ra quan hệ $\sum_{r=0}^{n+k} C_{n+k}^r x^r = \sum_{i=0}^n C_n^i x^i \sum_{j=0}^k C_k^j x^j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^k C_n^i C_k^j x^{i+j}$. So sánh hệ số của x^r ở hai vế ta nhận được $C_{n+k}^r = \sum_{\substack{i+j=r \\ 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq k}} C_n^i C_k^j$.

Ví dụ 1.31. Với số nguyên $n \geq 1$, hãy chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{5^n - 1}{n} > 2^n \sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^n}.$$

Bài giải: Do bởi $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$ nên $5^n = \sum_{r=0}^n C_n^r 4^r$ khi cho $x = 4$. Tiếp tục biến đổi $5^n - 1 = C_n^1 4 + C_n^2 4^2 + \dots + C_n^n 4^n > n \sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n 4^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ và như vậy $\frac{5^n - 1}{n} > 2^n \sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n}$.

Ví dụ 1.32. Hãy xác định hệ số lớn nhất trong đa thức của x khi khai triển lũy thừa $(2+5x)^n$.

Bài giải: Do bởi $(2+5x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k 5^{n-k} x^{n-k}$ nên ta xét bất đẳng thức $C_n^{k+1} 2^{k+1} 5^{n-k-1} > C_n^k 2^k 5^{n-k}$ nếu và chỉ nếu $k < \frac{2n-5}{7}$. Tương tự, xét $C_n^{h+1} 2^{h+1} 5^{n-h-1} < C_n^h 2^h 5^{n-h}$ có $h > \frac{2n-5}{7}$. Đặt $r = \left[\frac{2n-5}{7} \right]$. Từ hai nhận xét suy ra hệ số lớn nhất bằng $\max\{C_n^r 2^r 5^{n-r}, C_n^{r+1} 2^{r+1} 5^{n-r-1}\}$.

Ví dụ 1.33. Giả sử khai triển $(3+7x)^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} a_k x^k$. Hãy xác định $\max\{a_0, a_1, \dots, a_{2011}\}$.

Bài giải: Ta có $a_k = C_{2011}^k 3^k 7^{2011-k}$. Xét bất đẳng thức $a_{k+1} > a_k$ hay $C_{2011}^{k+1} 3^{k+1} 7^{2011-k-1} > C_{2011}^k 3^k 7^{2011-k}$ nếu và chỉ nếu $k < \frac{6026}{10}$. Tương tự, $C_{2011}^{h+1} 3^{h+1} 7^{2011-h-1} < C_{2011}^h 3^h 7^{2011-h}$ có $h > \frac{6026}{10}$. Từ hai nhận xét suy ra hệ số lớn nhất bằng $\max\{C_{2011}^{602} 3^{602} 7^{1409}, C_{2011}^{603} 3^{603} 7^{1408}\} = C_{2011}^{603} 3^{603} 7^{1408}$ hay a_{603} là lớn nhất.

Ví dụ 1.34. Hãy xác định số hạng lớn nhất trong khai triển $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20}$.

Bài giải: Do bởi $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20} = 2^{10} \left(1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)^{20} = 2^{10} \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^k}$ nên ta xét $C_{20}^{k+1} \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}} > C_{20}^k \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^k}$ nếu và chỉ nếu $\frac{(20-k)^2}{(k+1)^2} > \frac{2}{5}$ hay ta có $3k^2 - 2.102k + 1998 > 0$. Vậy, hoặc $k > \frac{102 + \sqrt{4410}}{3} > 20$: bị loại hoặc $k < \frac{102 - \sqrt{4410}}{3}$. Từ đây suy ra khi $k = \left[\frac{102 - \sqrt{4410}}{3} \right]$ thì $C_{20}^{k+1} \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}}$ là lớn nhất.

Ví dụ 1.35. Giả sử khai triển $(1 + 3x + 7x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$. Hãy xác định

$$(i) \quad T = \sum_{k=0}^{2n} a_k.$$

$$(ii) \quad S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k 3^k.$$

Bài giải: (i) Từ $(1 + 3x + 7x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ suy ra $T = (1 + 3 + 7)^n = 11^n$.

(ii) Từ $(1 + 3x + 7x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$ có $S = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k 3^k = (1 - 3 + 7)^n = 5^n$ hay $S = 5^n$.

1.3. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Trong nhiều bài toán đếm, các phần tử có thể được sử dụng lặp lại nhiều lần hoặc các phần tử giống nhau trong một tập cùng được sử dụng. Ví dụ, các chữ số và các chữ cái được sử dụng nhiều lần trong một biển số xe máy hoặc trong một từ. Do vậy, trong mục này ta trình bày phương pháp xây dựng bài toán tổ hợp có lặp để giải một lớp rất rộng các bài toán đếm.

1.3.1. Chỉnh hợp có lặp

Định nghĩa 1.8. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự k phần tử mà các phần tử có thể lặp lại của tập T gồm n phần tử được gọi là một *chỉnh hợp lặp* *chập* k của n phần tử.

Ký hiệu số các chỉnh hợp lặp chập k của tập n phần tử là $\overline{A}_n^k$. Kết quả sau đây là hiển nhiên.

Mệnh đề 1.10. Số các chỉnh hợp lặp chập k của một tập gồm n phần tử là $\overline{A}_n^k = n^k$.

1.3.2. Tổ hợp có lặp

Định nghĩa 1.9. Mỗi cách lấy k phần tử mà các phần tử có thể lặp lại của một tập n phần tử được gọi là một *tổ hợp lặp* *chập* k của n phần tử đó.

Ký hiệu số tất cả các tổ hợp lặp chập k của một tập gồm n phần tử là $\overline{C}_n^k$. Ta có kết quả sau đây:

Bổ đề 1.1. *Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + \dots + x_k = n$ bằng $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

Chứng minh: Ký hiệu số nghiệm nguyên không âm của phương trình là $N_k(n)$. Ta có $N_1(n) = 1$. Tính $N_2(n)$, tức là tính số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 = n$. Phương trình này có các nghiệm $(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)$ nên $N_2(n) = n+1 = \binom{n+1}{1}$. Để tính $N_3(n)$ ta xét phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = n$. Cho $x_3 = 0, 1, 2, \dots, n$, ta có $N_3(n) = N_2(n) + N_2(n-1) + \dots + N_2(2) + N_2(1) + N_2(0) = (n+1) + \dots + 1$. Vậy $N_3(n) = \binom{n+2}{2}$. Ta chứng minh $N_k(n) = \binom{n+k-1}{k-1}$ bằng quy nạp. Hiển nhiên $N_k(n) = N_{k-1}(n) + N_{k-1}(n-1) + N_{k-1}(n-2) + \dots + N_{k-1}(0)$. Do đó $N_k(n) = \binom{n+k-2}{k-2} + \binom{n+k-3}{k-2} + \dots + \binom{k-2}{k-2} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Hệ quả 1.1. *Số nghiệm nguyên không âm của hệ bất phương trình dưới đúng bằng $\binom{n - \alpha_1 - \dots - \alpha_n + k - 1}{k - 1}$:*

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = n \\ x_1 \geq \alpha_1, \dots, x_k \geq \alpha_k. \end{cases}$$

Chứng minh: Đặt $x_i = y_i + \alpha_i$ với $i = 1, 2, \dots, k$. Khi đó ta phải xác định số nghiệm nguyên không âm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y_1 + \dots + y_k = n - \alpha_1 - \dots - \alpha_k \\ y_1 \geq 0, \dots, y_k \geq 0. \end{cases}$

Theo Bổ đề 1.1, số nghiệm cần xác định đúng bằng $\binom{n - \alpha_1 - \dots - \alpha_n + k - 1}{k - 1}$.

Ví dụ 1.36. *Xác định số nghiệm nguyên không âm của hệ bất phương trình:* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2011 \\ x_2 \geq 3, x_4 \geq 6, x_5 \geq 7. \end{cases}$

Bài giải: Mỗi nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2011$ thỏa mãn điều kiện nguyên không âm và $x_2 \geq 3, x_4 \geq 6, x_5 \geq 7$ sẽ ứng với cách chọn 2011 phần tử từ tập 5 loại, trong đó loại 2 có ít nhất 3 phần tử, loại 4 có ít nhất 6 phần tử và loại 5 có ít nhất 7 phần tử. Như thế, trước tiên chọn 3 phần tử loại 2, 6 phần tử loại 4 và 7 phần tử loại 5, sau đó chọn thêm $2011 - 16 = 1995$ phần tử nữa. Vậy số nghiệm của hệ là $C_{1995+5-1}^{1995} = C_{1999}^{1995}$.

Mệnh đề 1.11. Số tất cả các tổ hợp lặp chập k của một tập gồm n phần tử là $\overline{C}_n^k = C_{k+n-1}^k$.

Chứng minh: Sử dụng vách ngăn hình thức: Mỗi tổ hợp lặp chập k của một tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n - 1$ thanh đứng $|$ và k ngôi sao $*$. Dùng $n - 1$ thanh đứng để phân cách các ngăn $|\dots|\dots|\dots$. Ngăn thứ i chứa bao nhiêu ngôi sao thì có bấy nhiêu lần xuất hiện phần tử thứ i trong tổ hợp lặp. Ta xét hai ví dụ sau:

Ví dụ 1: Tổ hợp lặp chập 8 từ một tập 5 phần tử được biểu diễn bằng 4 thanh đứng và 8 ngôi sao

$$***|*|*|**|*$$

biểu thị tổ hợp lặp chứa đúng 3 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ 2, 1 phần tử thứ 3, 2 phần tử thứ tư và 1 phần tử thứ năm.

Ví dụ 2: Tổ hợp lặp chập 6 từ một tập 4 phần tử được biểu diễn bằng 3 thanh đứng và 6 ngôi sao

$$***|*|*|**|*$$

biểu thị tổ hợp lặp chứa đúng 3 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ 2, 2 phần tử thứ 3, và không có phần tử thứ tư nào.

Mỗi dãy $n - 1$ thanh đứng $|$ và k ngôi sao $*$ ứng với một tổ hợp lặp chập k của tập n phần tử. Coi $n - 1$ thanh đứng và k ngôi sao như là các phần tử của tập T gồm $n - 1 + k$ phần tử. Số đó đúng bằng C_{n-1+k}^k . Do vậy $\overline{C}_n^k = C_{k+n-1}^k$.

Sử dụng phương trình nghiệm nguyên: Giả sử lấy x_i lần phần tử a_i của tập $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Khi đó x_i là số nguyên không âm.

Mỗi tổ hợp lặp chập k của tập A tương ứng một-một với một nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình này là C_{k+n-1}^k theo Bổ đề 1.1 .

Ví dụ 1.37. Một cửa hàng bánh có 10 loại bánh khác nhau. Ngày Trung thu cô giáo đi mua 30 chiếc bánh cho học sinh. Có bao nhiêu cách chọn 30 chiếc bánh đó.

Bài giải: Số cách chọn 30 chiếc bánh đó đúng bằng số tổ hợp lặp chập 30 của 10 phần tử. Do vậy, cách chọn 30 chiếc bánh bằng C_{39}^{30} .

1.3.3. Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau.

Mệnh đề 1.12. Số các hoán vị lặp của n phần tử, trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., n_s phần tử như nhau thuộc loại s , sẽ đúng bằng $\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_s!}$.

Chứng minh: Ký hiệu các phần tử là $a_1, a_2, \dots, a_s$, trong đó a_1 xuất hiện n_1 lần, a_2 xuất hiện n_2 lần, ..., a_s xuất hiện n_s lần. n_1 phần tử bằng nhau a_1 được ký hiệu qua $a_{11}, \dots, a_{1n_1}$; n_2 phần tử bằng nhau a_2 được ký hiệu qua $a_{21}, \dots, a_{2n_2}$; ...; n_s phần tử bằng nhau a_s được ký hiệu qua $a_{s1}, \dots, a_{sn_s}$. Với $n = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ phần tử a_{ij} ta có $n!$ hoán vị. Khi cố định các $a_{i1}, \dots, a_{in_i}, i \neq 1$, còn n_1 phần tử bằng nhau $a_{11}, \dots, a_{1n_1}$ hoán vị với nhau ta cũng chỉ được một hoán vị. Trong trường hợp này, thực tế mỗi phần tử đã được tính $n_1!$ lần. Tương tự, xét các trường hợp khác. Vì các trường hợp độc lập với nhau nên theo quy tắc nhân ta thấy mỗi hoán vị thực tế đã được tính $n_1! \dots n_s!$ lần. Vậy số hoán vị cần tính bằng $\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_s!}$.

Ví dụ 1.38. Có thể nhận bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ **success**

Bài giải: Vì một số chữ cái của từ success là như nhau nên số xâu khác nhau không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được. Từ success chứa 3 chữ s, 1 chữ u, 2 chữ c và 1 chữ e. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được, ta nhận thấy, có C_7^3 cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ số s. Ta

còn lại 4 chỗ trống. Có C_4^2 cách chọn 2 chỗ cho 2 chữ số c. Ta còn lại 2 chỗ trống. Có C_2^1 cách chọn 1 chỗ cho 1 chữ số u và như thế còn C_1^1 chỗ cho 1 chữ số e. Theo quy tắc nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo thành là $T = C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$.

Ví dụ 1.39. Một thầy giáo có 30 chiếc kẹo, gồm 12 chiếc Socola, 8 chiếc kẹo hoa quả, 4 chiếc kẹo cao su và 6 chiếc kẹo bạc hà. Nếu người đó mỗi ngày ăn một chiếc thì có bao nhiêu cách ăn 30 chiếc kẹo này.

Bài giải: Số cách ăn 30 chiếc kẹo, gồm 12 chiếc Socola, 8 chiếc kẹo hoa quả, 4 chiếc kẹo cao su và 6 chiếc kẹo bạc hà đúng bằng số hoán vị của 30 chiếc kẹo, gồm 12 chiếc Socola, 8 chiếc kẹo hoa quả, 4 chiếc kẹo cao su và 6 chiếc kẹo bạc hà. Vậy số cách ăn bằng $T = \frac{30!}{12!8!4!6!}$.

1.3.4. Số cách phân bố các đồ vật vào trong hộp

Mệnh đề 1.13. Ký hiệu T là số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào trong k hộp khác nhau sao cho có n_i vật đặt vào hộp thứ i với $i = 1, 2, \dots, k$. Khi đó $T = \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$.

Chứng minh: Ta có $C_n^{n_1}$ cách chọn n_1 vật từ n vật đặt vào hộp thứ nhất, tiếp theo có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách chọn n_2 vật từ $n - n_1$ vật đặt vào hộp thứ hai, ..., cuối cùng là $C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$ cách chọn n_k vật từ $n - n_1 - \dots - n_{k-1}$ vật đặt vào hộp thứ k . Vì các trường hợp chọn ở trên là độc lập với nhau nên theo quy tắc nhân ta thấy $T = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$. Như vậy, chúng ta nhận được kết quả $T = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$. Biến đổi $T = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!n_2!(n-n_1-n_2)! \dots \frac{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}{n_k!0!}} = \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$. Tóm lại $T = \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$.

Ví dụ 1.40. Giả sử m và k là những số nguyên dương và đặt $n = mk$. Ký hiệu T là số cách phân chia n đồ vật khác nhau xếp vào k hộp giống nhau sao cho mỗi hộp chứa đúng m vật. Khi đó $T = \frac{n!}{k!(m!)^k}$.

Bài giải: Ta coi k hộp là khác nhau. Khi đó số cách phân chia là $T = \frac{n!}{m!m!\dots m!} = \frac{n!}{(m!)^k}$. Do k hộp giống nhau nên mỗi cách phân chia đã xuất hiện $k!$ lần. Vậy thực tế số cách phân chia là $T = \frac{n!}{k!(m!)^k}$.

Ví dụ 1.41. Giả sử có s loại hộp gồm m_1 chiếc loại thứ nhất, m_2 chiếc loại thứ hai, ..., m_s chiếc loại thứ s , trong đó những chiếc cùng loại giống hệt nhau. Có $n = m_1n_1 + m_2n_2 + \dots + m_sn_s$ đồ vật xếp hết vào các hộp sao cho mỗi hộp thuộc loại thứ i chứa đúng n_i vật. Ký hiệu T là số cách phân chia n đồ vật khác nhau xếp vào s loại hộp gồm $m_1 + m_2 + \dots + m_s$ chiếc đó. Khi đó $T = \frac{(m_1n_1 + m_2n_2 + \dots + m_sn_s)!}{m_1!m_2!\dots m_s!(n_1!)^{m_1}(n_2!)^{m_2}\dots (n_s!)^{m_s}}$.

Bài giải: Trước tiên ta chia n vật thành s phần sao cho phần thứ i có m_in_i vật. Khi đó số cách phân chia là $S = \frac{n!}{(m_1n_1)!(m_1n_2)!\dots (m_sn_s)!}$. Dem phần thứ i là m_in_i vật xếp vào m_i hộp giống hệt nhau. Khi đó số cách phân chia là $T_i = \frac{(m_in_i)!}{m_i!(n_i!)^{m_i}}$. Do cách phân chia ở mỗi phần là độc lập với nhau nên tất cả số các cách phân chia khác nhau là $T = S.T_1.T_2\dots T_s$ hay $T = \frac{n!}{(m_1n_1)!(m_1n_2)!\dots (m_sn_s)!} \frac{(m_1n_1)!}{m_1!(n_1!)^{m_1}} \dots \frac{(m_sn_s)!}{m_s!(n_s!)^{m_s}}$ hoặc viết gọn lại $T = \frac{(m_1n_1 + m_2n_2 + \dots + m_sn_s)!}{m_1!m_2!\dots m_s!(n_1!)^{m_1}(n_2!)^{m_2}\dots (n_s!)^{m_s}}$.

1.4. Xây dựng bài toán tổ hợp

Có nhiều phương pháp giải một bài toán tổ hợp. Trong mục này chúng tôi chỉ trình bày một vài phương pháp qua việc vận dụng đạo hàm và tích phân, hệ phương trình tuyến tính nhiều ẩn, công thức chuyển đổi ngược và song ánh.

1.4.1. Phương pháp đạo hàm và tích phân

Ví dụ 1.42. Với số nguyên $n \geq 1$, tính $T_n = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n$.

Bài giải: Với $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$, lấy đạo hàm hai vế rồi nhân hai vế với x ta nhận được hệ thức

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2 C_n^2 x^2 + \cdots + n C_n^n x^n.$$

Ta có $T_1 = 1$. Khi $n > 1$, lấy tiếp đạo hàm một lần nữa ta được $n(1+x)^{n-1} + (n-1)nx(1+x)^{n-2} = C_n^1 + 2^2 C_n^2 x + \cdots + n^2 C_n^n x^{n-1}$. Thay $x = 1$ ta nhận được $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$.

Ví dụ 1.43. Với số nguyên $n \geq 1$, hãy chứng minh $\sum_{r=1}^n r(C_n^r)^2 = n C_{2n-1}^n$.

Bài giải: Với $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$, lấy đạo hàm hai vế rồi nhân hai vế với x ta nhận được hệ thức

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2 C_n^2 x^2 + \cdots + n C_n^n x^n.$$

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ có $\frac{n}{x}(1+\frac{1}{x})^{n-1} = C_n^1 \frac{1}{x} + 2 C_n^2 \frac{1}{x^2} + \cdots + n C_n^n \frac{1}{x^n}$. Như vậy $\frac{n}{x}(1+\frac{1}{x})^{n-1}(1+x)^n = \left[C_n^1 \frac{1}{x} + 2 C_n^2 \frac{1}{x^2} + \cdots + n C_n^n \frac{1}{x^n} \right] \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$ hay $\frac{n}{x^n}(1+x)^{2n-1} = \left[C_n^1 \frac{1}{x} + 2 C_n^2 \frac{1}{x^2} + \cdots + n C_n^n \frac{1}{x^n} \right] \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$. Tính số hạng không chứa x ở hai vế, ta nhận được quan hệ

$$n C_{2n-1}^n = \frac{n}{x^n} C_{2n-1}^n x^n = 1(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \cdots + n(C_n^n)^2.$$

Từ đây suy ra đồng nhất thức $\sum_{r=1}^n r(C_n^r)^2 = n C_{2n-1}^n$.

Ví dụ 1.44. Với số nguyên $n \geq 7$, hãy chứng minh bất đẳng thức:

$$C_n^1 + 2 C_n^2 2 + 3 C_n^3 2^2 + \cdots + n C_n^n 2^{n-1} < \frac{n \cdot n!}{3}.$$

Bài giải: Với $(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$, lấy đạo hàm hai vế, nhận được hệ thức

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2 C_n^2 x + 3 C_n^3 x^2 + \cdots + n C_n^n x^{n-1}.$$

Thay $x = 2$ ta được $n.3^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n 2^{n-1}$. Lại có $n! > 3^n$ khi $n \geq 7$. Theo Ví dụ 1.4. Vậy ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 1.45. Với số nguyên $n \geq 2$ ta luôn có $C_n^1 + 2.2C_n^2 + \dots + n2^{n-1}C_n^n = n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}$.

Bài giải: Vì $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \dots + C_n^n x^n$ nên sau khi lấy đạo hàm ta có $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + \dots + nC_n^n x^{n-1}$. Cho $x = 2$ ta nhận được $C_n^1 + 2.2C_n^2 + \dots + n2^{n-1}C_n^n = n3^{n-1}$. Vì $(2x-1)^n = C_n^0(2x)^n - C_n^1(2x)^{n-1} + C_n^2(2x)^{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n$ nên sau khi lấy đạo hàm ta có $2n(2x-1)^{n-1} = 2nC_n^0(2x)^{n-1} - 2(n-1)C_n^1(2x)^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2}2C_n^{n-1}$. Cho $x = 2$ ta nhận được hệ thức dưới đây $n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = n3^{n-1}$.

Tóm lại, ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 1.46. Với số nguyên $n \geq 2$ ta luôn có đồng nhất thức sau: $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

Bài giải: Vì $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n$ nên sau khi lấy đạo hàm có $-n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2x - 3C_n^3x^2 + \dots + (-1)^n nC_n^n x^{n-1}$. Với $x = 1$ có $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

Ví dụ 1.47. Tính tổng $T = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{7^{2k+2}}{2k+2}$.

Bài giải: Tính tích phân $I_n = \int_0^7 x(1+x^2)^n dx$. Đặt $y = 1+x^2$. Khi đó $I_n = \frac{1}{2} \int_1^{50} y^n dy = \frac{1}{2(n+1)} y^{n+1} \Big|_1^{50}$ hay ta có $I_n = \frac{50^{n+1} - 1}{2(n+1)}$. Khai triển $x(1+x^2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k+1}$. Vậy $\frac{50^{n+1} - 1}{2(n+1)} = I_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^7 x^{2k+1} dx = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{7^{2k+2}}{2k+2}$.

Ví dụ 1.48. Tính tổng $T = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{2k+1}$.

Bài giải: Tính tích phân $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ với số nguyên dương n . Sử dụng công thức tính tích phân từng phần ta nhận

được $I_n = x(1-x^2)^n|_0^1 + 2n \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1} dx = -2n(I_n - I_{n-1})$ hay

ta có $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$. Với công thức truy hồi này ta nhận được

$$I_n = \frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n+1)}.$$

Vậy
$$\frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n+1)} = I_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \int_0^1 x^{2k} dx \quad \text{hay}$$

$$\frac{2.4.6 \dots 2n}{3.5.7 \dots (2n+1)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{2k+1}.$$

Ví dụ 1.49. Chứng minh
$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+2} C_n^k = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Bài giải: Tính $I_n = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)}.$

Mặt khác, ta lại có $I_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2k+1} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+2} C_n^k.$ Từ đây suy ra hệ thức
$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+2} C_n^k = \frac{1}{2(n+1)}.$$

1.4.2. Phương pháp hệ phương trình

Đích của mục này là xây dựng một số đồng nhất thức có liên quan đến công thức tổ hợp. Để có những đồng nhất thức mới, ta xét những hệ phương trình tuyến tính nhiều ẩn và giải những hệ ấy. Xây dựng đồng nhất thức liên hệ giữa các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính để từ đó có hệ thức tổ hợp.

Ví dụ 1.50. Giả sử các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ khác nhau đôi một và $\alpha_i + j \neq 0$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Giải hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{1+\alpha_1} + \frac{x_2}{2+\alpha_1} + \dots + \frac{x_n}{n+\alpha_1} = 1 \\ \frac{x_1}{1+\alpha_2} + \frac{x_2}{2+\alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{n+\alpha_2} = 1 \\ \dots \\ \frac{x_1}{1+\alpha_n} + \frac{x_2}{2+\alpha_n} + \dots + \frac{x_n}{n+\alpha_n} = 1. \end{cases}$$

Bài giải: Xét $f(x) = \frac{x_1}{1+x} + \frac{x_2}{2+x} + \dots + \frac{x_n}{n+x} - 1 = \frac{p(x)}{\prod_{i=1}^n (i+x)}$

với đa thức $p(x)$ bậc n . Vì $f(\alpha_i) = 0$ nên $p(\alpha_i) = 0, i = 1, \dots, n$ và như vậy $f(x) = -\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$. Từ $\frac{x_1}{1+x} + \frac{x_2}{2+x} + \dots + \frac{x_n}{n+x} - 1 = -\frac{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}{(x+1)\dots(x+n)}$ ta có

$$\begin{aligned} & x_1(x+2)(x+3)\dots(x+n) + x_2(x+1)(x+3)\dots(x+n) \\ & + x_3(x+1)(x+2)(x+4)\dots(x+n) + x_4(x+1)\dots(x+n) \\ & + \dots \\ & + x_n(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) - (x+1)(x+2)\dots(x+n) \\ & = -(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n). \end{aligned}$$

Ta nhận được các nghiệm $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n (1+\alpha_i)}{(n-1)!} \text{ với } x=-1 \\ x_2 = \frac{(-1)^{n-2} \prod_{i=1}^n (2+\alpha_i)}{1!(n-2)!} \text{ với } x=-2 \\ x_3 = \frac{(-1)^{n-3} \prod_{i=1}^n (3+\alpha_i)}{2!(n-3)!} \text{ với } x=-3 \\ \dots \\ x_n = \frac{(-1)^{n-n} \prod_{i=1}^n (n+\alpha_i)}{(n-1)!} \text{ với } x=-n \end{array} \right.$

và hệ đã được giải xong.

Hệ quả 1.2. Giả sử $\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x+\alpha_i)$. Khi đó ta có các đồng nhất thức

$$(i) \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \varphi(i) = (-1)^n n!.$$

$$(ii) \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i i^n = (-1)^n n!.$$

$$(iii) \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i C_{n+i}^i = (-1)^n.$$

Chứng minh: (i) Từ cách giải trên ta có đồng nhất thức sau đây:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} \varphi(i)}{(x+i)(i-1)!(n-i)!} - 1 = -\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$
 Với
 $x=0$ có $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} \varphi(i)}{i!(n-i)!} - 1 = \frac{(-1)^{n+1} \varphi(0)}{n!}$ hay ta nhận được công
thức $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \varphi(i) = (-1)^n n!$. (Chú ý rằng công thức này cũng đúng
cho cả trường hợp các α_i có thể bằng nhau).

(ii) Công thức $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \varphi(i) = (-1)^n n!$ đúng cho mọi α_i nên khi lấy
 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ta có $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i i^n = (-1)^n n!$.

(iii) Khi lấy $\alpha_i = i$ với mọi i ta có $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i C_{n+i}^i = (-1)^n$.

Ví dụ 1.51. Giả sử các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ khác nhau đôi một và $\alpha_i + j \neq 0$
với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{1+\alpha_1} + \frac{x_2}{2+\alpha_1} + \dots + \frac{x_n}{n+\alpha_1} = \frac{4}{2\alpha_1+1} \\ \frac{x_1}{1+\alpha_2} + \frac{x_2}{2+\alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{n+\alpha_2} = \frac{4}{2\alpha_2+1} \\ \dots \\ \frac{x_1}{1+\alpha_n} + \frac{x_2}{2+\alpha_n} + \dots + \frac{x_n}{n+\alpha_n} = \frac{4}{2\alpha_n+1}. \end{cases}$$

Bài giải: Xét $f(x) = \frac{x_1}{1+x} + \frac{x_2}{2+x} + \dots + \frac{x_n}{n+x} - \frac{4}{2x+1}$. Khi đó

$$f(x) = \frac{p(x)}{(2x+1) \prod_{i=1}^n (i+x)}$$
 với đa thức $p(x)$ bậc $\leq n$. Vì $f(\alpha_i) = 0$ nên

các $p(\alpha_i) = 0$, và có $p(x) = c \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$, $c \in \mathbb{R}$. Như

vậy $f(x) = -\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(2x+1)(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$. Từ phương trình sau:

$$\frac{x_1}{1+x} + \frac{x_2}{2+x} + \dots + \frac{x_n}{n+x} - \frac{4}{2x+1} = \frac{c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(2x+1)(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

ta suy ra đồng nhất thức sau đây

$$\begin{aligned}
 & (1+2x)[x_1(x+2)(x+3)\dots(x+n) + x_2(x+1)(x+3)\dots(x+n) \\
 & + x_3(x+1)(x+2)(x+4)\dots(x+n) + x_4(x+1)(x+2)\dots(x+n) \\
 & + \dots \\
 & + x_n(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)] - 4(x+1)(x+2)\dots(x+n) \\
 & = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n).
 \end{aligned}$$

Ta nhận được nghiệm của hệ

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{c(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n (1+\alpha_i)}{1.(n-1)!} \text{ với } x=-1 \\ x_2 = \frac{c(-1)^{n-2} \prod_{i=1}^n (2+\alpha_i)}{3.1!(n-2)!} \text{ với } x=-2 \\ x_3 = \frac{c(-1)^{n-3} \prod_{i=1}^n (3+\alpha_i)}{5.2!(n-3)!} \text{ với } x=-3 \\ \dots \\ x_n = \frac{c(-1)^{n-n} \prod_{i=1}^n (n+\alpha_i)}{(2n-1).(n-1)!} \text{ với } x=-n \\ c = \frac{-4 \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2}}{(-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i+1}{2}} \text{ với } x = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

và hệ phương trình được giải xong.

Ví dụ 1.52. Giả sử $\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x+\alpha_i)$. Khi đó ta có các đồng nhất thức

$$(i) \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i C_n^i \varphi(i)}{2i-1} = \frac{4n!}{c} + (-1)^n \varphi(0).$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} C_n^i i^n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Bài giải: Xuất phát từ phương trình $\frac{x_1}{1+x} + \frac{x_2}{2+x} + \dots + \frac{x_n}{n+x} - \frac{4}{2x+1} = \frac{c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(2x+1)(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$ ta suy ra (i) khi thay

$x_1, \dots, x_n$ và $x = 0$; còn (ii) được suy ra từ (i).

Ví dụ 1.53. Với số nguyên dương n và số thực $x \notin \{-2n, -n, -2n + 2, -n + 1, \dots, -2, -1, 0\}$ ta luôn có đồng nhất thức dưới đây:

$$(i) \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

$$(ii) \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{x+2k} = \frac{n!2^n}{\prod_{k=0}^n (x+2k)}.$$

Bài giải: Từ việc tách phân thức $\frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{x+k},$

$\frac{n!2^n}{\prod_{k=0}^n (x+2k)} = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{x+2k}$ ta suy ra các kết quả cần chứng minh.

Ví dụ 1.54. Giải hệ phương trình $2n$ ẩn x_k, y_k dưới đây:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{sx_k + y_k}{s^2 + k^2} = \frac{1}{s} \\ s = \pm 1, \dots, \pm n; x_k, y_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Từ đó hãy tính tổng sau: $\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{s=1}^n (s^2 + k^2)}{\prod_{s \neq k} (k^2 - s^2)(1 + k^2)}.$

Bài giải: Xét $f(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{x_k x + y_k}{x^2 + k^2} = \frac{p(x)}{x \prod_{k=1}^n (x^2 + k^2)}$ với đa thức

$p(x)$ có $\leq 2n$. Do bởi $f(s) = 0$ nên $p(s) = 0$ khi $s = \pm 1, \dots, \pm n$, và như vậy dễ dàng có $f(x) = \frac{a(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - n^2)}{x \prod_{k=1}^n (x^2 + k^2)}$. Từ $-\frac{1}{x} +$

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k x + y_k}{x^2 + k^2} = \frac{a(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - n^2)}{x \prod_{k=1}^n (x^2 + k^2)} \text{ ta suy ra hệ thức}$$

$$\begin{aligned} & - (x^2 + 1^2) \dots (x^2 + n^2) + x(x_1 x + y_1)(x^2 + 2^2)(x^2 + 3^2) \dots (x^2 + n^2) \\ & + x(x_2 x + y_2)(x^2 + 1^2)(x^2 + 3^2) \dots (x^2 + n^2) + \dots \\ & + x(x_n x + y_n)(x^2 + 1^2)(x^2 + 2^2) \dots (x^2 + (n-1)^2) \\ & = a(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - n^2). \end{aligned}$$

$$\text{Ta nhận được các nghiệm} \left\{ \begin{array}{l} a = -(-1)^n \text{ với } x=0 \\ -x_1 + iy_1 = \frac{a(-1)^n \prod_{k=1}^n (1^2 + k^2)}{\prod_{k=2}^n (k^2 - 1)} \text{ với } x=i \\ -x_2 + iy_2 = \frac{a(-1)^n \prod_{k=1}^n (2^2 + k^2)}{\prod_{k=1, k \neq 2}^n (k^2 - 2^2)} \text{ với } x=2i \\ \dots \\ -x_n + iy_n = \frac{a(-1)^n \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)}{\prod_{k=1}^{n-1} (k^2 - n^2)} \text{ với } x=ni. \end{array} \right.$$

Như vậy hệ đã được giải xong với $y_1 = \dots = y_n = 0$ và

$$x_r = \frac{\prod_{k=1}^n (r^2 + k^2)}{\prod_{\substack{k=1, k \neq r}}^n (k^2 - r^2)} \text{ với } r = 1, \dots, n. \text{ Vì } -\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{x_k x}{x^2 + k^2} =$$

$$\frac{a(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - n^2)}{x \prod_{k=1}^n (x^2 + k^2)} \text{ nên } \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1 + k^2} = 1 \text{ hay}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n (s^2 + k^2)}{\prod_{s \neq k}^n (k^2 - s^2)(1 + k^2)} = 1 \text{ với } x = 1.$$

Hệ quả 1.3. Ta luôn có $2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} k^2 \prod_{s=1}^n (s^2 + k^2) C_{2n}^{n-k}}{1 + k^2} = (2n)!$.

Chứng minh: Từ $\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{s=1}^n (s^2 + k^2)}{\prod_{s \neq k} (k^2 - s^2)(1 + k^2)} = 1$, theo chứng minh trên, và $\prod_{s \neq k} (k^2 - s^2) = \prod_{s \neq k} (k - s) \prod_{s \neq k} (k + s) = (-1)^{n-k} \frac{(n - k)!(n + k)!}{2k^2}$ suy ra $\sum_{k=1}^n \frac{2k^2 \prod_{s=1}^n (s^2 + k^2)}{(-1)^{n-k} (n - k)!(n + k)!(1 + k^2)} = 1$. Nhân hai vế với $(2n)!$ ta có $2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} k^2 \prod_{s=1}^n (s^2 + k^2) C_{2n}^{n-k}}{1 + k^2} = (2n)!$.

Ví dụ 1.55. Phân tích $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)(x^2 + 2^2) \dots (x^2 + n^2)}$ trên $\mathbb{R}$ thành tổng các phân thức đơn giản. Từ đó hãy tính các tổng dưới đây:

$$(i) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n-k}}{1 + k^2}.$$

$$(ii) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n-k}}{n^2 + k^2}.$$

Bài giải: Biểu diễn qua phân thức đơn giản $f(x) = \frac{a}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k x + b_k}{x^2 + k^2}$.

Từ đây suy ra $f(x) = \frac{1}{(n!)^2 x} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x}{(n + k)!(n - k)!(x^2 + k^2)}$. Cho $x = 1$ ta nhận được $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(n + k)!(n - k)!(1 + k^2)} = \frac{1}{2 \prod_{k=1}^n (1 + k^2)} - \frac{1}{2(n!)^2}$.

Nhân hai vế với $(2n)!$ được $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2n)!}{(n + k)!(n - k)!(1 + k^2)} = \frac{(2n)!}{2 \prod_{k=0}^n (1 + k^2)} +$

$\frac{(2n)!}{2(n!)^2}$ và như vậy ta có $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{2n}{n-k}}{(1 + k^2)} = \frac{(2n)!}{2 \prod_{k=0}^n (1 + k^2)} + \frac{(2n)!}{2(n!)^2}$.

Ta đã có (i).

(ii) Với $x = n$ thay vào biểu diễn trên $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k n}{(n+k)!(n-k)!(n^2+k^2)} = \frac{1}{2n \prod_{k=1}^n (n^2+k^2)} - \frac{1}{2n(n!)^2}$. Nhân hai vế của hệ thức trên với $(2n)!$ ta nhận được $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{2n}{n-k}}{n^2+k^2} = \frac{(2n)!}{2 \prod_{k=0}^n (n^2+k^2)} + \frac{(2n)!}{2n^2(n!)^2}$.

Ví dụ 1.56. Với số tự nhiên dương n luôn luôn có các đồng nhất thức

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{k^2+1} = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (k^2+1)}. \\ \text{(ii)} \quad & \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k k C_{2n}^{n+k}}{k^2+1} = 0. \\ \text{(iii)} \quad & \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{k^2+n^2} = \frac{(2n)!}{n^2 \prod_{k=1}^n (k^2+n^2)}. \\ \text{(iv)} \quad & \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k k C_{2n}^{n+k}}{k^2+n^2} = 0. \end{aligned}$$

Bài giải: Giả sử $\frac{1}{x(x^2-1)(x^2-2^2)\dots(x^2-n^2)} = \sum_{k=-n}^n \frac{a_k}{x-k}$. Khi đó có $a_k = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!(n+k)!}$ với $k = -n, -n+1, \dots, n-1, n$ và ta có biểu diễn $\sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^{n-k} C_{2n}^{n+k}}{x-k} = \frac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-2^2)\dots(x^2-n^2)}$.

$$\begin{aligned} \text{(i) và (ii)} \quad & \text{Với } x = i \text{ có được } \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (k^2+1)} = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{i-k} i = \\ & \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{k^2+1} (1 - ki). \text{ Do vậy } \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{k^2+1} = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (k^2+1)} \end{aligned}$$

$$\text{và } \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k k C_{2n}^{n+k}}{k^2 + 1} = 0.$$

(iii) và (iv). Với $x = ni$ ta nhận được đồng nhất thức dưới đây:

$$\frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)} = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{ni - k} ni = \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{k^2 + n^2} (n^2 - nki). \text{ Vậy}$$

$$\sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k C_{2n}^{n+k}}{k^2 + n^2} = \frac{(2n)!}{n^2 \prod_{k=1}^n (k^2 + n^2)} \text{ và } \sum_{k=-n}^n \frac{(-1)^k k C_{2n}^{n+k}}{k^2 + n^2} = 0.$$

1.4.3. Phương pháp số phức

Ví dụ 1.57. Tính một vài tổng sau đây:

- (i) Tổng $T_1 = 1 + C_n^4 + C_n^8 + \dots$.
- (ii) Tổng $T_2 = C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \dots$.
- (iii) Tổng $T_3 = C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \dots$.
- (iv) Tổng $T_4 = C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \dots$.
- (v) $S = (T_1 - T_3)^2 + (T_2 - T_4)^2$.
- (vi) $P = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2$.

Bài giải: Từ $(1+i)^n = 1 + i C_n^1 - C_n^2 - i C_n^3 + C_n^4 + i C_n^5 - C_n^6 - \dots$ và biểu diễn $(1+i)^n = 2^{n/2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n$ suy ra $T_1 - T_3 = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$ và $T_2 - T_4 = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}$. Vì $2^n = (1+1)^n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ và

$$0 = (1-1)^n = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 \text{ ta suy ra hệ } \begin{cases} T_1 - T_3 = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \\ T_2 - T_4 = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \\ T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2^n \\ T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ được $T_1 = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \right)$, $T_2 = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \right)$, $T_3 = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4} \right)$, $T_4 = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} - 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4} \right)$. Tính được ngay $S = 2^n$ và $P = 2^{2n-2} + 2^{n-1}$.

Ví dụ 1.58. Tính tổng $T = C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + \dots$ và tổng $S = C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^2 + \frac{1}{9} C_n^4 - \frac{1}{27} C_n^6 + \dots$. Từ đó tính tổng $P = \frac{1}{3} T^2 + S^2$.

Bài giải: Từ $(\sqrt{3}+i)^n = \sqrt{3^n} + i C_n^1 \sqrt{3^{n-1}} - C_n^2 \sqrt{3^{n-2}} - i C_n^3 \sqrt{3^{n-3}} + C_n^4 \sqrt{3^{n-4}} + i C_n^5 \sqrt{3^{n-5}} - \dots$ và $(\sqrt{3}+i)^n = 2^n \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^n$ ta suy ra $C_n^1 \sqrt{3^{n-1}} - C_n^3 \sqrt{3^{n-3}} + C_n^5 \sqrt{3^{n-5}} - \dots = 2^n \sin \frac{n\pi}{6}$. Dễ dàng suy ra công thức $T = \frac{2^n}{\sqrt{3^{n-1}}} \sin \frac{n\pi}{6}$. Tương tự, ta nhận được $S = \frac{2^n}{\sqrt{3^n}} \cos \frac{n\pi}{6}$. Từ đây suy ra $P = \frac{1}{3} T^2 + S^2 = \frac{4^n}{3^n}$.

Ví dụ 1.59. Giả sử hai dãy số nguyên (a_n) và (b_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 8, a_2 = 58 \\ a_{n+2} = 8a_{n+1} - 3a_n + 3a_{n-1}, n \geq 2; \\ b_0 = 3, b_1 = 5, b_2 = 45 \\ b_{n+2} = 5b_{n+1} + 10b_n + 7b_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$$

Ta có $\binom{2011}{1} b_{2010} + \dots + \binom{2011}{2010} b_1 = \binom{2011}{1} a_{2010} - \binom{2011}{2} a_{2009} + \dots - \binom{2011}{2010} a_1$.

Bài giải: Đây là bài toán về dãy số nguyên. Nhưng lại xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Xét phương trình $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3x - 3 = 0$. Gọi ba nghiệm của nó trong $\mathbb{C}$ là x_1, x_2, x_3 . Dễ dàng kiểm tra $x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = a_0$, $x_1 + x_2 + x_3 = a_1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_2$, tổng quát $a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \geq 0$. Tương tự $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n, n \geq 0$, trong đó y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của $g(y) = y^3 - 5y^2 - 10y - 7 = 0$. Kiểm tra trực tiếp: $f(y+1) = g(y)$ và $g(x-1) = f(x)$. Vậy ta nhận được các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} a_n &= x_1^n + x_2^n + x_3^n = (y_1 + 1)^n + (y_2 + 1)^n + (y_3 + 1)^n \\ b_n &= y_1^n + y_2^n + y_3^n = (x_1 - 1)^n + (x_2 - 1)^n + (x_3 - 1)^n, n \geq 0. \end{aligned}$$

Do vậy $\begin{cases} a_n = C_n^0 b_n + C_n^1 b_{n-1} + \dots + C_n^{n-1} b_1 + C_n^n b_0 \\ b_n = C_n^0 a_n - C_n^1 a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_1 + (-1)^n C_n^n a_0 \end{cases}$
và có $\binom{2011}{1} b_{2010} + \dots + \binom{2011}{2010} b_1 = \binom{2011}{1} a_{2010} - \binom{2011}{2} a_{2009} + \dots - \binom{2011}{2010} a_1$.

Ví dụ 1.60. Giả sử hai dãy số nguyên (a_n) và (b_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = -6 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 5a_n + a_{n-1}, n \geq 2; \\ b_0 = 3, b_1 = -4, b_2 = -2 \\ b_{n+2} = -4b_{n+1} - 9b_n - 9b_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$$

Khi đó ta có các kết quả sau đây:

- (i) $a_n = C_n^0 b_n + 2C_n^1 b_{n-1} + \dots + 2^{n-1} C_n^{n-1} b_1 + 2^n C_n^n b_0$
 $b_n = C_n^0 a_n - 2C_n^1 a_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} C_n^{n-1} a_1 + (-1)^n 2^n C_n^n a_0.$
- (ii) Tìm số dư của phép chia a_p cho p khi p là số nguyên tố.

Bài giải: (i) Đây là bài toán về dãy số nguyên. Nhưng lại xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Xét phương trình $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$. Gọi ba nghiệm của nó trong $\mathbb{C}$ là x_1, x_2, x_3 . Dễ kiểm tra $x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = a_0$, $x_1 + x_2 + x_3 = a_1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_2$, tổng quát $a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \geq 0$. Tương tự $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n, n \geq 0$, trong đó y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của $g(y) = y^3 + 4y^2 + 9y + 9 = 0$. Kiểm tra trực tiếp: $f(y+2) = g(y)$ và $g(x-2) = f(x)$. Vậy ta nhận được các hệ thức sau đây và suy ra (i):

$$\begin{aligned} a_n &= x_1^n + x_2^n + x_3^n = (y_1 + 2)^n + (y_2 + 2)^n + (y_3 + 2)^n \\ b_n &= y_1^n + y_2^n + y_3^n = (x_1 - 2)^n + (x_2 - 2)^n + (x_3 - 2)^n, n \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) Từ $a_p = x_1^p + x_2^p + x_3^p = (x_1 + x_2 + x_3)^p - \sum_{0 \leq i, j, k < p}^{i+j+k=p} \binom{p}{i, j, k} x_1^i x_2^j x_3^k$. Với bộ ba i, j, k cố định, nhưng hoán vị cho nhau, trong a_p có tổng con $\frac{p!}{i!j!k!} (x_1^i x_2^j x_3^k + x_1^i x_2^k x_3^j + x_1^j x_2^i x_3^k + x_1^j x_2^k x_3^i + x_1^k x_2^j x_3^i + x_1^k x_2^i x_3^j)$ là đa thức đối xứng của x_1, x_2, x_3 . Tổng này được viết thành đa thức với hệ số nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 5$ và $x_1 x_2 x_3 = 1$. Vậy $\sum_{0 \leq i, j, k < p}^{i+j+k=p} \binom{p}{i, j, k} x_1^i x_2^j x_3^k$ là số nguyên chia hết cho p . Do đó $a_p \equiv 2^p \pmod{p}$. Nếu $p = 2$ thì $a_2 = -6$ chia hết cho 2 và dư bằng 0. Nếu $p > 2$ thì $a_p \equiv 2^p \equiv 2 \pmod{p}$. Vậy dư bằng 2.

Ví dụ 1.61. Tính tổng $T = \sum_{k=0}^{3n-1} (-1)^k \binom{6n}{2k+1} 3^k$ và $S = \sum_{k=0}^{3n} (-1)^k \binom{6n}{2k} 3^k$ với số nguyên dương n .

Bài giải: Đây là bài toán tính tổng các số nguyên. Xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Biểu diễn tổng $S + i\sqrt{3}T$. Từ những đồng nhất thức dưới đây: $(1 + i\sqrt{3})^{6n} = 2^{6n} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{6n} = 2^{6n} (\cos n2\pi + i \sin n2\pi) = 2^{6n}$ suy ra $2^{6n} = (1 + i\sqrt{3})^{6n} = \sum_{k=0}^{3n} (-1)^k \binom{6n}{2k} 3^k + i \sum_{k=0}^{3n-1} (-1)^k \binom{6n}{2k+1} 3^k$. Do vậy $S = 2^{6n}$ và $T = 0$.

1.4.4. Phương pháp song ánh

Ví dụ 1.62. [Olympic toán châu Á - Thái Bình Dương lần thứ 10 năm 1997] *Giả sử F là tập hợp tất cả các bộ $(A_1, A_2, \dots, A_k)$, trong đó $A_i (i = 1, 2, \dots, k)$ là một tập hợp con của tập $(1, 2, 3, \dots, 1998)$. Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A .*

$$\text{Hãy tính } S = \sum_{(A_1, A_2, \dots, A_k) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| \quad (1)$$

Bài giải: Để tránh nhầm lẫn, ta gọi F là F_k và S là S_k . Gọi $T(i, k)$ là số các cặp $(A_1, A_2, \dots, A_k) \in F_k$ sao cho $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = i$. Ta tính S_k thông qua việc tính $T(i, k)$. Với i phần tử $n_1, n_2, \dots, n_i$ thuộc $\{1, 2, \dots, n\}$ ta đếm xem có bao nhiêu bộ $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ thỏa mãn điều kiện $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \{n_1, n_2, \dots, n_i\}$ (2), từ đó tính được $T(i, k)$ và S_k .

Ta cho các phần tử $n_1, n_2, \dots, n_i$ "đăng kí" có mặt trong các tập A_i theo quy tắc: nếu, chẳng hạn n_1 đăng kí có mặt trong A_1, A_2 và không có mặt trong các tập còn lại thì phiếu đăng kí ghi là $(1, 1, 0, \dots, 0)$, còn nếu n_1 chỉ có mặt trong A_k thì ghi phiếu là $(0, 0, \dots, 1)$. Phiếu đăng kí là hợp lệ nếu có ít nhất một số 1 (nếu không phần tử tương ứng sẽ không có mặt trong $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$). Với i phiếu đăng kí của $n_1, n_2, \dots, n_i$ ta lập được bộ $(A_1, A_2, \dots, A_k)$. Dễ thấy rằng với hai bộ phiếu đăng kí khác nhau, ta có hai bộ tập hợp $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ khác nhau và như thế số bộ $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ thỏa mãn (2) bằng số bộ phiếu đăng kí hợp lệ. Vì phiếu đăng kí của $n_p, p = 1, 2, \dots, i$ gồm k số 0 hoặc 1 và phải có ít nhất một số 1 nên n_p có $(2^k - 1)^i$ bộ phiếu đăng kí hợp lệ khác nhau.

Cuối cùng, chú ý rằng có C_n^i cách chọn i phần tử từ n phần tử nên ta có $T(i, k) = C_n^i (2^k - 1)^i$ và từ đây suy ra $S_k = n (2^k - 1) 2^{k(n-1)}$.

Ở đây thực tế đã xây dựng một song ánh từ tập F_k vào tập hợp $G = \{(r_1, r_2, \dots, r_n)\}$, r_i là các xâu nhị phân độ dài k và tổng cần tính bằng

$$\sum_{(r_1, r_2, \dots, r_n) \in G} d(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

với $d(r_1, r_2, \dots, r_n)$ là số các xâu r_i khác $(0, 0, \dots, 0)$.

Ví dụ 1.63. [Vô địch Ucraina 1996] Gọi M là số tất cả các số nguyên dương viết trong hệ thập phân có n chữ số 1, n chữ số 2 và không có một chữ số nào khác. Gọi N là số tất cả các số viết trong hệ thập phân có n chữ số, chỉ chứa các chữ số 1, 2, 3, 4 và có số các số 1 bằng số các số hai. Chứng minh rằng $M=N$.

Bài giải: Chúng ta không mấy khó khăn để xây dựng một song ánh từ tập hợp thứ hai vào tập hợp thứ nhất: Số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 và các chữ số 1 bằng các chữ số 2 được "nhân đôi" thành số có $2n$ chữ số theo quy tắc sau: Đầu tiên hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có $2n$ chữ số, sau đó các chữ số 3 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 1, chữ số 3 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 2. Tương tự, các chữ số 4 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 2, còn chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1. Ví dụ với $A = 123412$ ($n = 6$) ta lần lượt có các phép biến đổi $1234142 \rightarrow 12341421234142 \rightarrow 12121221221112$.

Như thế, ta thu được một số có đúng n chữ số 1 và n chữ số 2. Rõ ràng đây là một đơn ánh. Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau: Với một số có n chữ số 1 và n chữ số 2, ta cắt n chữ số đầu và n chữ số cuối và đặt chúng song song với nhau khi thực hiện phép cộng. Thực hiện phép "cộng" theo quy tắc $1 + 1 = 1, 2 + 2 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 1 = 4$, ta sẽ thu được một số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 với các chữ số 1 bằng số các chữ số 2.

Ví dụ với $B = 112121222211$

112121

222211

332341

Và như thế song ánh giữa hai tập hợp đã được thiết lập và ta có $M = N$. Điều đáng chú ý là nhờ bài toán này, chúng ta dễ dàng tính được $N = M = C_{2n}^n$. Thế nhưng nếu xét bài toán một cách riêng biệt, tức là đặt vấn đề tính số N tất cả các số có n chữ số, chỉ chứa các chữ số 1, 2, 3, 4 trong biểu diễn thập phân và có các số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2 thì đây sẽ là một bài toán không đơn giản. Hướng giải truyền thống trong trường hợp này sẽ như sau: Giả sử i là số các chữ số 1 và chữ số 2 ($i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Có $C_n^i C_{n-1}^i$ cách chọn vị trí cho i chữ số 1 và i chữ số 2 này. Còn lại $n-2i$ vị trí trống có thể đặt 3 hay 4 tùy ý. Như vậy có tất cả 2^{n-2i} cách đặt cho $n-2i$ vị trí còn lại. Vậy $N = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^i C_{n-1}^i 2^{n-2i}$ và việc biến đổi biểu thức trên đây về dạng rút gọn tường minh C_{2n}^n không phải là vấn đề đơn giản.

Trong ví dụ trên, thực tế là chúng ta đã chứng minh được một đẳng thức khá thú vị: $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^i C_{n-1}^i 2^{n-2i} = C_{2n}^n$. Nếu chứng minh công thức trên bằng phương pháp biến đổi đại số (ví dụ quy nạp) thì sẽ khá phức tạp và rắc rối, thế nhưng bằng cách xây dựng tương ứng nói trên, ta thấy hai vế bằng nhau vì đều là số phần tử của cùng một tập hợp. Phép chứng minh các đẳng thức như thế được gọi là phương pháp chứng minh bằng giải tích tổ hợp và ý tưởng chung của phương pháp đó là dùng phương pháp khác nhau để tính số phần tử của cùng một tập hợp, từ đó suy ra hai kết quả thu được (thường ở dạng rút gọn) bằng nhau. Dưới đây chúng ta xét thêm một ví dụ nữa về "kiểu" chứng minh này.

Ví dụ 1.64. [Đề thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 29-1987] Gọi $p_n(k)$ là số các hoán vị của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$

Bài giải: Tính tất cả các cặp (x, s) trong đó s là hoán vị với x làm điểm cố định. Với mỗi giá trị của x , ta có $(n-1)!$ hoán vị s nhận x làm điểm cố định, và do đó có tất cả $n!$ cặp như vậy. Nhưng nếu chúng ta tính số cặp (x, s) theo s thì sẽ được tổng bên trái, vì với mỗi k , $0 \leq k \leq n$, có $p_n(k)$ hoán vị với k điểm cố định và ứng với mỗi một hoán vị s này

ta có k cặp (x, s) khác nhau.

Qua các ví dụ trên, ta có thể thấy rằng phương pháp song ánh có thể áp dụng rất hiệu quả trong lý thuyết giải tích tổ hợp, nhất là trong các bài toán tính toán tổ hợp, cũng như việc thiết lập các đẳng thức liên quan đến các số tổ hợp.

Chương 2

Một vài biểu diễn qua tổ hợp

Trong chương này chúng tôi tập trung trình bày một số ứng dụng của tổ hợp để biểu diễn một vài bài toán.

2.1. Định lý Hilbert và Định lý Cantor về biểu diễn số

Định lý 2.1. [Hilbert] Cho số nguyên dương $d > 1$. Khi đó mỗi số nguyên dương n đều có thể biểu diễn duy nhất thành tổng $n = \binom{h_d}{d} + \binom{h_{d-1}}{d-1} + \dots + \binom{h_1}{1}$, ở đó các số nguyên không âm h_i thỏa mãn $h_d > h_{d-1} > \dots > h_1 \geq 0$.

Chứng minh: Sự tồn tại duy nhất của biểu diễn: Trước tiên ta quy ước $\binom{r}{s} = 0$ khi $r < s$. Giả thiết n là số nguyên dương. Ta chọn h_d là số nguyên dương lớn nhất sao cho $\binom{h_d}{d} \leq n$. Nếu $n = \binom{h_d}{d}$ thì ta chọn $h_i = i - 1$ với $i = 1, \dots, d - 1$. Nếu $n' = n - \binom{h_d}{d} > 0$ thì ta sử dụng giả thiết quy nạp để có thể coi $n' = \sum_{i=1}^{d-1} \binom{h_i}{i}$ với $h_{d-1} > h_{d-2} > \dots > h_1 \geq 0$. Ta còn phải chỉ ra $h_d > h_{d-1}$. Theo cách chọn cho h_d ta có $\binom{h_d}{d-1} = \binom{h_d+1}{d} - \binom{h_d}{d} > n' \geq \binom{h_{d-1}}{d-1}$. Vậy $h_d > h_{d-1}$.

Tính chất duy nhất của biểu diễn được chứng minh bằng quy nạp theo n . Chúng ta biết rằng nếu $n = \sum_{i=1}^d \binom{h_i}{i}$ với $h_d > h_{d-1} > \dots > h_1 \geq 0$ thì h_d là số lớn nhất thỏa mãn $\binom{h_d}{d} \leq n$. Thật vậy, với $n = 1$, kết luận đúng. Giả sử kết luận đúng cho $n - 1$. Với $n > 1$ và $\binom{h_d+1}{d} \leq n$. Khi đó $\sum_{i=1}^{d-1} \binom{h_i}{i} \geq \binom{h_d+1}{d} - \binom{h_d}{d} = \binom{h_d}{d-1} \geq \binom{h_{d-1}+1}{d-1}$. Như vậy $\sum_{i=1}^{d-1} \binom{h_i}{i} \geq \binom{h_{d-1}+1}{d-1}$ và h_{d-1} là số nguyên thỏa mãn $\sum_{i=1}^{d-1} \binom{h_i}{i} \geq \binom{h_{d-1}}{d-1}$. Từ điều mâu thuẫn này suy ra sự biểu diễn là duy nhất.

Ví dụ 2.1. Với mỗi cặp số nguyên dương m, k , số m luôn có sự biểu diễn duy nhất trong dạng $m = \binom{h_k}{k} + \binom{h_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{h_r}{r}$, ở đó các số

nguyên không âm h_i thỏa mãn $h_k > h_{k-1} > \dots > h_r \geq r \geq 1$.

Ví dụ 2.2. Với mỗi cặp số nguyên dương m, k , ta luôn có biểu diễn duy nhất $k^m = \sum_{r=1}^m a_{r,m} C_k^r$ với các hệ số nguyên $a_{r,m}$ và $\sum_{k=1}^n k^m = \sum_{r=1}^m C_{n+1}^{r+1} a_{r,m}$. Tìm $a_{r,m}$.

Bài giải: Tồn tại biểu diễn duy nhất $k^m = \sum_{r=1}^m a_{r,m} C_k^r$ theo Định lý 2.1. Ta có $\sum_{k=1}^n k^m = \sum_{r=1}^m a_{r,m} \sum_{k=r}^n C_k^r$. Vậy $\sum_{k=1}^n k^m = \sum_{r=1}^m C_{n+1}^{r+1} a_{r,m}$. Ta có $a_{r,m} = \sum_{i=1}^r (-1)^{r+i} C_r^i i^m$.

Định lý 2.2. [Cantor] Mỗi số nguyên dương a đều có thể biểu diễn một cách duy nhất thành tổng $a = a_n n! + a_{n-1} (n-1)! + \dots + a_2 2! + a_1 1!$, ở đó các a_i nguyên với $0 \leq a_i \leq i$ và $a_n > 0$.

Chứng minh: Ký hiệu $p_n = n!$. Khi đó $1p_1 + 2p_2 + \dots + np_n = p_{n+1} - 1$. Giả sử $a = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n$ với $a_n \neq 0$ và $0 \leq a_k \leq k, k = 1, \dots, n$. Ta thấy ngay $b = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_{n-1} p_{n-1} \leq 1p_1 + 2p_2 + \dots + (n-1)p_{n-1} = p_n - 1$. Do đó $b < p_n$. Mặt khác $p_n \leq a_n p_n \leq np_n$. Tóm lại, ta có $p_n \leq a_n p_n \leq a < p_{n+1}$. Vậy, cho mỗi số tự nhiên a có thể tìm thấy duy nhất một số tự nhiên n để $p_n \leq a < p_{n+1}$. Từ bất đẳng thức này suy ra tồn tại đúng một số a_n để $a_n p_n \leq a < (a_n + 1)p_n$. Từ đây ta suy ra $a = a_n p_n + b$ với $0 \leq b < p_n$. Lặp lại quá trình trên đối với b . Từ đó suy ra sự biểu diễn $a = a_n n! + a_{n-1} (n-1)! + \dots + a_2 2! + a_1 1!$, ở đó các a_i nguyên với $0 \leq a_i \leq i$ và $a_n > 0$. Tính duy nhất là hiển nhiên.

Định lý 2.3. Mỗi số hữu tỷ $a \in (0; 1)$ đều có thể biểu diễn một cách duy nhất thành tổng $a = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!}$, ở đó các b_i nguyên với $0 \leq b_i \leq i$ với mọi i và $b_n \neq 0$.

Chứng minh: Bước 1: Chia đoạn $[0; 1]$ ra làm hai đoạn bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn bằng $\frac{1}{2!}$. Bước 2: Chia mỗi đoạn nhỏ này ra ba phần bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn bằng $\frac{1}{3!}$. Tiếp tục như vậy, bước thứ n :

Chia mỗi đoạn có được từ bước thứ $n - 1$ ra làm $n + 1$ đoạn bằng nhau. Độ dài mỗi đoạn bằng $\frac{1}{(n+1)!}$. Chú ý: Nếu $a = \frac{s}{n+1}$ là phân số tối giản thì ta viết $a = \frac{s \cdot n!}{(n+1)!}$. Giả sử $a = \frac{m}{(n+1)!}$ với m không chia hết cho $n + 1$. Xét bước thứ n để có đoạn với độ dài bằng $\frac{1}{(n+1)!}$. Khi đó tồn tại số nguyên dương a_n để $\frac{a_n}{n!} < a = \frac{m}{(n+1)!} < \frac{a_n + 1}{n!}$. Gọi số nguyên dương b_n thỏa mãn $a = \frac{m}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{b_n}{(n+1)!}$. Lặp lại quá trình trên cho số $\frac{a_n}{n!}$ ta nhận được biểu diễn $\frac{a_n}{n!} = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_{n-1}}{n!}$. Tóm lại $a = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_n}{(n+1)!}$, ở đó các b_i nguyên với $0 \leq b_i \leq i$ với mọi i và $b_n \neq 0$.

Từ Định lý 2.2 và Định lý 2.3 ta suy ra ngay kết quả dưới đây:

Ví dụ 2.3. Mỗi số hữu tỷ dương a đều có thể biểu diễn thành tổng $a = a_n n! + a_{n-1} (n-1)! + \dots + a_2 2! + a_1 1! + \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \dots + \frac{b_m}{(m+1)!}$, ở đó các a_i nguyên với $0 \leq a_i \leq i$, $a_n > 0$ và các b_i nguyên với $0 \leq b_i \leq i$.

Ví dụ 2.4. Với số nguyên $n \geq 2$ xét $p_n(x) = \binom{n}{2} + \binom{n}{5}x + \dots + \binom{n}{3k+2}x^k$ với phần nguyên $k = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$. Khi đó

$$(i) \quad p_{n+3}(x) = 3p_{n+2}(x) - 3p_{n+1}(x) + (x+1)p_n(x).$$

$$(ii) \quad \text{Tìm tất cả các số nguyên } a \text{ để } 3^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \text{ chia hết } p_n(a^3) \text{ với mọi } n \geq 3.$$

Bài giải: (i) suy từ $\binom{n+3}{3m+2} = 3\binom{n+2}{3m+2} - 3\binom{n+1}{3m+2} + \binom{n}{3m+2} + \binom{n}{3m-1}$.
(ii) Nếu a thỏa mãn đầu bài thì $p_5(a^3) = 10 + a^3$ chia hết cho 9. Vậy $a \equiv -1 \pmod{3}$. Ngược lại, nếu $a \equiv -1 \pmod{3}$ thì $a^3 + 1 \equiv 0 \pmod{9}$.
Vì $p_2(a^3) = 1$, $p_3(a^3) = 3$ và $p_4(a^3) = 6$ nên từ (i) ta suy ra $3^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ chia hết $p_n(a^3)$ với mọi $n \geq 3$.

2.2. Khai triển đa thức

Định nghĩa hệ số tổ hợp đa thức thuần nhất dưới đây như một sự tổng quát cho tổ hợp và khai triển Nhị thức Newton.

Định nghĩa 2.1. Với số nguyên dương n và k , số $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$, trong đó các $r_i \in \mathbb{N}$ và $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$, được gọi là một hệ số tổ hợp đa thức thuần nhất

Trước tiên ta nêu ra một vài kết quả sau được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Mệnh đề 2.1. $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}}{r_k}$.

Mệnh đề 2.2. $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} = \binom{n-1}{r_1-1, r_2, \dots, r_k} + \binom{n-1}{r_1, r_2-1, \dots, r_k} + \dots + \binom{n-1}{r_1, r_2, \dots, r_{k-1}}$, trong đó tất cả các r_i nguyên dương $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.

Định lý sau đây còn được gọi là khai triển đa thức thuần nhất bậc n .

Định lý 2.4. Công thức khai triển cho $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ như sau $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$, trong đó tổng lấy theo tất cả các $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$ với $r_1 + \dots + r_k = n$.

Chứng minh: Ta chứng minh kết quả bằng phương pháp quy nạp theo n . Với $n = 1$ công thức hiển nhiên đúng. Giả sử công thức đúng với n . Ta chỉ ra nó đúng với $n + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_k)^{n+1} &= (x_1 + \dots + x_k)^n (x_1 + \dots + x_k) \\ &= \sum_{r_1 + r_2 + \dots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k} (x_1 + \dots + x_k) \\ &= \sum_{r_1^* + \dots + r_k^* = n+1} \left[\frac{n!}{(r_1^* - 1)! r_2^* \dots r_k^*!} + \frac{n!}{r_1^* (r_2^* - 1)! \dots r_k^*!} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{n!}{r_1^* \dots (r_k^* - 1)!} \right] x_1^{r_1^*} \dots x_k^{r_k^*}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } (x_1 + \dots + x_k)^{n+1} &= \sum_{r_1^* + \dots + r_k^* = n+1} \frac{n!(n+1)}{r_1^*! \dots r_k^*!} x_1^{r_1^*} \dots x_k^{r_k^*} \text{ hay} \\ &= \sum_{r_1^* + \dots + r_k^* = n+1} \frac{(n+1)!}{r_1^*! \dots r_k^*!} x_1^{r_1^*} \dots x_k^{r_k^*}, \text{ trong đó tổng lấy theo } r_1^*, \dots, r_k^* \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

với $\sum_{i=1}^k r_i^* = n + 1$. Vậy ta suy ra công thức đúng với $n + 1$. Tóm lại, công thức đúng với mọi n .

Ví dụ 2.5. Với bất kì số nguyên dương k luôn có đồng nhất thức $k^n = \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_k = n \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$, trong đó tổng lấy theo tất cả các $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$ với $r_1 + \dots + r_k = n$.

Bài giải: Ta có $k^n = (1 + 1 + \dots + 1)^n = \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$ theo Định lý 2.4.

Chú ý 2.1. Khi $k = 2$ ta nhận được đồng nhất thức Newton $(x_1 + x_2)^n = \sum_{r_1 + r_2 = n} \binom{n}{r_1, r_2} x_1^{r_1} x_2^{r_2}$. Từ đó ta suy ra được đồng nhất thức Vandermonde $\binom{m}{0} \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \binom{n}{k-1} + \dots + \binom{m}{k} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}$.

Hệ quả 2.1. Số các số hạng trong khai triển $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ hay số đơn thức bậc n đúng bằng $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Chứng minh: Số các số hạng trong khai triển $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ đúng bằng số đơn thức khác nhau $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$ xuất hiện trong khai triển. Số đó đúng bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình $r_1 + \dots + r_k = n$. Vậy số đó bằng $\binom{n+k-1}{k-1}$ theo Bổ đề 1.1. Sử dụng kết quả này vào việc xét chỉnh hợp với tần số lặp. Một phần tử x_i của một dãy k phần tử cho trước $x_1 x_2 \dots x_k$ được gọi là có tần số lặp r_i nếu nó xuất hiện trong dãy đúng r_i lần. Ký hiệu $T(r_1, r_2, \dots, r_k)$ là số các dãy có lặp $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ với độ dài của dãy là $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ các phần tử của một tập $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ với k phần tử cho trước sao cho trong mỗi dãy phải có phần tử thứ i xuất hiện đúng r_i lần.

Mệnh đề 2.3. Tập A với k phần tử cho trước. Số các dãy k phần tử có lặp $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ với độ dài của dãy là $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ là $T(r_1, r_2, \dots, r_k) = \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$.

Chứng minh: Số các dãy k phần tử có lặp $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ với độ dài của dãy là $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ chính là hệ số của đơn thức $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$ trong khai triển $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$. Vậy $T(r_1, r_2, \dots, r_k) = \binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$.

Ví dụ 2.6. Giả sử có bảng chữ cấu tạo chỉ với 3 chữ cái a, b, c . Tìm số các từ bao gồm n chữ mà trong đó có chứa một số chẵn chữ cái a .

Bài giải: Nếu trong chữ có $2r$ chữ cái a thì ta có thể đặt theo C_n^{2r} cách; còn trong $n - 2r$ vị trí còn lại ta có 2^{n-2r} cách đặt cho b và c . Tóm lại, có $C_n^{2r} 2^{n-2r}$ cách. Tất cả sẽ là $\sum_{r=0}^n C_n^{2r} 2^{n-2r}$. Từ $(1+x)^n + (1-x)^n = 2 \sum_{r=0}^n C_n^{2r} x^{2r}$ ta suy ra $\sum_{r=0}^n C_n^{2r} 2^{n-2r} = \frac{2^n}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n \right] = \frac{3^n + 1}{2}$.

Định nghĩa 2.2. Một phép chia tập V thành k phần là một k -kiểu các tập con $(A_1, A_2, \dots, A_k)$, trong đó có thể một vài tập con là tập rỗng, thỏa mãn hai điều kiện:

- (i) $V = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$.
- (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i, j, i \neq j$.

Ví dụ 2.7. Giả sử $|V| = n$ và $|A_j| = r_j$ với mọi j . Khi đó số phép chia kiểu $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ của tập V đúng bằng $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$.

Bài giải: Vì có $\binom{n}{r_1}$ cách chọn cho A_1 , $\binom{n-r_1}{r_2}$ cách chọn để có $A_2, \dots$, và $\binom{n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}}{r_k}$ để có A_k . Do đó số phép chia kiểu $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ của tập V đúng bằng $\binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \dots \binom{n-r_1-r_2-\dots-r_{k-1}}{r_k}$ và như vậy đúng bằng $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$ theo Mệnh đề 2.1.

Ví dụ 2.8. Tìm số các bộ bốn (x_1, x_2, x_3, x_4) các số nguyên dương lẻ thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2010$.

Bài giải: Mỗi x_i được thay bằng $2y_i + 1$ với y_i nguyên không âm. Khi đó $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1003$. Vậy số các bộ bốn cần tìm bằng $N_4(1003) = \binom{1006}{3}$ theo Bổ đề 1.1.

2.3. Sử dụng chỉ số và công thức chuyển đổi ngược

Mục này trình bày cách sử dụng ký hiệu hình thức khi xét bài toán sơ cấp. Trước tiên ta sử dụng ký hiệu hình thức trong chứng minh công thức chuyển đổi ngược sau đây.

Định lý 2.5. Giả sử $f(k)$ và $g(k)$ là những hàm số học thỏa mãn điều kiện $f(n) = \sum_{k=0}^n C_n^k g(k)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$$g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(k).$$

Chứng minh: Ký hiệu hình thức $f(k)$ và $g(k)$ qua f^k và g^k tương ứng. Khi đó $f^n = \sum_{k=0}^n C_n^k g^k$ hay $f^n = (g+1)^n$ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}$. Vậy $(f+x)^n = (g+1+x)^n, \forall x$. Nhớ sau khi khai triển ở hai vế sẽ viết f_k và g_k thay cho những f^k và g^k . Với $x = -1$ ta nhận được $g^n = (f-1)^n$ hay $g^n = (-1)^n (1-f)^n$. Do vậy $g(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(k)$.

Ví dụ 2.9. Cho dãy Fibonacci $F_0 = F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 1$. Chứng minh rằng $F_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (F_{2j} - 1)$.

Bài giải: Với $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ có $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_2^{n+1} - x_1^{n+1})$. Khi đó $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} F_j = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x_2^{j+1} - x_1^{j+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} [x_2(1+x_2)^n - x_1(1+x_1)^n] = \frac{1}{\sqrt{5}} [x_2 x_2^{2n} - x_1 x_1^{2n}]$ vì $1+x_2 = x_2^2, 1+x_1 = x_1^2$. Từ đây suy ra $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} F_j = \frac{1}{\sqrt{5}} (x_2^{2n+1} - x_1^{2n+1}) = F_{2n}$. Theo Định lý 2.5, ta nhận được $F_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} g(j) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} F_{2j}$ và $f(j) = F_j, g(n) = F_{2n}$. Vì $F_0 = 1 = - \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j}$ nên $F_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (F_{2j} - 1)$.

Ví dụ 2.10. Xét dãy số Lucas $L_0 = 2, L_1 = 1$ và $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ với $n \geq 1$. Khi đó ta có

$$(i) \quad L_n = x_1^n + x_2^n \text{ với } x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$(ii) \quad L_{2n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_j.$$

$$(iii) \quad L_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (L_{2j} - 2).$$

Bài giải: (i) Bằng phương pháp quy nạp theo n , với $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ta có biểu diễn $L_n = x_2^n + x_1^n$.

(ii) Vì $1 + x_2 = x_2^2$, $1 + x_1 = x_1^2$ nên ta có thể biến đổi như dưới đây:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_j &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x_2^j + x_1^j) = (1 + x_2)^n + (1 + x_1)^n \\ &= x_2^{2n} + x_1^{2n} = L_{2n}. \end{aligned}$$

Vậy có công thức $L_{2n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} L_j$.

(iii) Theo Định lý 2.5, được $L_n = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} g(j) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} L_{2j}$ với

$f(j) = L_j$, $g(n) = L_{2n}$. Vì $L_0 = 2 = -2 \sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j}$ nên chúng ta dễ

dễ dàng suy ra được công thức $L_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (L_{2j} - 2)$.

Ví dụ 2.11. Cho dãy $(D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!)$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng $n! = 1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} D_k$ với mọi $n \geq 2$.

Bài giải: Ta có $(-1)^n D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{n-k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k!$

với $n \geq 1$. Đặt $f_k = (-1)^k D_k$ và $g_k = (-1)^k k!$. Khi đó $f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k$.

Theo Định lý 2.5, ta nhận được $g_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k = \sum_{k=0}^n (-1)^n \binom{n}{k} D_k$

hay $(-1)^n n! = \sum_{k=0}^n (-1)^n \binom{n}{k} D_k$. Vì $D_0 = 1$ theo quy ước $D_1 = 0$ nên

$$n! = 1 + \sum_{k=2}^n (-1)^n \binom{n}{k} D_k.$$

Ví dụ 2.12. Đặt $a_n = 1^n + 2^n + \dots + m^n$, $n, m \in \mathbb{N}^+$. Khi đó

$$a_n = \frac{m+1}{n+1} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{n+1}{j+1} [(m+1)^j - 1].$$

Bài giải: Ta có $(x+1)^{n+1} - x^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^{n+1-j}$. Cho $x = 1, \dots, m$, cộng tất cả lại, được $(m+1)^{n+1} - 1 = (n+1) \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \binom{n}{j} a_{n+1-j} \right] + m$.
 Vậy $\frac{(m+1)^{n+1} - (m+1)}{n+1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n+1-j} a_j$. Theo Định lý 2.5, với $f(j) = \frac{a_j}{n+1-j}$, $g(n) = \frac{(m+1)^{n+1} - (m+1)}{n+1}$ ta có $a_n = f(n) = \frac{m+1}{n+1} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{n+1}{j+1} [(m+1)^j - 1]$.

Ví dụ 2.13. Tính số các phép thế f của n phần tử, trong đó không có phần tử nào cố định, có nghĩa: $f(i) \neq i$.

Bài giải: Gọi số các phép thế như vậy là q_n . Đặt $p_n = n!$ là số tất cả các phép thế của n phần tử. Xét tất cả các phép thế trong p_n , trong đó có q_n phép thế không có phần tử nào chiếm lại vị trí xuất phát của mình. Số các phép thế trong đó có đúng một phần tử chiếm lại vị trí xuất phát của mình bằng $C_n^1 q_{n-1}$. Tương tự, số các phép thế trong đó có đúng hai phần tử chiếm lại vị trí xuất phát của mình bằng $C_n^2 q_{n-2}$, v.v... Cuối cùng, số các phép thế trong đó có tất cả các phần tử chiếm lại vị trí xuất phát của mình bằng $C_n^n q_0 = 1$. Vậy $p_n = \sum_{k=0}^n C_n^k q_{n-k}$. Theo Định lý 2.5, ta có $q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k p_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k!$.

Ví dụ 2.14. Xét ma trận vuông cấp n là

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

với tất cả các phần tử thuộc $\mathbb{R}$ và $a_{kk} = 0, k = 1, 2, \dots, n$, còn $a_{ij} \neq 0$ khi $i \neq j$. Xác định số các số hạng khác 0 trong khai triển định thức $\det(A)$.

Bài giải: Hiển nhiên $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$ có $n!$ số hạng trong đó S_n là nhóm đối xứng. Vì $a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n} = 0$ khi

và chỉ khi có ít nhất một k để $\pi(k) = k$ nên số các số hạng khác 0 trong khai triển định thức $\det(A)$ đúng bằng $q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k!$ theo Ví dụ 2.13.

Ví dụ 2.15. Có bao nhiêu cách xếp n chữ cái khác nhau vào r ô sao cho ở mỗi ô có ít nhất một chữ cái.

Bài giải: Số cách xếp n chữ cái khác nhau vào r ô đúng bằng số ánh xạ từ tập n phần tử vào tập r phần tử và số đó đúng bằng r^n . Ký hiệu số cách xếp n chữ cái vào r ô sao cho mỗi ô có ít nhất một chữ cái q_n . Trong số r^n cách xếp ở phần đầu, ta xét những cách xếp để mỗi ô có ít nhất một chữ cái. Số cách xếp là q_n . Sau đó xét tất cả các cách xếp trong đó có một và chỉ một ô trống. Số đó bằng $C_r^1 q_{r-1}$. Tiếp theo xét tất cả các cách xếp trong đó có đúng hai ô trống. Số đó bằng $C_r^2 r q_{r-2}$, v. v... Vậy $r^n + 1 = C_r^0 q_r + C_r^1 q_{r-1} + \dots + C_r^{r-1} q_1 + C_r^r q_0$. Theo Định lý 2.5, $q_r = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_r^k [(r-k)^n + 1] = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_r^k (r-k)^n$ vì $\sum_{k=0}^r (-1)^k C_r^k = (1-1)^r = 0$.

Với cùng cách thức chuyển đổi ngược, xét bài thi vô địch quốc tế sau:

Ví dụ 2.16. Ký hiệu $p_n(k)$ là số các phép thế của tập gồm n phần tử, trong đó có đúng k phần tử cố định. Chứng minh $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$ [IMO 1987] và $\sum_{k=0}^n (k-1)^2 p_n(k) = n!$.

Bài giải: Hiển nhiên $k p_n(k) = k C_n^k q_{n-k} = n C_{n-1}^{k-1} q_{n-1-(k-1)}$. Từ quan hệ $p_{n-1} = C_{n-1}^0 q_{n-1} + C_{n-1}^1 q_{n-2} + \dots + C_{n-1}^{n-1} q_0$ ta suy ra hệ thức sau $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = \sum_{k=0}^n k C_n^k q_{n-k} = n(n-1)! = n!$. Ta có $(k-1)^2 p_n(k) = (k-1)^2 C_n^k q_{n-k}$. Xét quan hệ đa thức dưới đây: $(p+x)^n = (q+1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (x+1)^k q^{n-k}$. Lấy đạo hàm hai vế, được $n(p+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k (x+1)^{k-1} q^{n-k}$. Vậy $n(p+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n (k-1) C_n^k (x+1)^{k-1} q^{n-k} + \sum_{k=1}^n C_n^k (x+1)^{k-1} q^{n-k}$. Lấy đạo hàm hai vế và cho $x = 0$ ta

sẽ nhận được hệ thức sau đây:

$$\begin{aligned}
 n! &= \sum_{k=2}^n (k-1)^2 C_n^k q^{n-k} + \sum_{k=2}^n (k-1) C_n^k q^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n (k-1)^2 n p_n(k) - q_n + \sum_{k=2}^n (k-1) C_n^k q^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n (k-1)^2 n p_n(k) + \sum_{k=0}^n k C_n^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^n C_n^k q^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n (k-1)^2 n p_n(k) + n! - n!
 \end{aligned}$$

theo chứng minh trên. Tóm lại $\sum_{k=0}^n (k-1)^2 p_n(k) = n!$ là đúng.

Ví dụ 2.17. Dãy (a_n) được xác định như sau: $a_1 = 0, a_2 = 1$ và $a_n = \frac{na_{n-1}}{2} + \frac{n(n-1)a_{n-2}}{2} + (-1)^n(1 - \frac{n}{2})$ với $n \geq 3$. Xác định công thức tường minh cho $f_n = a_n + 2C_n^1 a_{n-1} + 3C_n^2 a_{n-2} + \dots + (n-1)C_n^{n-2} a_2 + nC_n^{n-1} a_1$.

Bài giải: Bằng quy nạp theo n ta chỉ ra được $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$. Vậy $a_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!})$. Viết a_n trong dạng sau đây: $a_n = C_n^n n! + C_n^{n-1}(-1)^1(n-1)! + \dots + C_n^0(-1)^n(n-n)!$; ta cũng viết một cách hình thức a_k và $b_k = k!$ qua a^k và b^k tương ứng $a^n = (b-1)^n$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ với quy ước $a_0 = 1$. Xét quan hệ đa thức sau: $x(b-1+x)^n = x(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^{k+1}$. Lấy đạo hàm hai vế, $nx(b-1+x)^{n-1} + (b-1+n)^n = \sum_{k=0}^n k C_n^k a^{n-k} x^k$. Với $x = 1$ ta có $b_n + nb_{n-1} = \sum_{k=0}^n (k+1) C_n^k a_{n-k}$ hay $n! + n(n-1)! = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_n^k a_{n-k} + n+1$. Từ đây ta suy ra $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) C_n^k a_{n-k} = 2n! - n - 1$.

Chú ý 2.2. Từ $x^2(b-1+x)^n = x^2(a+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} x^{k+2}$, lấy đạo hàm hai vế được $nx^2(b-1+x)^{n-1} + 2x(b-1+n)^n = \sum_{k=0}^n (k+2) C_n^k a^{n-k} x^{k+1}$.

Với $x = 1$ ta có $2b_n + nb_{n-1} = \sum_{k=0}^n (k+2) C_n^k a_{n-k}$ hay $2n! + n(n-1)! = \sum_{k=0}^{n-1} (k+2) C_n^k a_{n-k} + n+2$. Từ đây ta suy ra $\sum_{k=0}^{n-1} (k+2) C_n^k a_{n-k} = 3n! - n - 2$.

2.4. Đồng nhất thức Newton

Sử dụng chuỗi lũy thừa hình thức để chứng minh đồng nhất thức liên quan đến đa thức đối xứng cơ bản. Giả sử $x_1, \dots, x_n$ là n tham số. Ký hiệu

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ \dots \\ \delta_n = x_1x_2 \dots x_n \\ N_t = x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t, t = 1, 2, \dots, N_0 = n \\ p_h = p_h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = h} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}. \end{cases}$$

Định lý 2.6. [Newton] Ta có các đồng nhất thức sau đây:

$$\begin{aligned} N_t - N_{t-1}\delta_1 + \dots + (-1)^{t-1}N_1\delta_{t-1} + (-1)^t t \delta_t &= 0, 1 \leq t \leq n, \\ N_t - N_{t-1}\delta_1 + \dots + (-1)^{n-1}N_{t-n+1}\delta_{n-1} + (-1)^n N_{t-n}\delta_n &= 0, t > n. \end{aligned}$$

Chứng minh: Với $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ta nhận được $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{1 - \frac{x_1}{x}} + \dots + \frac{1}{1 - \frac{x_n}{x}} \right]$. Vậy $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{x^{t+1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_t}{x^{t+1}}$ hay $\frac{f'(x)}{x^{n-1}} = \frac{f(x)}{x^n} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_t}{x^t}$. Từ đây có được đồng nhất thức $n - (n-1)\frac{\delta_1}{x} + (n-2)\frac{\delta_2}{x^2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\delta_{n-1}}{x^{n-1}} = [1 - \frac{\delta_1}{x} + \frac{\delta_2}{x^2} - \dots + (-1)^n \frac{\delta_n}{x^n}] [n + \frac{\delta_1}{x} + \dots + \frac{\delta_t}{x^t} + \dots]$. So sánh hệ số của $\frac{1}{x^t}$ ở hai vế ta có các đồng nhất thức Newton.

Hệ quả 2.2. Giả sử hai hệ các số thực $a_1, \dots, a_n$ và $b_1, \dots, b_n$ thỏa mãn

$\sum_{k=1}^n a_k^s = \sum_{k=1}^n b_k^s$ với mọi $s = 1, 2, \dots, n$. Khi đó có phép hoán vị π thuộc nhóm đối xứng S_n để $a_k = b_{\pi(k)}$ với $k = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh: Sử dụng Định lý 2.6, qua quy nạp theo s nhận được các đồng nhất thức $\delta_s(a_1, \dots, a_n) = \delta_s(b_1, \dots, b_n)$ với mọi $s = 1, 2, \dots, n$. Từ đây suy ra $\prod_{k=1}^n (x - a_k) = \prod_{k=1}^n (x - b_k)$. Vậy có phép hoán vị π thuộc nhóm đối xứng S_n để $a_k = b_{\pi(k)}$ với $k = 1, 2, \dots, n$.

Định lý 2.7. Đặt $u_i = (-1)^{i+1} \delta_i$ với $1 \leq i \leq n$. Ta có đồng nhất thức $N_t = \sum \frac{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_n^{\lambda_n}$, trong đó tổng lấy theo tất cả các hệ $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ các số nguyên không âm thỏa mãn $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = t$.

Chứng minh: Với $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ta nhận được $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x_1^t + x_2^t + \dots + x_n^t}{x^{t+1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_t}{x^{t+1}}$, (1). Dễ dàng thấy $f(x) = x^n - u_1 x^{n-1} - u_2 x^{n-2} - \dots - u_n$. Biểu diễn $f(x) = x^n - g(x)$. Ta có $\frac{f(x)}{x^n} = 1 - \frac{g(x)}{x^n}$.

Viết thành chuỗi lũy thừa hình thức

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{f'(x)}{x^n} \frac{1}{1 - \frac{g(x)}{x^n}} = \frac{f'(x)}{x^n} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{g(x)}{x^n} \right)^t \\ &= \frac{f'(x)}{x^n} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{\delta_1}{x} - \frac{\delta_2}{x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\delta_n}{x^n} \right)^t, \quad (2). \end{aligned}$$

Từ (1), (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_t}{x^{t+1}} &= \frac{f'(x)}{x^n} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \dots + \frac{u_n}{x^n} \right)^t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \dots + \frac{u_n}{x^n} \right)^t \left(\frac{n}{x} - \frac{(n-1)u_1}{x^2} - \dots - \frac{u_{n-1}}{x^n} \right) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \left[\sum \frac{t! u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! x^{h+1}} \right] \left(n - \frac{(n-1)u_1}{x} - \dots - \frac{u_{n-1}}{x^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Ở đó tổng lấy theo tất cả các số nguyên không âm thỏa mãn $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = h$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = t$. Vậy

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{N_t}{x^{t+1}} = \sum_{t=0}^{\infty} \left[\sum \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)! u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_n^{\lambda_n}}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n! x^{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n + 1}} \right] \\ \left(n - \frac{(n-1)u_1}{x} - \dots - \frac{u_{n-1}}{x^{n-1}} \right).$$

Ở đó tổng lấy theo tất cả các hệ $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ các số nguyên không âm. So sánh hệ số của $\frac{1}{x^{t+1}}$ ở hai vế ta có hệ số của $u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_n^{\lambda_n}$ đúng bằng

$$\frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)! n}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} - \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1)!(n-1)}{(\lambda_1 - 1)! \lambda_2! \dots \lambda_n!} - \\ \dots - \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1)! 1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots (\lambda_{n-1} - 1)! \lambda_n!}$$

với $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = t$. Biến đổi các số hạng ta có hệ số của $u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_n^{\lambda_n}$ bằng $\frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1)! [\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n]}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} = \frac{t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!}$.

Tóm lại, $N_t = \sum \frac{t(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \dots u_n^{\lambda_n}$, trong đó tổng lấy theo tất cả các hệ $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ các số nguyên không âm thỏa mãn $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = t$.

Ví dụ 2.18. Ta có $\frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3}{x_1 + x_2 + x_3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1$.

Bài giải: Theo Định lý 2.6 ta có $N_3 - N_2\delta_1 + N_1\delta_2 - 3\delta_3 = 0$. Vậy $\frac{N_3 - 3\delta_3}{N_1} = N_2 - \delta_2$ và nhận được đồng nhất thức trên.

Ví dụ 2.19. Nếu x_1, x_2, x_3 thỏa mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1x_2x_3 = 0$ thì $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0$.

Bài giải: Theo Định lý 2.6 ta có $N_4 - N_3\delta_1 + N_2\delta_2 - N_1\delta_3 = 0$. Vậy $N_4 + N_2\delta_2 = N_1(N_3 + \delta_3) = 0$ và nhận được đồng nhất thức trên.

Ví dụ 2.20. Các số x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Khi đó hãy tính

$$(i) \quad T = \left(\frac{x_2 - x_3}{x_1} + \frac{x_3 - x_1}{x_2} + \frac{x_1 - x_2}{x_3} \right) \left(\frac{x_1}{x_2 - x_3} + \frac{x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_3}{x_1 - x_2} \right).$$

$$(ii) \quad \text{Chứng minh } x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = 3x_1^2x_2^2x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^3.$$

Bài giải:(i) Phân tích và giản ước được $T = \frac{\delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 9\delta_3}{\delta_3} = 9$.

(ii) Dễ thấy x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của $x^3 + \delta_2x - \delta_3 = 0$. Do đó ta có $N_3 = 3\delta_3, N_4 = \delta_3N_1 - \delta_2N_2 = -\delta_2N_2$. Như thế $N_6 = -N_4\delta_2 + N_3\delta_3 = 3\delta_3^2 + \delta_2^2N_2 = 3\delta_3^2 - 2\delta_2^3$, vì $N_2 = -2\delta_2$.

Ví dụ 2.21. Đặt $\delta_0 = p_0 = 1$. Khi đó $\delta_0p_3 - \delta_1p_2 + \delta_2p_1 - \delta_3p_0 = 0$. Từ đó suy ra $\delta_3 = \det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$ và $p_3 = \det \begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 \end{pmatrix}$.

Bài giải: Đặt $\delta_k = 0$ khi $k > 3$. Viết hàm sinh $\delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k t^k = \prod_{i=1}^3 (1 + tx_i)$ và $p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{1 + tx_i}$. Ta có ngay $\delta(t)p(-t) = 1$. Khai triển $\delta(t)p(-t)$, các hệ số của $t^j, j \geq 1$, đều bằng 0. Vậy $\sum_{k=0}^3 (-1)^k \delta_k p_{3-k} = 0$. Từ quan hệ này suy ra hệ phương trình

$$\text{tuyến tính: } \begin{cases} 1.p_1 - \delta_1.1 = 0 \\ 1.p_2 - \delta_1.p_1 + \delta_2.1 = 0 \\ 1.p_3 - \delta_1.p_2 + \delta_2.p_1 = \delta_3. \end{cases} \quad \text{Hệ này có nghiệm } (1, -\delta_1, \delta_2).$$

Qua việc tính hệ số của 1 ta suy ra quan hệ $\det \begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} =$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_1 & 1 \\ \delta_3 & p_2 & p_1 \end{pmatrix} = \delta_3. \quad p_3 = \det \begin{pmatrix} \delta_1 & 1 & 0 \\ \delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \delta_3 & \delta_2 & \delta_1 \end{pmatrix} \text{ được chứng minh hoàn}$$

toàn tương tự.

Ví dụ 2.22. Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc) = (a + b + c + d)^3$.

Bài giải: Đặt
$$\begin{cases} \delta_1 = a + b + c + d \\ \delta_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ \delta_3 = abc + abd + acd + bcd \\ \delta_4 = abcd \\ N_t = a^t + b^t + c^t + d^t, t = 1, 2, \dots, N_0 = 4. \end{cases}$$

Theo Định lý 2.6 ta có $N_3 - N_2\delta_1 + N_1\delta_2 - 3\delta_3 = 0$. Vậy $N_3 - 3\delta_3 = N_2\delta_1 - N_1\delta_2 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2$. Vậy $\delta_2 = 0$ nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - 3(bcd + cda + dab + abc) = (a + b + c + d)^3$.

Ví dụ 2.23. Đa thức $T = 2(x^7 + y^7 + z^7) - 7xyz(x^4 + y^4 + z^4)$ có nhân tử là $x + y + z$.

Bài giải: Đặt $A = x + y + z, B = xy + yz + zx, C = xyz$. Đặt $a_n = x^n + y^n + z^n$. Khi đó x, y, z là ba nghiệm của $t^3 - At^2 + Bt - C = 0$ và $a_{n+3} = Aa_{n+2} - Ba_{n+1} + Ca_n$ với số nguyên $n \geq 0$ và $a_0 = 3$. Chú ý

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= A \\ a_2 &= A^2 - 2B \\ a_3 &= Aa_2 - Ba_1 + Ca_0 = A^3 - 3AB + 3C = Ak_3 + 3C \\ a_4 &= Aa_3 - Ba_2 + Ca_1 = Ak_4 + 2B^2 \\ a_5 &= Ak_5 - 5BC \\ a_6 &= Ak_6 - B^3 + 3C^2 \\ a_7 &= Ak_7 + 7B^2C. \end{aligned}$$

Vậy $T = 2a_7 - 7Ca_4 = A(2k_7 - 7k_4C)$ có nhân tử $A = x + y + z$.

2.5. Định lý Fermat và Định lý Wilson

Bổ đề 2.1. Với số nguyên dương n , đặt $f(x) = (1+x)(2+x)\dots(n+x)$. Giả sử $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$. Chứng minh rằng $(n-k)b_k = C_{n+1}^{n+1-k} + C_n^{n-k}b_{n-1} + C_{n-1}^{n-1-k}b_{n-2} + \dots + C_{k+2}^2b_{k+1}$.

Chứng minh: Từ $(1+x)(2+x)\dots(n+x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ ta suy ra $(2+x)(3+x)\dots(n+1+x) = b_0 + b_1(x+1) + \dots + b_n(x+1)^n$

qua việc thay x bởi $x + 1$. Ta có ngay $b_n = 1$, $b_{n-1} = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2!}$ và hệ thức $(1+x)(2+x)\dots(n+x)(n+1+x) = b_0(x+1) + b_1(x+1)^2 + b_2(x+1)^3 + \dots + b_n(x+1)^{n+1}$. Từ $(n+1+x)f(x) = (x+1)f(x+1)$ suy ra $(n+1+x)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = b_0(x+1) + b_1(x+1)^2 + b_2(x+1)^3 + \dots + b_n(x+1)^{n+1}$. Như vậy

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = 1 \\ (n+1)b_{n-1} + b_{n-2} = C_{n+1}^2 b_n + C_n^1 b_{n-1} + C_{n-1}^0 b_{n-2} \\ (n+1)b_{n-2} + b_{n-3} = C_{n+1}^3 b_n + C_n^2 b_{n-1} + C_{n-1}^1 b_{n-2} + C_{n-2}^0 b_{n-3} \\ \dots \\ (n+1)b_2 + b_1 = C_{n+1}^{n-1} b_n + C_n^{n-2} b_{n-1} + C_{n-1}^{n-3} b_{n-2} + \dots + C_3^1 b_2 + C_2^0 b_1 \\ (n+1)b_1 + b_0 = C_{n+1}^n b_n + C_n^{n-1} b_{n-1} + C_{n-1}^{n-2} b_{n-2} + \dots + C_2^1 b_1 + C_1^0 b_0 \\ (n+1)b_0 = C_{n+1}^{n+1} b_n + C_n^n b_{n-1} + C_{n-1}^{n-1} b_{n-2} + \dots + C_2^2 b_1 + C_1^1 b_0 \text{ và có} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = 1 \\ b_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2!} \\ 2b_{n-2} = C_{n+1}^3 + C_n^2 b_{n-1} \\ \dots \\ (n-2)b_2 = C_{n+1}^{n-1} + C_n^{n-2} b_{n-1} + C_{n-1}^{n-3} b_{n-2} + \dots + C_4^2 b_3 \\ (n-1)b_1 = C_{n+1}^n + C_n^{n-1} b_{n-1} + C_{n-1}^{n-2} b_{n-2} + \dots + C_3^1 b_2 \\ nb_0 = C_{n+1}^{n+1} + C_n^n b_{n-1} + C_{n-1}^{n-1} b_{n-2} + \dots + C_2^2 b_1. \end{array} \right.$$

Do vậy $(n-k)b_k = C_{n+1}^{n+1-k} + C_n^{n-k} b_{n-1} + C_{n-1}^{n-1-k} b_{n-2} + \dots + C_{k+2}^2 b_{k+1}$.

Hệ quả 2.3. [MO British 1974] Với số nguyên tố lẻ p , đặt $f(x) = (1+x)(2+x)\dots(p-1+x)$. Giả sử $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{p-1}x^{p-1}$. Chứng minh rằng

- (i) $p \mid b_k$ với $k = 1, 2, \dots, p-2$ và $p \mid (b_0 + 1)$.
- (ii) Với mọi số nguyên n ta có $p \mid (n+1)(n+2)\dots(n+p-1) - n^{p-1} + 1$.
Từ đó suy ra $p \mid (p-1)! + 1$ và $p \mid n^{p-1} - 1$ khi $(n, p) = 1$.

Chứng minh:

- (i) Qua các công thức tính toán được ở trên ta có

$$\begin{cases} b_{p-1} = 1 \\ b_{p-2} = \frac{p(p-1)}{2!} \\ 2b_{p-3} = C_p^3 + C_{p-1}^2 b_{p-2} \\ \dots \\ (p-2)b_1 = C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-2} b_{p-2} + C_{p-2}^{p-3} b_{p-3} + \dots + C_3^1 b_2 \\ (p-1)b_0 = C_p^p + C_{p-1}^{p-1} b_{p-2} + C_{p-2}^{p-2} b_{p-3} + \dots + C_2^2 b_1. \end{cases}$$

Sử dụng công thức quy nạp theo k có $p \mid b_k$ với $k = 1, 2, \dots, p-2$. Từ hệ thức cuối cùng suy ra hệ thức $p.b_0 = (b_0 + 1) + b_{p-2} + b_{p-3} + \dots + b_1$ và như vậy $b_0 + 1$ chia hết cho p .

(ii) Vì $p \mid b_k$ với $k = 1, 2, \dots, p-2$ và $b_0 + 1$ chia hết cho p nên $p \mid (n+1)(n+2)\dots(n+p-1) - n^{p-1} + 1$ với mọi số nguyên n . Từ đó suy ra $p \mid (p-1)! + 1$ và $p \mid n^{p-1} - 1$ khi $(n, p) = 1$. Từ các kết quả trên ta suy ra ba kết quả sau đây:

Định lý 2.8. Với số nguyên tố p và mọi số nguyên n thỏa mãn $(n, p) = 1$, ta luôn có

(i) [**Fermat nhỏ**] $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

(ii) [**Wilson**] $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

(iii) Nếu số nguyên tố p có dạng $4k+1$ thì $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Ví dụ 2.24. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^3 + y^3 = z^6 + 3$.

Bài giải: Nếu phương trình có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ thì nó cũng có nghiệm trong $\mathbb{Z}_7$. Khi đó tồn tại $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_7$ thỏa mãn $\bar{x}^3 + \bar{y}^3 = \bar{z}^6 + \bar{3}$. Vì $\bar{x}^3, \bar{y}^3 \in \{\bar{0}, \bar{1}, -\bar{1}\}$ nên $\bar{x}^3 + \bar{y}^3 \in \{\bar{0}, \pm\bar{1}, \pm\bar{2}\}$, trong khi đó $\bar{z}^6 + \bar{3} \in \{\bar{3}, \bar{4}\}$. Vậy phương trình đang xét vô nghiệm trong $\mathbb{Z}$.

Ví dụ 2.25. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 4y^4 = z^6 + 6$.

Bài giải: Nếu phương trình có nghiệm trong $\mathbb{Z}$ thì nó cũng có nghiệm trong $\mathbb{Z}_7$. Khi đó tồn tại $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_8$ thỏa mãn $\bar{x}^2 + \bar{4}\bar{y}^4 = \bar{z}^6 + \bar{6}$. Trong

$\mathbb{Z}_8$ có các hệ thức $\bar{0}^2 = \bar{0}, \bar{1}^2 = \bar{1}, \bar{2}^2 = \bar{4}, \bar{3}^2 = \bar{1}, \bar{4}^2 = \bar{0}, \bar{5}^2 = \bar{1}, \bar{6}^2 = \bar{4}, \bar{7}^2 = \bar{1}$. Vậy $\bar{x}^2$ chỉ có thể là $\bar{0}$ hoặc $\bar{1}$ hoặc $\bar{4}$ và $\bar{4}\bar{y}^4$ chỉ có thể là $\bar{0}$ hoặc $\bar{1}$. Qua kiểm tra ta có $\bar{x}^3 + \bar{4}\bar{y}^4$ chỉ có thể là $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}$. Nhưng $\bar{z}^6 + \bar{6}$ chỉ có thể là $\bar{0} + \bar{6} = \bar{6}$ hoặc $\bar{1} + \bar{6} = \bar{7}$. Điều này chứng tỏ phương trình vô nghiệm.

Kết luận

Luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

1. Trình bày một số kiến thức cơ bản về tổ hợp và tổ hợp suy rộng với chứng minh đầy đủ và ví dụ áp dụng.
2. Trình bày được một số phương pháp xây dựng bài toán tổ hợp, chẳng hạn: Sử dụng đạo hàm và tích phân; sử dụng hệ phương trình; sử dụng số phức và sử dụng song ánh với những ví dụ minh họa.
3. Đã chứng minh một số định lý có liên quan đến tổ hợp, chẳng hạn: Đồng nhất thức Newton, Định lý Hilbert và Định lý Cantor về biểu diễn số, Định lý Fermat và Định lý Wilson về đồng dư.
4. Đã trình bày được một số bài toán xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp quốc gia và quốc tế. Đã xây dựng được một số bài toán mới có liên quan đến tổ hợp.

Tài liệu tham khảo

- [1] D. Faddéev et I. Sominski, *Recueil D'Exercices D'Algèbre Supérieure*, Editions Mir-Moscou 1977.
- [2] R. Merris, *Combinatorics*, PWS publishing company 20 Park Plaza, Boston, MA 02116-4324.
- [3] M. B. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory*, Springer-Verlag New-York Berlin-Heidelberg SPIN 10742484.
- [4] Đ. V. Nhĩ, Số phức trong giải Toán sơ cấp, Tạp chí Khoa học ĐHSP Hà Nội số 6 2006, 40-48.
- [5] K. H. Wehrhahn, *Combinatorics-An Introduction*, Carslaw Publications 1992.
- [6] Kenneth H. Rosen, *Toán rời rạc ứng dụng trong tin học*, (Bản dịch), NXB Khoa học và Kỹ thuật Hà Nội 1998.
- [7] D. Q. Việt và Đ. V. Nhĩ, *Giáo trình Đại số Sơ cấp*, Nhà Xuất Bản ĐHSP Hà Nội 2007.
- [8] Tuyển tập: *The IMO Compendium 1959-2004*.
- [9] T. N. Dũng, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

Luận văn đã được chỉnh sửa đúng theo ý kiến của hội đồng chấm luận văn ngày 22 tháng 6 năm 2013. Tại trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên.

Hà nội, ngày 22 tháng 06 năm 2013

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS Đàm Văn Nhĩ