ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

VÕ VĂN VIỆT

HÀM SINH
VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VÕ VĂN VIỆT

HÀM SINH VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Lời nói đầu

Hàm sinh là một công cụ mạnh trong việc giải một số bài toán tổ hợp. Hơn nữa, phương pháp hàm sinh cũng có nhiều ứng dụng trong các nghành khác của toán học. Mục đích của luận văn là trình bày một số kiến thức cơ bản phương pháp hàm sinh, chủ yếu thông qua một số vấn đề trong chương trình toán trung học phổ thông.

Luận văn chia làm hai chương, Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về phép đếm và các nguyên lý cơ bản của phép đếm. Nội dung chính của Chương 2 là những phương pháp hàm sinh và ứng dụng cơ bản của phương pháp hàm sinh khi giải một số lớp bài toán tổ hợp trong chương trình toán trung học phổ thông.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. **Hà Huy Khoái**. Tôi xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn.

Tôi xin được cảm ơn chân thành nhất tới Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, nơi Tôi đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản và xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông, chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong xuốt thời gian Tôi học cao học và viết luận văn.

Lời cuối Tôi xin chúc sức khỏe các thầy cô giáo và đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 04 năm 2013

Người thực hiện

Võ Văn Việt

Chương 1

Kiến thức cơ sở

Trong chương này, trước tiên chúng ta giới thiệu một số phương pháp cơ bản thường dùng trong một lớp bài toán quan trọng của tổ hợp là bài toán đếm. Trong những phương pháp đó, phương pháp hàm sinh sẽ được giới thiệu chi tiết ở Chương 2.

1.1 Phép đếm. Các nguyên lý cơ bản của phép đếm

Định nghĩa 1.1.1. Tập hữu hạn, vô hạn

i) Một tập hợp A được gọi là hữu hạn và có n phần tử nếu tồn tại một song ánh giữa A và tập hợp con $\{1, 2, ..., n\}$ của $\mathbb{N}$. Ta viết $|A| = n$.

ii) Nếu A không hữu hạn, ta nói A vô hạn.

Bổ đề 1.1.2. *Nguyên lý bù trừ*

Giả sử B là một tập con của tập hợp hữu hạn A. Gọi $C_A(B)$ là phần bù của B trong A. Khi ấy ta có

$$|A| = |B| + |C_A(B)|.$$

Định lý 1.1.3. *Giả sử A, B là các tập hợp hữu hạn. Nếu tồn tại một đơn ánh từ A vào B và một đơn ánh từ B vào A thì A và B có cùng số phần tử.*

Nguyên lý cộng Nếu tập hợp hữu hạn C là hợp của n tập đôi một rời nhau $C_1, C_2, ..., C_n$ thì:

$$|C| = |C_1| + ... + |C_n|.$$

Định nghĩa 1.1.4. Tích Descartes của hai tập hợp A, B ký hiệu bởi AxB là tập hợp tất cả các cặp thứ tự (a, b) với $a \in A, b \in B$.

Nguyên lý nhân: Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì AxB cũng hữu hạn và ta có

$$|A.B| = |A|.|B|$$

Định nghĩa về tích Descartes và nguyên lý nhân trên đây có thể mở rộng cho nhiều tập hợp. Nguyên lý nhân có thể phát biểu một cách khác như sau:
Giả sử một quá trình có thể được thực hiện qua hai công đoạn: công đoạn I có n_1 cách thực hiện, công đoạn II (sau khi thực hiện I) có n_2 cách thực hiện. Khi đó có $n_1.n_2$ cách thực hiện quá trình đó.
Nguyên lý thêm bớt: Với hai tập hữu hạn A, B bất kỳ ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

1.2 Các đối tượng tổ hợp và các số tổ hợp

1.2.1 Họ các tập con của một tập hợp E

$$P(E) = \{A|A \subseteq E\}$$

Mệnh đề 1.2.1.

$$|P(E)| = 2^{|E|}$$

1.2.2 Chỉnh hợp của n phần tử chọn k

(hay chỉnh hợp chập k của n phần tử)
Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Chỉnh hợp của n phần tử chọn k là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i1}, ..., a_{ik})$.
Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k. Ta có

$$A_n^k = n(n-1)..(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

1.2.3 Tổ hợp của n phần tử chọn k

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Tổ hợp của n phần tử chọn k là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $\{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$. Nói cách khác, đó là một tập con gồm k phần tử.
Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k. Ta có

$$C_n^k = \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.2.4 Hoán vị

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Một hoán vị của E là một cách xếp các phần tử của E theo một thứ tự nào đó. Nói cách khác, đó chính là chỉnh hợp của n phần tử chọn n. Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n. Ta có $P_n = n!$.

1.2.5 Chỉnh hợp lặp

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Chỉnh hợp lặp của n phần tử chọn k là một bộ sắp thứ tự gồm k phần tử $(a_{i1}, ..., a_{ik})$, trong đó cho phép lấy lặp lại. Số các chỉnh hợp chập k của n, theo quy tắc nhân, bằng n^k.

1.2.6 Tổ hợp lặp

Cho $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Tổ hợp lặp của n phần tử chọn k là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử $\{a_{i1}, ..., a_{ik}\}$, trong đó cho phép lấy lặp lại. Nói cách khác, đó là một đa tập hợp gồm k phần tử lấy từ E (ta hiểu *đa tập hợp* là tập hợp mà trong đó mỗi phần tử có thể được kể nhiều lần).
Số các tổ hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu là H_n^k. Ta có

$$H_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

1.2.7 Hoán vị lặp

Xét đa tập hợp $E(r_1, r_2, ..., r_s)$ có n phần tử, trong đó phần tử a_1 có r_1 phiên bản, phần tử a_2 có r_2 phiên bản, ..., phần tử a_s có r_s phiên bản. $r_1 + r_2 + ... + r_s = n$. Một cách xếp các phần tử của E theo thứ tự nào

đó được gọi là một hoán vị lặp của n phần tử của E.
Số hoán vị lặp của đa tập hợp $E(r_1, r_2, ..., r_s)$ bằng $\dfrac{n!}{r_1!...r_s!}$.

Bổ đề 1.2.2. *(Tính chất hệ số nhị thức)*

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

Định lý 1.2.3. *(Nhị thức Newton)*

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + ... + C_n^n y^n.$$

1.3 Các phương pháp đếm nâng cao

Cơ sở của phép đếm là định nghĩa phép đếm, các nguyên lý đếm và các số tổ hợp (là các số thường nảy sinh một cách tự nhiên trong các bài toán đếm). Tuy nhiên, với các công cụ cơ sở trên, chúng ta thường chỉ giải được những bài toán ở dạng đơn giản nhất. Với các bài toán có yêu cầu phức tạp hơn, cần đến các phương pháp đếm nâng cao.
Có nhiều phương pháp đếm nâng cao dựa trên các nền tảng lý thuyết khác nhau. Ví dụ phương pháp song ánh dựa vào lý thuyết tập hợp và ánh xạ, phương pháp thêm bớt cũng dựa vào lý thuyết tập hợp (cụ thể là tổng quát hóa của công thức $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$), phương pháp quỹ đạo dựa vào một định lý cơ bản về số đường đi ngắn nhất giữa hai điểm của lưới nguyên, phương pháp quan hệ đệ quy dựa vào ý tưởng quy nạp, phương pháp hàm sinh sử dụng các kiến thức tổng hợp của đại số và giải tích ...
Dưới đây, chúng ta sẽ giới thiệu sơ lược một số phương pháp đếm nâng cao.

1.3.1 Phương pháp quan hệ đệ quy.

Phương pháp quan hệ đệ quy là phương pháp giải bài toán với n đối tượng thông qua việc giải bài toán tương tự với số đối tương ít hơn bằng cách xây dựng các quan hệ nào đó, gọi là quan hệ đệ quy. Sử dụng quan hệ này, ta có thể tính được đại lượng cần tìm nếu chú ý rằng với n nhỏ, bài toán luôn có thể giải một cách dễ dàng.
Ta minh họa phương pháp này thông qua một số ví dụ:

Ví dụ 1.3.1. (Bài toán chia kẹo của Euler) Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \tag{1.1}$$

Giải. Gọi số nghiệm nguyên không âm của phương trình trên là $S(n, k)$. Dễ dàng thấy rằng $S(1, k) = 1$. Để tính $S(n, k)$, ta chú ý rằng (1.1) tương đương với

$$x_1 + ... + x_{n-1} = k - x_n \tag{1.2}$$

Suy ra với x_n cố định thì số nghiệm của (1.2) là $S(n - 1, k - x_n)$. Từ đó ta được công thức

$$S(n, k) = S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1) + ... + S(n - 1, 0).$$

Đây có thể coi là công thức truy hồi tính $S(n, k)$. Tuy nhiên, công thức này chưa thật tiện lợi. Viết công thức trên cho $(n, k - 1)$ ta được

$$S(n, k - 1) = S(n - 1, k - 1) + S(n - 1, k - 2) + ... + S(n - 1, 0).$$

Từ đây, trừ các đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$S(n, k) - S(n, k - 1) = S(n - 1, k)$$

Hay

$$S(n, k) = S(n, k - 1) + S(n - 1, k).$$

Từ công thức này, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được rằng

$$S(n, k) = C^k_{n+k-1}.$$

Ví dụ 1.3.2. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n trong đó không có hai bit 1 đứng cạnh nhau?

Giải. Gọi c_n là số xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ta có $c_1 = 2, c_2 = 3$. Để tìm công thức truy hồi, ta xây dựng xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn điều kiện đầu bài có dạng $a_n a_{n-1} a_{n-2} ...... a_2 a_1$. Có hai trường hợp

i) $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1} = 0$ và $a_{n-2} ...... a_2 a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n - 2$ thỏa điều kiện. Có c_{n-2} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-2} xâu.

ii) $a_n = 1$. Khi đó $a_{n-1}......a_2a_1$ có thể chọn là một xâu bất kỳ độ dài $n-1$ thỏa điều kiện. Có c_{n-1} xâu như vậy, suy ra trường hợp này có c_{n-1} xâu.

Vậy tổng cộng xây dựng được $c_{n-1} + c_{n-2}$ xâu, nghĩa là ta có hệ thức truy hồi

$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}.$$

1.3.2 Phương pháp thêm bớt

Ta xét bài toán thực tế sau:

Ví dụ 1.3.3. Rút ngẫu nhiên 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Tính xác suất để trong 13 quân đó có "tứ quý".

Giải. Có C_{52}^{13} cách rút 13 quân bài từ bộ bài 52 quân. Ta cần tìm số cách rút trong đó có 4 quân bài giống nhau (về số!).
Trước hết ta đếm số cách rút có "tứ quý" A. Rõ ràng có C_{48}^{9} cách rút như vậy (lấy 4 con A và 9 con bất kỳ từ 48 con còn lại). Với các quân bài khác cũng vậy. Vì có 13 quân bài khác nên số cách rút là có tứ quý là 13. C_{48}^{9}.
Trong lời giải trên, chúng ta đã đếm lặp. Cụ thể là những cách rút bài có hai tứ quý, chẳng hạn tứ quý K và tứ quý A được đếm hai lần: một lần ở tứ quý A và một lần ở tứ quý K. Nhưng ta đang đếm không phải là số tứ quý mà là số lần gặp tứ quý. Như thế, những lần đếm lặp đó phải trừ đi. Dễ thấy, số cách rút có tứ quý K và A sẽ là C_{44}^{5}. Lý luận tiếp tục như thế, ta có con số chính xác cách rút có tứ quý là:

$$13.C_{48}^{9} - C_{13}^{2}.C_{44}^{5} + C_{13}^{3}C_{40}^{1}$$

và xác suất cần tìm bằng

$$P = (13.C_{48}^{9} - C_{13}^{2}C_{44}^{5} + C_{13}^{3}C_{40}^{1})/C_{52}^{13} = 0.0342.$$

Định lý 1.3.4. *Với n tập hợp $A_1, ..., A_n$ bất kỳ ta có công thức*

$$|A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cup A_j| + ... + (-1)^{n-1}|A_1 \cap ... \cap A_n|.$$

Ví dụ 1.3.5. Có bao nhiêu cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào?

Giải. Có 8! cách xếp 8 con xe con xe lên bàn cờ quốc tế sao cho không có con nào ăn con nào. Ta cần đếm số cách xếp không hợp lệ, tức là số cách xếp có ít nhất một con xe nằm trên đường chéo.
Gọi A_i là tập hợp các cách xếp có quân xe nằm ở ô (i, i). Ta cần tìm $|A_1 \cup ... \cup A_8|$.
Nhưng dễ dàng thấy rằng $|A_i| = 7!, |A_i \cap A_j| = 6!...|A_1 \cap ... \cap A_8| = 1$ nên từ định lý trên ta suy ra

$$|A_1 \cup ... \cup A_8| = C_8^1.7! - C_8^2.6! + C_8^3.6! - ... - C_8^8.1! = 8! - 8!/2! + 8!/3! - ... - 8!/8!.$$

Như vậy số cách xếp 8 con xe lên bàn cờ quốc tế đã bị gạch đi một đường chéo chính sao cho không có con nào ăn con nào bằng

$$N(8) = 8! - (8! - 8!/2! + 8!/3! - ... - 8!/8!) = 8!(1/2! - 1/3! + ... + 1/8!) = 14833.$$

1.3.3 Phương pháp hàm sinh

Phương pháp hàm sinh là một phương pháp hiện đại, sử dụng các kiến thức về chuỗi, chuỗi hàm (đặc biệt là công thức Taylor). Đây là phương pháp mạnh nhất để giải bài toán giải tích tổ hợp

Định nghĩa 1.3.6. Cho dãy số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Chuỗi hình thức

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

được gọi là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$.

Ý tưởng phương pháp hàm sinh như sau: Giả sử ta cần tìm công thức tổng quát của một dãy số $\{a_n\}$ nào đó. Từ công thức truy hồi hoặc những lý luận tổ hợp trực tiếp, ta tìm được hàm sinh

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$$

Trong trường hợp thuận lợi, từ biểu diễn trên có thể tìm được một công thức giải tích cho hàm $A(x)$. Khai triển $A(x)$ (biểu diễn bởi công thức giải tích vừa tìm được) thành chuỗi và tìm hệ số của x^n trong khai triển đó ta tìm được a_n.

Công thức khai triển thường sử dụng (Công thức nhị thức Newton)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + ... + \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + ...$$

Mục tiêu chủ yếu của luận văn này là trình bày tương đối chi tiết về hàm sinh. Điều này sẽ được làm ở Chương 2. Ở đây ta chỉ đưa ra vài ví dụ đơn giản để minh họa.

Ví dụ 1.3.7. Tìm số hạng tổng quát của dãy số

$$f_0 = 1, f_1 = 2, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Giải: Xét hàm sinh

$$\begin{aligned} F(x) &= f_0 + f_1x + f_2x^2 + ... + f_nx^n + ... \\ &= f_0 + f_1x + (f_0 + f_1)x^2 + ... + (f_{n-1} + f_{n-2})x^n + ... \\ &= f_0 + f_1x + x^2(f_0 + f_1x + ...) + x(f_1x + ...) \\ &= f_0 + f_1x + x^2F(x) + x(F(x) - f_0). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$F(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2}$$

Tiếp theo, ta khai triển $F(x)$ thành chuỗi. Ta có

$$F(x) = \frac{1+x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$$

trong đó α, β là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Ta dễ dàng tìm được hai hằng số A, B sao cho

$$F(x) = \frac{A}{(1-\alpha x)} + \frac{B}{(1-\beta x)}.$$

Từ đó, sử dụng công thức $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ ta được

$$F(x) = A + B + (A\alpha + B\beta)x + ... + (A\alpha^n + B\beta^n)x^n + ...$$

suy ra

$$f_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

với α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ và A, B là các hằng số hoàn toàn xác định

Ví dụ 1.3.8. Tìm số hạng tổng quát của dãy số

$$a_0 = 1, a_na_0 + a_{n-1}a_1 + ... + a_0a_n = 1.$$

Giải: Xét hàm sinh $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$
Biểu thức truy hồi gợi chúng ta đến hệ số của hai đa thức

$$\begin{aligned} A(x).A(x) &= a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + ... + (a_na_0 + a_{n-1}a_1 + ... + a_0a_n)x^n + ... \\ &= 1 + x + x^2 + ... + x^n = (1-x)^{-1}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} A(x) &= (1-x)^{-1/2} \\ &= 1 + (\frac{1}{2})x + (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\frac{x^2}{2} + ... + (\frac{1}{2})(\frac{3}{2})...(\frac{n-1}{2})\frac{x^n}{n!} + ... \end{aligned}$$

Và như vậy

$$a_n = \frac{(2n-1)!}{2^n.n!} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}.$$

Ví dụ 1.3.9. (Bài toán chia kẹo của Euler) Cho k, n là các số nguyên dương. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k \tag{1.3}$$

Giải: Gọi $c_n(k)$ là số nghiệm của (1.3). Xét tích của các tổng vô hạn

$$(1 + x + x^2 + ...)(1 + x + x^2 + ...)....(1 + x + x^2 + ...) = (1 + x + x^2 + ...)^n$$

Ta nhận xét rằng nếu khai triển tích trên thành chuỗi lũy thừa của x

$$(1 + x + x^2 + ...)^n = c_0 + c_1x + ... + c_kx^k + ...$$

thì $\quad c_k = c_n(k)$
Nhưng

$$(1+x+x^2+...)^n = (1-x)^{-n} = 1+nx+...+n(n+1)...(n+k-1)\frac{x^k}{k!}+...$$

Suy ra

$$c_n(k) = \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} = C_{n+k-1}^k.$$

Chương 2

Phương pháp hàm sinh

2.1 Cơ sở lý thuyết

Khi làm việc với các hàm sinh, chúng ta thường muốn sử dụng các phép biến đổi và thao tác khác nhau, mà chúng không được phép dùng khi hàm sinh xem như hàm với biểu diễn giải tích. Do đó các hàm sinh sẽ được định nghĩa như những đối tượng đại số nhằm mục đích sử dụng được nhiều công cụ hơn.

Định nghĩa 2.1.1. Một chuỗi lũy thừa hình thức là biểu thức có dạng

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Dãy các số nguyên $\{a_i\}_0^\infty$ được gọi là dãy các hệ số

Ví dụ 2.1.2. Chuỗi $A(x) = 1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + ... + n^nx^n + ...$ mặc dù chỉ hội tụ $x = 0$, nhưng trong lý thuyết hình thức, đó là một chuỗi lũy thừa hình thức xác định tốt với dãy hệ số tương ứng là $\{a_i\}_0^\infty$, $a_i = i^i$

Định nghĩa 2.1.3. Hai chuỗi $A = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ và $B = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ được gọi là bằng nhau nếu dãy các hệ số tương ứng của chúng bằng nhau, tức là $a_i = b_i$ với mỗi $i \in N_0$.

Nhận xét:

Hệ số của x^n trong chuỗi lũy thừa F sẽ được kí hiệu bởi $[x^n]\,F$. Ta có thể định nghĩa tổng, hiệu và tích của chuỗi lũy thừa như sau.

$$\sum_n a_n x^n \pm \sum_n b_n x^n = \sum_n (a_n \pm b_n)\, x^n$$

$$\sum_n a_n x^n \sum_n b_n x^n = \sum_n c_n x^n,\ c_n = \sum_i a_i b_{n-i}$$

Thay cho $F.F$ ta viết F^2, và một cách tổng quát $F^{n+1} = F.F^n$. Ta thấy rằng phần tử trung hòa cho phép cộng là 0, và phần tử trung hòa cho phép nhân là 1.

Định nghĩa 2.1.4. Chuỗi lũy thừa G là nghịch đảo của chuỗi lũy thừa F nếu F.G = 1.

Hàm sinh nghịch đảo của F sẽ được kí hiệu là $\frac{1}{F}$. Vì phép nhân là giao hoán ta thấy rằng F.G = 1 tương đương với G.F = 1, do đó F và G là nghịch đảo lẫn nhau.

Ta cũng có

$$(1-x)\left(1+x+x^2+.......\right) = 1 + \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} (1.1-1.1)x^i = 1$$

Vì vậy $(1-x)$ và $\left(1+x+x^2+........\right)$ là nghịch đảo lẫn nhau.

Định lý 2.1.5. *Một chuỗi lũy thừa hình thức* $F = \sum\limits_n a_n x^n$ *có nghịch đảo nếu chỉ nếu* $a_0 \neq 0$. *Trong trường hợp đó nghịch đảo là duy nhất.*

Chứng minh. Giả thiết rằng F có nghịch đảo $\frac{1}{F} = \sum\limits_n b_n x^n$. Khi đó $F.\frac{1}{F} = 1$ suy ra $1 = a_0 b_0$ do đó $a_0 \neq 0$. Với $n \geq 1$ ta có $0 = \sum\limits_k a_k b_{n-k}$ từ đó ta có thể kết luận:

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_k a_k b_{n-k} \qquad (*)$$

Các hệ số được xác định duy nhất bởi công thức (*).

Mặt khác nếu $a_0 \neq 0$ ta có thể xác định duy nhất tất cả các hệ số b_i nhờ sử dụng các quan hệ trước đó đã xác định chuỗi $\frac{1}{F}$.

□

Bây giờ ta có thể kết luận rằng tập các chuỗi lũy thừa với những phép toán định nghĩa như trên lập thành một vành mà các phần tử khả nghịch là chính là những chuỗi lũy thừa với hệ số đầu tiên khác 0.
Nếu $F = \sum_n f_n x^n$ là một chuỗi lũy thừa, $F(G(x))$ sẽ kí hiệu chuỗi $F(G(x)) = \sum_n f_n G(x)^n$. Kí hiệu đó cũng sẽ được sử dụng trong trường hợp khi F là đa thức (tức là khi chỉ có hữu hạn các hệ số khác 0) hoặc nếu số hạng tự do của G bằng 0.

Định nghĩa 2.1.6. Một chuỗi lũy thừa hình thức G được gọi là một chuỗi lũy thừa nghịch đảo của F nếu

$$F(G(x)) = G(F(x)) = x$$

Ở đây ta cũng có sự đối xứng, nếu G là nghịch đảo của F khi đó F cũng là nghịch đảo của G.

Định lý 2.1.7. *Cho F và G là hai chuỗi lũy thừa nghịch đảo của nhau. Khi đó*

$$F = f_1 x + f_2 x^2 + ..., \; G = g_1 x + g_2 x^2 + ...$$

và $f_1.g_1 \neq 0$.

Chứng minh. Để cho $F(G(x))$ và $G(F(x))$ được xác định ta phải có 0 là số hạng tự do. Giả thiết rằng $F = f_r x^r + ...$ và $G = g_s x^s + ...$ khi đó

$$F(G(x)) = x = f_r g_s^r x^{rs} + ...,$$

do đó $rs = 1$ và $r = s = 1$. □ □

Định nghĩa 2.1.8. Đạo hàm của chuỗi lũy thừa $F = \sum_n f_n x^n$ là

$$F' = \sum_n n f_n x^{n-1}$$

.
Đạo hàm cấp $n > 1$ được xác định đệ quy bởi $F^{(n+1)} = \left(F^{(n)}\right)'$.

Định lý 2.1.9. *Các tính chất của đạo hàm*

- $(F+G)^{(n)} = F^{(n)} + G^{(n)}$
- $(FG)^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} F^{(i)} G^{(n-i)}$

Ta sẽ thường xuyên kết hợp mỗi chuỗi lũy thừa với dãy sinh của nó, nên để thuận tiện ta đưa vào ký hiệu quy ước sau.

Định nghĩa 2.1.10. $A \overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ nghĩa là A là một chuỗi lũy thừa thông thường sinh bởi $\{a_n\}_0^\infty$, tức là $A = \sum\limits_n a_n x^n$.

Giả thiết rằng $A \overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$. Khi đó

$$\sum_n a_{n+1} x^n = \frac{1}{n} \sum_{n>0} a_n x^n = \frac{A(x) - a_0}{x}$$

Hoặc một cách tương đương

$$\{a_{n+1}\}_0^\infty \overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} \frac{A - a_0}{x}$$

.

Tương tự $\{a_{n+2}\}_0^\infty \overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} \dfrac{\dfrac{A - a_0}{x} - a_1}{x} = \dfrac{A - a_0 - a_1 x}{x^2}$

Định lý 2.1.11. *Nếu $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\longleftrightarrow} A$ thì với $h > 0$*

$$\{a_{n+h}\}_0^\infty \overset{osr}{\longleftrightarrow} \frac{A - a_0 - a_1 x - \ldots\ldots.. - a_{h-1} x^{h-1}}{x^h}.$$

Chứng minh. Ta sử dụng phép quy nạp theo h. Khi $h = 1$ mệnh đề là đúng, và điều này đã được chỉ ra từ trước. Nếu mệnh đề đúng với h nào đó thì khi đó.

$$\begin{aligned}
\{a_{n+h+1}\}_0^\infty &\overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} \left\{a_{(n+h)+1}\right\}_0^\infty \\
&\overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} \frac{\dfrac{A - a_0 - a_1 x - \ldots\ldots.. - a_{h-1} x^{h-1}}{x^h} - a_h}{x} \\
&\overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} \frac{A - a_0 - a_1 x - \ldots\ldots - a_h x^h}{x^{h+1}}.
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Chúng ta đã biết rằng $\{(n+1)\, a_{n+1}\}_0^\infty \overset{\text{osr}}{\longleftrightarrow} A'$. Mục tiêu của ta là nhận được dãy $\{n a_n\}_0^\infty$. Đó chính là dãy xA'. Ta sẽ định nghĩa toán tử xD trong cách sau:

Định nghĩa 2.1.12. $x\mathrm{D}A = xA'$ tức là $x\mathrm{D}A = x\dfrac{dA}{dx}$.

Hai định lí sau là hệ quả của tính chất của đạo hàm.

Định lý 2.1.13. *Nếu* $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\longleftrightarrow} A$ *thì* $\left\{n^k a_n\right\}_0^\infty \overset{osr}{\longleftrightarrow} (xD)^k A$.

Định lý 2.1.14. *Cho* $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\longleftrightarrow} A$ *và* P *là một đa thức. Khi đó*

$$P(xD)\,A \overset{osr}{\longleftrightarrow} \{P(n)\,a_n\}_0^\infty .$$

Xét hàm sinh $\dfrac{A}{1-x}$. Nó có thể viết dưới dạng $A\dfrac{1}{1-x}$. Như chúng ta đã thấy ở trước, chuỗi nghịch đảo của $1-x$ là $1+x+x^2+...$,
do đó

$$\begin{aligned}\frac{A}{1-x} &= \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...\right)\left(1 + x + x^2 + ...\right)\\ &= a_0 + (a_0 + a_1)\,x + (a_0 + a_1 + a_2)\,x^2 + ...\end{aligned}$$

Định lý 2.1.15. *Nếu* $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\longleftrightarrow} A$ *thì* $\dfrac{A}{1-x} \overset{osr}{\longleftrightarrow} \left\{\sum\limits_{j=0}^{n} a_j\right\}_{n\geq 0}$

Bây giờ ta sẽ nghiên cứu một dạng mới của hàm sinh.

Định nghĩa 2.1.16. Ta nói rằng A là hàm sinh (hoặc chuỗi, chuỗi lũy thừa) mũ của dãy $\{a_n\}_0^\infty$, nếu A là hàm sinh thông thường của dãy $\{\frac{a_n}{n!}\}$, hoặc một cách tương đương,

$$A = \sum_n \frac{a_n}{n!}x^n.$$

Nếu B là hàm sinh mũ của chuỗi $\{b_n\}_0^\infty$ chúng ta cũng có thể viết

$$\{b_n\}_0^\infty \overset{\text{esr}}{\longleftrightarrow} B$$

Nếu $B \overset{\text{esr}}{\longleftrightarrow} \{b_n\}_0^\infty$, ta quan tâm đến B'. Dễ thấy

$$B' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_nx^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}x^n}{n!}$$

Do đó

$$B' \overset{\text{esr}}{\longleftrightarrow} \{b_{n+1}\}_0^\infty$$

Định lý 2.1.17. *Nếu* $\{b_n\}_0^\infty \overset{esr}{\longleftrightarrow} B$, *thì với* $h \geq 0$ *:*

$$\{b_{n+h}\}_0^\infty \overset{osr}{\longleftrightarrow} B^{(h)}$$

Ta có định lí tương đương cho hàm sinh mũ.

Định lý 2.1.18. *Cho* $\{b_n\}_0^\infty \overset{esr}{\longleftrightarrow} B$ *và cho* P *là một đa thức. Khi đó*

$$P\left(xD\right)B \overset{esr}{\longleftrightarrow} \{P\left(n\right)b_n\}_0^\infty$$

Hàm sinh mũ rất hữu ích trong nghiên cứu đồng nhất thức tổ hợp vì tính chất sau.

Định lý 2.1.19. *Cho* $\{a_n\}_0^\infty \overset{esr}{\longleftrightarrow} A$ *và* $\{b_n\}_0^\infty \overset{esr}{\longleftrightarrow} B$. *Khi đó hàm sinh* AB *sinh ra dãy* $\left\{\sum\limits_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right\}_{n=0}^\infty$

Chứng minh. Ta có
$AB = \left\{\sum\limits_{i=0}^\infty \frac{a_i x^i}{i!}\right\} * \left\{\sum\limits_{j=0}^\infty \frac{b_j x^j}{j!}\right\} = \sum_{ij} \frac{a_i b_j}{i!j!} x^{i+j} = \sum\limits_n x^n \left\{\sum\limits_{i+j=n} \frac{a_i b_j}{i!j!}\right\}$
hay

$$AB = \sum_n \frac{x^n}{n!} \left\{\sum_{i+j=n} \frac{n! a_i bj}{i!j!}\right\} = \sum_n \frac{x^n}{n!} \sum \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

điều phải chứng minh. □

Chúng ta đã liệt kê các tính chất cơ bản của hàm sinh. Các tính chất và thuật ngữ mới sẽ được định nghĩa sau. Mặc dù chuỗi lũy thừa hình thức được định nghĩa như những đối tượng thuần túy đại số, ta không bỏ tính chất giải tích của nó. Ta sẽ sử dụng khai triển Taylor của hàm thành chuỗi lũy thừa. Ví dụ ta sẽ xử lí hàm e^x như một chuỗi lũy thừa hình thức có được bằng cách khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa, tức là ta sẽ đồng nhất e^x với $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$. Ta cũng sẽ sử dụng theo hướng ngược lại.

Ở đây ta liệt kê khai triển Taylor các hàm phổ biến nhất.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n} \tbinom{n+k}{n} x^n$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k} \tbinom{\alpha}{k} x^k$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n} \tbinom{2n}{n} x^n$$

$$\frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right) = \sum_{n} \frac{1}{n+1} \tbinom{2n}{n} x^n$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k = \sum_{n} \frac{k\,(2n+k-1)!}{n!\,(n+k)!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k = \sum_{n} \tbinom{2n+k}{n} x^n$$

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{16^n\sqrt{2}\,(2n)!\,(2n+1)!} x^n$$

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n x^n}{n!}$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$sinx = \sum_{n\geq 0} (-1)\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$sosx = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan x = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$$

$$x\cot x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-4)^n B_{2n}}{(2k)!} x^{2n}$$

$$\arcsin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n-1)!x^{2n+1}}{(2n)!\,(2n+1)}$$

$$\arctan x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{x}{sinx} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n-1} \frac{(4^n-2)\,B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x \sin x = \sum_{n\geq 1} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}}{n!} x^n$$

$$\ln^2 \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 2} \frac{H_{n-1}}{n} x^n$$

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n n!^2}{(k+1)\,(2k+1)!} x^{2n}$$

**) Nhận xét* : $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$, và B_n là số Bernoulli thứ n.

2.2 Phương trình hồi quy

Đầu tiên ta sẽ giải một phương trình hồi quy cơ bản

Bài toán 2.2.1. Cho a_n là một dãy có $a_0 = 0$ và $a_{n+1} = 2a_n + 1, n \geq 1$. Tìm số hạng tổng quát của dãy a_n.

Giải: Ta có thể tính một vài số hạng đầu $0, 1, 3, 7, 15, ...$ và ta dự đoán $a_n = 2^n - 1$. Công thức này có thể dễ dàng chứng minh bằng quy nạp toán học nhưng ta sẽ giải bài toán sử dụng các hàm sinh.
Cho $A(x)$ là hàm sinh của dãy a_n, tức là cho $A(x) = \sum\limits_n a_n x^n$. Nếu ta nhân cả hai vế của hệ thức hồi quy bởi x^n và với $\forall n$ ta được

$$\sum_n a_{n+1} x^n = \frac{A(x) - a_0}{x} = \frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x} = \sum_n (2a_n + 1) x^n$$

Từ đó ta dễ dàng kết luận

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(2-x)}.$$

Bây giờ bài toán là tìm công thức tổng quát cho các phần tử của dãy. Ở đây ta sẽ sử dụng phân tích A thành hai phân số, mỗi một trong chúng có hàm sinh tương ứng. Cụ thể hơn,

$$\frac{x}{(1-x)(2-x)} = x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) = \left(2x + 2^2x^2 + ...\right) - \left(x + x^2 + ...\right)$$

Rõ dàng $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) x^n$ và nghiệm của quan hệ hồi quy đúng là

$$a_n = 2^n - 1.$$

Bài toán 2.2.2. Tìm số hạng tổng quát của dãy cho một cách hồi quy bởi

$$a_{n+1} = 2a_n + n, (n \geq 0), a_0 = 1$$

Giải: Giả sử $\{a_n\}_0^\infty \overset{ors}{\leftrightarrow} A$. Khi đó $\{a_{n+1}\}_0^\infty \overset{ors}{\leftrightarrow} \dfrac{A-1}{x}$.
Ta cũng có

$$xD\frac{1}{1-x} \overset{ors}{\leftrightarrow} \{n.1\}$$

Vì $$xD\frac{1}{1-x} = x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

quan hệ hồi quy trở thành

$$\frac{A-1}{x} = 2A + \frac{x}{(1-x)^2}$$

Từ đó ta suy ra $\qquad A = \dfrac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$

Bây giờ ta có thể xem là đã giải được đối với chuỗi sinh. Nếu ta muốn chỉ ra rằng dãy này bằng một số dãy khác nào đó thì chỉ cần chỉ ra rằng các hàm là bằng nhau. Tuy nhiên ta cần tìm các số hạng dạng hiện.Ta lại cố gắng biểu diễn A trong dạng

$$A = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{P}{(1-x)^2} + \frac{Q}{1-x} + \frac{R}{1-2x}$$

Sau khi nhân cả hai vế với $(1-x)^2(1-2x)$ ta thu được

$$1-2x+2x^2 = P(1-2x) + Q(1-x)(1-2x) + R(1-x)^2.$$

Hoặc một cách tương đương

$$1-2x+2x^2 = x^2(2Q+R) + x(-2P-3Q-2R) + (P+Q+R)$$

Nếu ta nhân cả hai vế với $(1-x)^2$ và đặt $x=1$ ta thu được $P=-1$. Tương tự nếu ta nhân với $1-2x$ và cho $x=\dfrac{1}{2}$ ta thu được $R=2$.
suy ra $P=-1, Q=0, R=2$.
Bây giờ thay thế P và R và cho $x=0$ ta thu được $Q=0$. Như vậy có được P, Q và R một cách dễ dàng. Do đó ta có

$$A = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}$$

Vì $\qquad \dfrac{2}{1-2x} \overset{ors}{\leftrightarrow} \{2^{n+1}\}$ và $\dfrac{1}{(1-x)^2} = D\dfrac{1}{1-x} \overset{ors}{\leftrightarrow} \{n+1\}$
ta thu được

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1$$

Trong hai ví dụ trên mỗi số hạng của dãy chỉ phụ thuộc vào số hàng đứng trước đó. Ta nói quan hệ hồi quy như vậy là quan hệ bậc nhất.
Bây giờ ta dùng hàm sinh để giải những quan hệ hồi quy bậc lớn hơn 1.

Bài toán 2.2.3. Dãy Fibonacci $\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \\ n \geq 1 \end{cases}$ Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Giải: Giả sử F là hàm sinh của dãy $\{F_n\}$. Nếu ta nhân cả hai vế bởi x^n và cộng tất cả, vế trái trở thành $\{F_{n+1}\} \overset{ors}{\leftrightarrow} \dfrac{F-x}{x}$, trong khi vế phải trở thành $F + xF$.
Do đó

$$F = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Bây giờ ta muốn khai triển hàm đó thành chuỗi lũy thừa. Đầu tiên ta muốn biểu diễn hàm như một tổng của hai phân số.

Giả sử $-x^2 - x + 1 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$.
Khi đó

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

và $\qquad \alpha - \beta = \sqrt{5}$
Hơn nữa ta có

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-x\alpha} - \frac{1}{1-x\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right\}$$

Dễ dàng thu được

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right).$$

Nhận xét: Từ đó ta có ngay xấp xỉ cho F_n. Vì $|\beta| < 1$ ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^n = 0$ và

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Bây giờ ta xét cho trường hợp với dãy của hai biến.

Bài toán 2.2.4. Tìm số các tập con k phần tử của tập n phần tử?

Giải: Ta biết rằng kết quả là C_n^k, nhưng ta muốn thu được nó bằng cách sử dụng hàm sinh. Giả thiết rằng số cần tìm là $C(n,k)$. Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là tập n phần tử. Có hai loại tập con k phần tử, đó là chứa và không chứa a_n. Chính xác là có $C(n-1, k-1)$ tập con chứa

a_n. Thật vậy, chúng là tất cả các tập con $k-1$ phần tử của $\{a_1, ..., a_{n-1}\}$. và thêm vào a_n. Ngoài ra có chính xác $C(n-1,k)$ các tập con không chứa a_n. Do đó

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1).$$

Ta cũng có $C(n,0) = 1$.
Bây giờ ta sẽ định nghĩa hàm sinh của dãy $C(n,k)$ đối với n cố định. Giả thiết rằng

$$C_n(x) = \sum_k C(n,k)\, x^k.$$

Nếu ta nhân hệ thức hồi quy bởi x^k và cộng đối với $\forall k \geq 1$ ta thu được

$$C_n(x) - 1 = (C_{n-1}(x) - 1) + xC_{n-1}(x)$$

với mỗi $n \geq 0$ và $C_0(x) = 1$. Bây giờ với mỗi $n \geq 1$ ta có:

$$C_n(x) = (1+x)\, C_{n-1}(x)\,.$$

Cuối cùng ta có $C_n(x) = (1+x)^n$. Do đó $C(n,k)$ là hệ số của x^k trong khai triển $(1+x)^n$ và đúng là C_n^k.

Ta đã sử dụng công thức nhị thức, và điều đó có được bằng việc sử dụng kĩ thuật tổ hợp, mà kỹ thuật này lại sử dụng kết quả ta muốn chứng minh. May thay, có cách chứng minh công thức nhị thức dựa vào khai triển Taylor.
Ta cũng có thể xét hàm sinh của dãy $C_n(x)$.

$$\sum_n C_n(x)\, y^n = \sum_n \sum_k C_n^k x^k y^n = \sum_n (1+x)^n y^n = \frac{1}{1 - y(1+x)}.$$

Theo cách đó ta có $\binom{n}{k} = \left[x^k y^n\right] (1 - y(1+x))^{-1}$.
Bây giờ ta có thể tính tổng $\sum\limits_n \binom{n}{k} y^n$.

$$\begin{aligned}\left[x^k\right] \sum_n \sum_k \binom{n}{k} x^k y^n &= \left[x^k\right] \frac{1}{1 - y(1+x)} = \frac{1}{1-y} \left[x^k\right] \frac{1}{1 - \dfrac{y}{1-y} x} \\ &= \frac{1}{1-y} \left(\frac{y}{1-y}\right)^k = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}\end{aligned}$$

Do đó ta có các đồng nhất thức

$$\sum_k \tbinom{n}{k} x^k = (1+x)^n;$$

$$\sum_n \tbinom{n}{k} y^n = \frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}.$$

Nhận xét:
Với $n < k$ ta định nghĩa $\tbinom{n}{k} = 0$.

Bài toán 2.2.5. Tìm số hạng tổng quát của dãy

$$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n, \qquad n \geq 0$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = -2$

Giải:
Nếu A là hàm sinh của dãy tương ứng, thì

$$\frac{A - 2 - 0.x - (-2)x^2}{x^3} = 6\frac{A - 2 - 0.x}{x^2} - 11\frac{A-2}{x} + 6A.$$

Từ đó ta dễ dàng thu được

$$A = \frac{20x^2 - 12x + 2}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3} = \frac{20x^2 - 12x + 2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}.$$

Ta muốn tìm hệ số thực B, C và D sao cho:

$$\frac{20x^2 - 12x + 2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)} = \frac{B}{(1-x)} + \frac{C}{(1-2x)} + \frac{D}{(1-3x)}.$$

Ta sẽ nhân cả hai vế với $(1-x)$ và đặt $x = 1$ để thu được

$$B = \frac{20 - 12 + 2}{(-1)(-2)} = 5.$$

Nhân với $(1-2x)$ và đặt $x = \dfrac{1}{2}$ ta thu được

$$C = \frac{5 - 6 + 2}{-\dfrac{1}{4}} = -4.$$

Nếu thay thế giá trị tìm được của B và C và đặt $x = 0$ ta thu được $B + C + D = 2$ từ đó suy ra $D = 1$. Cuối cùng ta có

$$A = \frac{5}{1-x} - \frac{4}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - 4.2^n + 3^n\right) x^n.$$

Suy ra $a_n = 5 - 2^{n+2} + 3^n$.

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng đôi khi ta gặp khó khăn trong việc tìm công thức hiện của các phần tử của dãy.

Bài toán 2.2.6. Cho dãy có $a_0 = 0, a_1 = 2$ và với

$$n \geq 0 : a_{n+2} = -4a_{n+1} - 8a_n$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Giải:

Giả sử A là hàm sinh của dãy. Hệ thức hồi quy có thể viết dưới dạng

$$\frac{A - 0 - 2x}{x^2} = -4\frac{A-0}{x} - 8A,$$

suy ra

$$A = \frac{2x}{1 + 4x + 8x^2}.$$

Các nghiệm $r_1 = -2 + 2i$ và $r_2 = -2 - 2i$ của phương trình không là số thực. Điều này ảnh hưởng nhiều đến việc tìm kiếm B và C. Không để ý đến điều đó, ta có:

$$\frac{2x}{1 + 4x + 8x^2} = \frac{B}{1 - r_1 x} + \frac{C}{1 - r_2 x}..$$

Suy ra $B = -\dfrac{i}{2}; C = \dfrac{i}{2}$.

Tại sao ta xét nghiệm của đa thức $x^2 + 4x + 8$ trong khi mẫu thức của A là $8x^2 + 4x + 1$? Nếu ta xét nghiệm của mẫu thức thực sự ta sẽ thu được phân số có dạng $\dfrac{B}{r_1 - x}$, và nó sẽ cho ta rắc rối nếu ta sử dụng chuỗi lũy thừa.Tuy nhiên ta có thể biểu diễn mẫu thức dạng $x^2(8 + 4.\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2})$ và xét nó như một đa thức của $\dfrac{1}{x}$.

Khi đó mẫu thức trở thành $x^2 \left(\dfrac{1}{x} - r_1\right)\left(\dfrac{1}{x} - r_2\right)$.

Bây giờ ta có thể tiến hành giải bài toán. Ta thu được

$$A = \frac{-\frac{i}{2}}{1 - (-2 + 2i)\,x} + \frac{\frac{i}{2}}{1 - (-2 - 2i)\,x}.$$

Từ đó ta có $A = -\frac{i}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2+2i)^n x^n + \frac{i}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2-2i)^n x^n$.

Suy ra

$$a_n = -\frac{i}{2}(-2+2i)^n + \frac{i}{2}(-2-2i)^n.$$

Nhưng số hạng của dãy là thực, không là phức! Ta có thể đơn giản hóa các biểu thức cho a_n. Vì

$$-2 \pm 2i = 2\sqrt{2}e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}$$

ta thu được

$$a_n = \frac{i}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\left(\cos\frac{3n\pi}{4} - i\sin\frac{3n\pi}{4}\right) - \left(\cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}\right)\right).$$

Do đó

$$a_n = \left(2\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{3n\pi}{4}.$$

Viết một cách khác

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 8k \\ \left(2\sqrt{2}\right)^n, & n = 8k+6 \\ -\left(2\sqrt{2}\right)^n, & n = 8k+2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}\right)^n, & n = 8k+1; n = 8k+3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}\right)^2, & n = 8k+5; n = 8k+7 \end{cases}$$

Bây giờ ta sẽ xét phương trình hồi quy phức tạp hơn.

Bài toán 2.2.7. Tìm số hạng tổng quát của dãy x_n cho bởi

$$x_0 = x_1 = 0, \quad x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n, n \geq 0.$$

Giải:

Giả sử $X(t)$ là hàm sinh của dãy đã cho. Sử dụng các phương pháp như các ví dụ trên ta có:

$$\frac{X}{t^2} - 6\frac{X}{t} + 9X = \frac{1}{1-2t} + \frac{t}{(1-t)^2}$$

Giản ước biểu thức trên ta có

$$X(t) = \frac{t^2 - t^3 - t^4}{(1-t)^2(1-2t)(1-3t)^2}$$

Do đó

$$X(t) = \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x} - \frac{5}{3(1-3x)} + \frac{5}{12(1-3x)^2}$$

Dãy tương ứng với số hạng đầu tiên là $\frac{n+1}{4}$, trong khi dãy ứng với các số hạng thứ hai, thứ ba và thứ tư là $2^n, 5.3^{n-1}$, và $\frac{5(n+1)3^{n+1}}{12}$ tương ứng ta có

$$x_n = \frac{2^{n+2} + n + 1 + 5(n-3)3^{n-1}}{4}.$$

Bài toán 2.2.8. Cho $f_1 = 1, f_{2n} = f_n$ và $f_{2n+1} = f_n + f_{n+1}$. Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Giải:

Ta thấy dãy là xác định bởi vì mỗi số hạng được xác định bằng cách sử dụng những số hạng đã xác định trước đó. Giả sử hàm sinh F được cho bởi

$$F(x) = \sum_{n\geq 1} f_n x^{n-1}.$$

Nhân hệ thức đầu tiên với x^{2n-1}, thứ hai với x^{2n} và cộng tất cả với $n \geq 1$ ta thu được:

$$f_1 + \sum_{n\geq 1} f_{2n}x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f_{2n+1}x^{2n} = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n} + \sum_{n\geq 1} f_{n+1}x^{2n}.$$

Hoặc một cách tương đương

$$\sum_{n\geq 1} f_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n-1} + \sum_{n\geq 1} f_n x^{2n} + \sum_{n\geq 1} f_{n+1}x^{2n}.$$

Điều này chính xác có nghĩa là $F(x) = x^2 F(x^2) + xF(x^2) + F(x^2)$, tức là

$$F(x) = (1 + x + x^2) F(x^2).$$

Hơn nữa ta có

$$F(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^i} + x^{2^{i+1}}\right).$$

Ta có thể thấy rằng dãy được xác định theo công thức trước có một tính chất thú vị. Với mỗi số n nguyên dương ta thực hiện quy trình sau: viết n trong khai triển nhị phân, loại bỏ khối số không cuối cùng (nếu có) và nhóm các chữ số còn lại thành ít nhất có thể khối chữ số sao cho mỗi khối chứa các chữ số cùng loại. Nếu đối với hai số m và n mà các tập hợp khối chữ số tương ứng như nhau thì ta có $f_m = f_n$. Ví dụ khai triển nhị phân của 22 là 10110, do đó tập khối chữ số tương ứng là $\{1, 0, 11\}$, trong khi số 13 được biểu diễn là 1101 và có cùng tập khối chữ số là $\{11, 0, 1\}$. Ta có $f_{(22)} = f_{(13)}$. Dễ dàng xác minh được $f_{(22)} = f_{(13)} = 5$. Từ khai triển ta kết luận rằng f_n là số các biểu diễn của n như là một tổng các lũy thừa của hai, sao cho không có hai lũy thừa của hai được lấy từ cùng một tập của bộ $\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 8\}$.

2.3 Phương pháp dầu rắn

Phương pháp dầu rắn rất hữu ích trong việc đánh giá tổng tổ hợp khác nhau, thường rất lớn, và trong việc chứng minh các đồng nhất thức tổ hợp.

Phương pháp sử dụng để tính nhiều tổng, và không phải là phổ dụng. Do đó ta sẽ sử dụng một số ví dụ điển hình để chứng tỏ tính hiệu quả và minh họa cho phương pháp.

Nguyên tắc chung là như sau: Giả sử ta muốn tính tổng S. Đầu tiên ta xác định biến tự do mà S phụ thuộc vào nó. Giả sử rằng n là một biến như vậy và giả sử $S = f(n)$. Sau đó ta xác định $F(x)$, hàm sinh của dãy $f(n)$. Ta sẽ nhân S với x^n và lấy tổng theo tất cả n. Tại thời điểm này ta có(ít nhất) một tổng kép, tổng ngoài theo n và trong theo S. Khi đó ta tráo đổi thứ tự lấy tổng và thu được giá trị của tổng trong theo n.

Theo cách như vậy ta nhận một số hệ số của hàm sinh, mà chúng thực

ra là giá trị của S phụ thuộc vào n.
Trong việc giải các bài toán loại này ta thường gặp nhiều tổng. Ở đây ta sẽ liệt kê một số loại tổng này.

Đồng nhất thức có sự tham gia của $\sum\limits_n \binom{m}{n} x^n$ đã biết từ trước

$$(1+x)^m = \sum_n \binom{m}{n} x^n.$$

Đôi khi ta sẽ sử dụng đồng nhất thức đối với $\sum\limits_n \binom{m}{k} x^n$ đã đề cập trong danh sách hàm sinh:

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{k} x^n.$$

Trong số các tổng chung ta sẽ tính những tổng chỉ theo các chỉ số chẵn hoặc lẻ.
Ví dụ ta có $(1+x)^m = \sum\limits_n \binom{m}{n} x^m$, do đó $(1-x)^m = \sum\limits_n \binom{m}{n} (-x)^m$.
Cộng và trừ ta được

$$\sum_n \binom{m}{2n} x^{2n} = \frac{((1+x)^m + (1-x)^m)}{2}.$$

$$\sum_n \binom{m}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{((1+x)^m - (1-x)^m)}{2}.$$

Trong kiểu tương tự ta chỉ ra được

$$\sum_n \binom{2n}{m} x^{2n} = \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1-x)^{m+1}}\right).$$

Và

$$\sum_n \binom{2n+1}{m} x^{2n+1} = \frac{x^m}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1-x)^{m+1}}\right).$$

Đồng nhất sau cũng được sử dụng khá thường xuyên

$$\sum_n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{2x}\left(1-\sqrt{1-4x}\right).$$

Bài toán 2.3.1. Đánh giá tổng $\sum\limits_{k} \binom{k}{n-k}$.

Giải:
Cho n là biến tự do và kí hiệu tổng $f(n) = \sum\limits_{k} \binom{k}{n-k}$.
Giả sử $F(x)$ là hàm sinh của dãy $f(n)$, tức là

$$F(x) = \sum_{n} x^n f(n) = \sum_{n} x^n \sum_{k} \binom{k}{n-k} = \sum_{n} \sum_{k} \binom{k}{n-k} x^n.$$

Ta có thể viết phương trình trước như sau

$$F(x) = \sum_{k} \sum_{n} \binom{k}{n-k} x^n = \sum_{k} x^k \sum_{n} \binom{k}{n-k} x^{n-k}.$$

Suy ra

$$F(x) = \sum_{k} x^k (1+x)^k = \sum_{k} \left(x + x^2\right)^k = \frac{1}{1-(x-x^2)} = \frac{1}{1-x+x^2}.$$

Tuy nhiên nó tương tự như hàm sinh của dãy Fibonaci, tức là
$f(n) = F_{n+1}$ và ta có

$$\sum_{k} \binom{k}{n-k} = F_{n+1}.$$

Bài toán 2.3.2. Đánh giá tổng $\sum\limits_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$.

Giải: Nếu n là số cố định, khi đó m là biến tự do mà tổng phụ thuộc vào. Giả sử $f(m) = \sum\limits_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$ và giá sử $F(x)$ là hàm sinh của dãy $f(m)$, tức là $F(x) = \sum\limits_{m} f(m) x^m$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum f(m) x^m = \sum_{m} x^m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} \\ &= \sum_{k \le n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{m \le k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k \le m} \binom{n}{k} (1+x)^k \end{aligned}$$

Ở đây ta đa sử dụng $\sum\limits_{m \le k} \binom{k}{m} x^m = (1+x)^k$. Hơn nữa,

$$F(x) = (-1)^n \sum_{k \le n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (1+x)^k = (-1)^n ((1+x)-1)^n = (-1)^n x^n.$$

Do đó ta nhận được $F(x) = (-1)^n x^n$ và vì đó là hàm sinh của dãy $f(m)$. nên ta có

$$f(m) = \begin{cases} (-1)^n, n = m \\ 0, m < n \end{cases}$$

Bài toán 2.3.3. Đánh giá tổng $\sum\limits_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$.

Giải:

Đặt $f(m) = \sum\limits_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m}$ và $F(x) = \sum\limits_{m} x^m f(m)$. Khi đó ta có

$$F(x) = \sum_m x^m f(m) = \sum_m x^m \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \sum_{k\le n} \binom{n}{k} \sum_{m\le k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k\le n} \binom{n}{k}(1+x)^k,$$

Suy ra

$$F(x) = (2+x)^n.$$

Vì

$$(2+x)^n = \sum_m \binom{n}{m} 2^{n-m} x^m$$

nên giá trị của tổng cần tính là $f(m) = \binom{n}{m} 2^{n-m}$.

Bài toán 2.3.4. Đánh giá $\sum\limits_{k} \binom{n}{[\frac{k}{2}]} x^k$.

Giải:

Ta có thể phân chia thành hai tổng

$$\sum_k \binom{n}{[\frac{k}{2}]} x^k = \sum_{k=2k_1} \binom{n}{[\frac{2k_1}{2}]} x^{2k_1} + \sum_{k=2k_2+1} \binom{n}{[\frac{2k_2+1}{2}]} x^{2k_2+1}$$
$$= \sum_{k_1} \binom{n}{k_1} \left(x^2\right)^{k_1} + x \sum_{k_2} \binom{n}{k_2} \left(x^2\right)^{k_2} = \left(1+x^2\right)^n + x\left(1+x^2\right)^n$$

Hoặc một cách tương đương $\sum\limits_{k} \binom{n}{[\frac{k}{2}]} x^k = (1+x)\left(1+x^2\right)^n$.

Bài toán 2.3.5. Xác định các phần tử của dãy

$$f(m) = \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{[\frac{m-k}{2}]} y^k.$$

Giải:

Đặt $F(x) = \sum\limits_m x^m f(m)$. Khi đó ta có

$$F(x) = \sum_m x^m \sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} y^k = \sum_k \binom{n}{k} y^k \sum_m \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} x^m$$
$$= \sum_k \tbinom{n}{k} y^k x^k \sum_m \binom{m-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} x^{m-k} = \sum_k \tbinom{n}{k} y^k x^k (1+x)\left(1+x^2\right)^{n-k}$$

Do đó

$$F(x) = (1+x) \sum_k \tbinom{n}{k} \left(1+x^2\right)^{n-k} (xy)^k = (1+x)\left(1+x^2+xy\right)^n.$$

Với $y = 2$ ta có $F(x) = (1+x)^{2n+1}$ suy ra $F(x)$ là hàm sinh của dãy $\binom{2n+1}{m}$ và ta thu được đồng nhất thức tổ hợp sau

$$\sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} 2^k = \binom{2n+1}{m}$$

Đặt $y = -2$ ta thu được
$F(x) = (1+x)(1-x)^{2n} = (1-x)^{2n} + x(1-x)^{2n}$ do đó hệ số x^m bằng $\binom{2n}{m}(-1)^m + \binom{2n}{m-1}(-1)^{m-1} = (-1)^m \left[\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}\right]$
suy ra

$$\sum_k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]} (-2)^k = (-1)^m . [\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}]$$

Bài toán 2.3.6. Chứng minh rằng

$$\sum_k \tbinom{n}{k} \tbinom{k}{j} x^k = \tbinom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}$$

với mỗi $n \geq 0$.

Giải:

Nếu ta cố định n và giả sử j là biến tự do và

$$f(j) = \sum \tbinom{n}{k} \tbinom{k}{j} x^k;$$

$$g\left(j\right)=\binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j}.$$

Khi đó hàm sinh tương ứng là

$$F\left(y\right)=\sum_j y^j f\left(j\right),$$

$$G\left(y\right)=\sum_j y^j g\left(j\right).$$

Ta cần chỉ ra rằng $F(y)=G(y)$. Ta có

$$F\left(y\right)=\sum_j y^j\sum_k\binom{n}{k}\binom{k}{j}x^k=\sum_k\binom{n}{k}x^k\sum_j\binom{k}{j}y^j=\sum_k\binom{n}{k}x^k(1+y)^k$$

Do đó

$$F\left(y\right)=\left(1+x+xy\right)^n$$

.

Mặt khác ta có

$$G\left(y\right)=\sum_j y^j\binom{n}{j}x^j(1+x)^{n-j}=\sum_j\binom{n}{j}(1+x)^{n-j}(xy)^j=(1+x+xy)^n.$$

Do đó $F(y)=G(y)$.

Sức mạnh thực sự của phương pháp hàm sinh được thể hiện trong các ví dụ sau:

Bài toán 2.3.7. Đánh giá tổng $\sum_k\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$, với $m,n\geq 0$.

Giải:

Vì có quá nhiều biến nên các phương pháp tổ hợp sơ cấp không cung cấp một cách hiệu quả để xử lý tổng. Vì n chỉ xuất hiện một vị trí trong tổng, một cách tự nhiên là xét tổng như một hàm của n. Giả sử $F(x)$ là chuỗi sinh của hàm như vậy. Khi đó

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_n x^n \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \\
&= \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{-k}\sum_k \binom{n+k}{m+2k}x^{n+k} \\
&= \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{-k}\frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}} \\
&= \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}\sum \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}\left\{\frac{-x}{(1-x)^2}\right\}^k \\
&= \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\sqrt{1+\frac{4x}{(1-x)^2}}\right\} \\
&= \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\frac{1+x}{1-x}\right\} = \frac{x^m}{(1-x)^m}.
\end{aligned}
$$

Đó là hàm sinh của dãy $\binom{n-1}{m-1}$, nó cho ta

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

Bài toán 2.3.8. Chứng minh đồng nhất thức

$$\sum_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.$$

Giải:

Giả sử $F(x) = \sum\limits_m x^m \sum\limits_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n}$ và $G(x) = \sum\limits_m x^m \binom{2m+1}{2n}$ là hàm sinh của biểu thức vế phải và vế trái của đẳng thức cần chứng minh. Ta sẽ chỉ ra rằng $F(x) = G(x)$. Ta có

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_m x^m \sum_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n} = \sum_k \binom{2n+1}{2k}\sum_m \binom{m+k}{2n} \\
&= \sum_k \binom{2n+1}{2k}\sum_m \binom{m+k}{2n}x^m = \sum_k \binom{2n+1}{2k}x^{-k}\sum_m \binom{m+k}{2n}x^{m+k} \\
&= \sum_k \binom{2n+1}{2k}x^{-k}\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}} = \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}\sum_k \binom{2n+1}{2k}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{2k}
\end{aligned}
$$

Ta biết rằng

$$\sum_k \binom{2n+1}{2k}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{2k} = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1}\right)$$

nên

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{2n-1}\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)^{2n+1}} - \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{2n+1}}\right).$$

Mặt khác

$$G(x) = \sum_m \binom{2m+1}{2n} x^m = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\sum_m \binom{2m+1}{2n}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2m+1}.$$

Suy ra

$$G(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2n}}{2}\left(\frac{1}{\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{2n+1}} - (-1)^{2n}\frac{1}{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{2n+1}}\right)\right].$$

Hay

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^{2n-1}\left(\frac{1}{\left(1-\sqrt{x}\right)^{2n+1}} - \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^{2n+1}}\right).$$

Vậy $F(x) = G(x)$.

Bài toán 2.3.9. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}.$$

Giải

Cho n là biến tự do trong vế trái và vế phải của $F(x)$ và $G(x)$. Ta cần chứng minh đẳng thức của hàm sinh này.

$$F(x) = \sum_n x^n \sum_{0\le k\le n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \sum_{0\le k}\binom{2k}{k}2^{-2k}\sum_n \binom{2n}{2k}x^n 2^{2n}$$

$$F(x) = \sum_{0\le k}\binom{2k}{k} 2^{-2k}\sum_n \binom{2n}{2k}\left(2\sqrt{x}\right)^{2n}.$$

Bây giờ ta sử dụng tổng theo lũy thừa chẵn và nhận được

$$\sum_n \binom{2n}{2k}\left(2\sqrt{x}\right)^{2n} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x}\right)^{2k}\left(\frac{1}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^{2k+1}} + \frac{1}{\left(1+2\sqrt{x}\right)^{2k+1}}\right).$$

Hơn nữa ta có:

$$F(x) = \frac{1}{2\left(1-2\sqrt{x}\right)}\sum_k \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}\right)^k + \frac{1}{2\left(1+2\sqrt{x}\right)}\sum_k \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{\left(1+2\sqrt{x}\right)^2}\right)$$

Vì $\sum\limits_n \binom{2n}{n}x^n = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ ta nhận được

$$F(x) = \frac{1}{2\left(1-2\sqrt{x}\right)}.\frac{1}{\sqrt{1-4\dfrac{x}{\left(1-2\sqrt{x}\right)^2}}} + \frac{1}{2\left(1+2\sqrt{x}\right)}.\frac{1}{\sqrt{1-4\dfrac{x}{\left(1+2\sqrt{x}\right)^2}}}.$$

Suy ra

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-4\sqrt{x}}} + \frac{1}{2\sqrt{1+4\sqrt{x}}}.$$

Mặt khác đối với G(x) ta muốn nhận được tổng $\sum\limits_n \binom{4n}{2n} x^n$.

Vì $\sum\limits_n \binom{2n}{n} x^n = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ ta có $\sum\limits_n \binom{2n}{n}(-x)^n = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}$,
do đó

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{1+4\sqrt{x}}}\right)$$

và $F(x) = G(x)$.

Bài toán sau đây khó hơn một chút vì ý tưởng thông thường của phương pháp dầu rắn không đưa đến kết quả.

Bài toán 2.3.10. Cho n và p, hãy tính

$$\sum_k \binom{2\mathrm{n}+1}{2p+2k+1}\binom{p+k}{k}.$$

Giải:

Để có những công thức ngắn hơn ta đặt $r = p + k$. Nếu ta giả thiết rằng

n là biến tự do, thì tổng bằng

$$f(n) = \sum_r \binom{2n+1}{2\mathrm{r}+1}\binom{r}{k}.$$

Lấy $F(x) = \sum_n x^{2n+1} f(n)$. Điều này khá tự nhiên vì hệ số nhị thức chứa số hạng $2n+1$. Ta có

$$F(x) = \sum_n x^{2n+1} \sum_r \binom{2n+1}{2\mathrm{r}+1}\binom{r}{p} = \sum_r \binom{r}{p} \sum_n \binom{2n+1}{2\mathrm{r}+1} x^{2n+1}.$$

Vì

$$\sum_n \binom{2n+1}{2\mathrm{r}+1} x^{2n+1} = \frac{x^{2\mathrm{r}+1}}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{2\mathrm{r}+2}} + \frac{1}{(1+x)^{2\mathrm{r}+2}}\right)$$

ta nhận được

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{x}{(1-x)^2}\sum_r \binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^r + \frac{1}{2}.\frac{x}{(1+x)^2}\sum_r \binom{r}{p}\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^r$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{x}{(1-x)^2}.\frac{\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^p}{\left(1-\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^{p+1}} + \frac{1}{2}.\frac{x}{(1+x)^2}.\frac{\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^p}{\left(1-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^{p+1}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}.\frac{x^{2p+1}}{(1-2x)^{p+1}} + \frac{1}{2}.\frac{x^{2p+1}}{(1+2x)^{p+1}} = \frac{x^{2p+1}}{2}\left((1+2x)^{-p-1} + (1-2x)^{-p-1}\right)$$

Suy ra $f(n) = \frac{1}{2}\left(\binom{-p-1}{2n-2p} 2^{2n-2p} + \binom{-p-1}{2n-2p} 2^{2n-2p}\right)$.
Và sau khi đơn giản hóa ta có $f(n) = \binom{-p-1}{2n-2p} 2^{2n-2p}$.

2.4 Một số bài tập

1) Chỉ ra rằng đối với dãy các số Fibonaci ta có

$$F_0 + F_1 + ... + F_n = F_{n+2} + 1$$

2) Cho số nguyên dương n. Giả sử A là số các cách mà n có thể được phân tích thành một tổng các số nguyên lẻ. Giả sử B là số cách mà n

có thể được phân tích như tổng các số nguyên khác nhau. Chứng minh rằng $A = B$.

3) Tìm số các hoán vị mà không có điểm cố định của tập $\{1, 2, ..., n\}$.

4) Đánh giá $\sum\limits_{k} (-1)^k \binom{n}{3k}$.

5) Cho $n \in \mathbb{N}$ và giả thiết rằng:

có các nghiệm R_1 trong $\mathbb{N}_0^2$.

có các nghiệm R_2 trong $\mathbb{N}_0^2$.

.

.

.

có các nghiệm R_n trong $\mathbb{N}_0^2$.

có các nghiệm R_{n+1} trong $\mathbb{N}_0^2$.

Chứng minh rằng $\sum\limits_{k} R_k = n + 1$.

6) Đa thức $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là đối xứng nếu với mỗi hoán vị $\sigma \in S_n$ ta có $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ta sẽ xét một số lớp các đa thức đối xứng. Lớp thứ nhất chứa các đa thức dạng

$$\sigma_k (x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i_1 < ... < i_k} x_{i_1} ... x_{i_k}$$

với $1 \le k \le n$, $\sigma_0 = 1$ và $\sigma_k = 0$ với $k > n$. Lớp các đa thức đối xứng khác là các đa thức có dạng sau:

$$p_k (x_1, ..., x_n) = \sum_{i_1 + ... + i_n = k} x_1^{i_1} ... x_n^{i_n}, i_1, ..., i_n \in N_0.$$

Lớp thứ ba các đa thức có dạng

$$\mathrm{s}_k (x_1, ..., x_n) = x_1^k + ... + x_n^k.$$

Chứng minh các mối quan hệ sau đây giữa các đa thức giới thiệu ở trên:

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r p_{n-r} = 0,$$

$$np_n = \sum_{r=1}^{n} s_r p_{n-r}$$

và

$$n\sigma_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} s_{\mathrm{r}} \sigma_{n-r}.$$

7) Giả sử với $n \in N$ tồn tại dãy các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ sao cho các tổng

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, ..., a_{n-1} + a_n.$$

$$b_1 + b_2, b_1 + b_3, ..., b_{n-1} + b_n$$

là như nhau sai khác một hoán vị. Chứng minh rằng n là một lũy thừa của 2.

8) Chứng minh rằng cứ duy nhất một cách phân hoạch các số tự nhiên thành hai tập A và B sao cho: với mỗi số n nguyên không âm (kể cả 0), số các cách viết n dạng $a_1 + a_2$, $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ ít nhất là 1, và bằng số các cách mà nó có thể biểu diễn dạng $b_1 + b_2$, $b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2$.

9) Cho một số (ít nhất hai, nhưng hữu hạn) cấp số cộng. Giả sử mỗi số tự nhiên thuộc đúng một trong các cấp số đó. Chứng minh rằng tồn tại hai cấp số có chung công sai.

10) Chứng minh rằng trong lịch hiện tại ngày 13 hàng tháng có nhiều khả năng là thứ 6.

2.5 Hướng dẫn giải một số bài tập

1) Theo định lý 2.1.15 hàm sinh của tổng n số hạng đầu tiên của dãy (tức là vế trái) là bằng $\dfrac{F}{1-x}$, trong đó $F = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ (F là hàm sinh của dãy Fibonacei). Ở vế phải ta có

$$\frac{F-x}{x} - \frac{1}{1-x}$$

và suy ra điều cần tìm sau một số tính toán.

2) Đầu tiên ta sẽ chỉ ra rằng hàm sinh của số các phân hoạch lẻ bằng

$$\left(1+x+x^2+...\right)\left(1+x^3+x^6+...\right)\left(1+x^5+x^{10}+...\right)... = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^{2k+1}}.$$

Thật vậy, có thể tương ứng mỗi phân hoạch trong đó i xuất hiện a_i lần với đúng một số hạng với hệ số 1 trong tích. Số hạng đó là bằng $x^{1a_1+3a_3+5a_5+...}$.

Hàm sinh của số các phân hoạch tổng những tổng khác nhau bằng

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)... = \prod_{k\geq 1}(1+x)^k$$

vì từ mỗi thừa số ta có thể hoặc không thể lấy một lũy thừa của x, điều này tương ứng với việc lấy hay không lấy số hạng của phân hoạch. Bằng một số biến đổi sơ cấp ta nhận được.

$$\prod_{k\geq 1}\left(1+x^k\right) = \prod_{k\geq 1}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \frac{\left(1-x^2\right)\left(1-x^4\right)...}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)...}$$

$$= \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-x^{2k+1}}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

3) Đây là ví dụ minh họa cho tính hiệu quả của việc sử dụng hàm sinh mũ. Giả thiết rằng số cần tìm là D_n và giả sử $D(x) \overset{\text{esr}}{\leftrightarrow} D_n$. Số các hoán vị có đúng k cho các điểm cố định đã cho là bằng D_{n+k}, do đó tổng số các hoán vị với đúng k điểm cố định bằng $\binom{n}{k}D_{n-k}$, vì ta có thể chọn k điểm cố định theo $\binom{n}{k}$ cách. Do tổng số các hoán vị là $n!$, nên

$$n! = \sum_k \binom{n}{k}D_{n-k}.$$

Và theo định lí 2.1.19 ta có

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x).$$

Suy ra $D(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Vì e^{-x} là hàm sinh của dãy $\dfrac{(-1)^n}{n!}$, ta thu được:

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)\frac{1}{n!}\right).$$

4) Ý tưởng là xét hàm sinh

$$F(x) = \sum_k \tbinom{n}{3k} x^{3k}.$$

Tổng cần tìm bằng $f(-1)$. Vấn đề bây giờ là làm thế nào để lập công thức nhị thức mà bỏ qua tất cả các số hạng, trừ những só hạng bậc $3k$. Ta sẽ sử dụng đồng nhất thức sau đây đối với căn của đơn vị trong mặt phẳng phức:

$$\sum_{\varepsilon^r=1} \varepsilon^n = \begin{cases} r, r\,|n \\ 0, \text{trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Giả sử $C(x) = (1+x)^n$ và cho $1, \varepsilon$ và ε^2 là căn bậc của 1. Khi đó ta có

$$F(x) = \frac{C(x) + C(\varepsilon x) + C\left(\varepsilon^2 x\right)}{3}.$$

Với $x = -1$ ta có

$$F(-1) = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right\}.$$

Và sau khi rút gọn ta có kết quả

$$\sum_k (-1)^k \tbinom{n}{3k} = 2.3^{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right).$$

5) Số các nghiệm của $x + 2y = n$ trong N_0^2 là hệ số của t^n trong

$$\left(1 + t + t^2 + ...\right)\left(1 + t^2 + t^4 + ...\right) = \frac{1}{1-t}.\frac{1}{1-t^2}.$$

Lý do là mỗi cặp (x, y) thỏa mãn điều kiện của bài toán làm tăng hệ số của t^n thêm 1 vì nó xuất hiện như số hạng của tổng dạng $t^x t^{2y} = t^{x+2y}$. Tổng quát hơn, số các nghiệm của $kx + (k+1)y = n + 1 - k$ là hệ số của t^{n+1-k} trong $\frac{1}{1-t^k}.\frac{1}{1-t^{k+1}}$., tức là hệ số của t^n trong $\frac{x^{k-1}}{(1-t^k)(1-t^{k+1})}$.

Do đó, $\sum\limits_{k=1}^{n} R_k$ là hệ số của t^n trong

$$\sum_k \frac{t^{k-1}}{(1-t^k)(1-t^{k+1})} = \sum_k \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{1}{1-t^{k+2}} - \frac{1}{1-t^{k+1}}\right) = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Bây giờ rễ dàng nhìn thấy rằng $\sum\limits_k R_k = n + 1$.

6) Hàm sinh của đa thức đối xứng $\sigma_k(x_1, ..., x_n)$ là

$$\sum(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 + tx_i).$$

Hàm sinh của đa thức $p_k(x_1, ..., x_n)$ là $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \prod \dfrac{1}{1 - tx_i}$.

Và hàm sinh của đa thức S_k là $S(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k t^k = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{1 - tx_i} s_k$.

Các hàm $\sum(t)$ và $P(t)$ thỏa mãn điều kiện sau $\sum(t) p(-t) = 1$. Nếu ta tính hệ số của tích của $t^n, n \geq 1$ ta thu được

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sigma_r p_{n-r} = 0.$$

Chú ý rằng $\log P(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \log \dfrac{1}{1 - tx_i}$ và $\log \sum(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \log(1 + tx_i)$.

Bây giờ ta có thể biểu thị $S(t)$ theo $P(t)$ và $\sum(t)$ bởi

$$S(t) = \frac{d}{dt} \log P(t) = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

và

$$S(-t) = -\frac{d}{dt} \log \sum(t) = -\frac{\sum'(t)}{\sum(t)}.$$

Từ công thức đầu tiên ta thu được $S(t) P(t) = P'(t)$ và từ công thức thứ hai $S(-t) \sum(t) = -\sum'(t)$. So sánh hệ số của t^{n+1} ta thu được

$$np_n = \sum_{r=1}^{n} s_r p_{n-r}$$

và

$$n\sigma_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} s_r \sigma_{n-r}$$

7) Giả sử F và G là những đa thức sinh bởi các dãy đã cho:
$F(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + ... + x^{a_n}$ và $G(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + ... + x^{b_n}$. Khi đó

$$F^2(x) - G^2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2\sum_{1\le i\le j\le n} x^{a_i+a_j}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2\sum_{1\le i\le j\le n} x^{b_i+b_j}\right)$$
$$= F\left(x^2\right) - G\left(x^2\right)$$

Vì $F(1) = G(1) = n$, ta có 1 là nghiệm bội k,($k \geq 1$) của đa thức $F(x)\breve{}G(x)$. Khi đó ta có $F(x) - G(x) = (x-1)^k H(x)$. Do đó

$$F(x) + G(x) = \frac{F^2(x) - G^2(x)}{F(x) - G(x)} = \frac{F\left(x^2\right) - G\left(x^2\right)}{F(x) - G(x)}$$
$$= \frac{\left(x^2-1\right)^k H\left(x^2\right)}{(x-1)^k H(x)} = (x+1)^k \frac{H\left(x^2\right)}{H(x)}.$$

Đặt $x = 1$ ta có

$$2n = F(1) + G(1) = (1+1)^k \frac{H\left(x^2\right)}{H(x)} = 2^k.$$

Suy ra $n = 2^{k-1}$.

8) Xét các đa thức sinh bởi các số từ các tập khác nhau:

$$A(x) = \sum_{a\in A} x^a, B(x) = \sum_{b\in B} x^b$$

Điều kiện A và B lập nên phân hoạch toàn bộ tập N mà không giao nhau là tương đương với

$$A(x) + B(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Số các cách mà một số nào đó có thể là biểu diễn dạng $a_1 + a_2$, $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ có hàm sinh.

$$\sum_{a_i,a_j\in A, a_i\neq aj} x^{a_i+a_j} = \frac{1}{2}\left(A^2(x) - A\left(x^2\right)\right).$$

Điều kiện thứ hai có thể biểu diễn như

$$\left(A^2(x) - A\left(x^2\right)\right) = \left(B^2(x) - B\left(x^2\right)\right).$$

Ngoài ra ta có

$$(A(x) - B(x))\frac{1}{1-x} = A\left(x^2\right) - B\left(x^2\right)$$

hoặc tương đương

$$(A(x) - B(x)) = (1-x)\left(A\left(x^2\right) - B\left(x^2\right)\right)$$

Đổi biến i x bởi $x^2, x^4, ..., x^{2^{n-1}}$ ta thu được

$$A(x) - B(x) = \left(A\left(x^{2^n}\right) - B\left(x^{2^n}\right)\right)\prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - x^{2^i}\right).$$

suy ra $A(x) - B(x) = \prod\limits_{i=0}^{\infty}\left(1 - x^{2^i}\right)$.

Tích cuối cùng là chuỗi mà hệ số là ±1, do đó A và B là được xác định duy nhất (vì các hệ số của nó là 1). Cũng không khó khăn để nhận thấy rằng các hệ số dương (tức là hệ số nguồn gốc từ A), đúng là những hệ số tương ứng với các số hạng x^n mà n có thể biểu thị như một tổng các số chẵn $2S$. Điều đó có nghĩa là khai triển nhị phân của n có một số chẵn số $1S$.

9) Giả thiết rằng k cấp số cộng $\{a_i + nb_i\}, (i = 1, 2, ..., k)$ phủ toàn bộ tập các số nguyên dương. Khi đó $\dfrac{z^a}{1-z^b} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} z^{a+ib}$, do đó

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{b_1}} + \frac{z^{a2}}{1-z^{b2}} + ... + \frac{z^{a_k}}{1-z^{b_k}}.$$

Giả sử $|z| \leq 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng số lớn nhất trong số b_i không thể là duy nhất. Giả sử ngược lại, b_1 là số lớn nhất trong các số $b_1, b_2, ..., b_n$ và đặt $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{b_1}}$. Giả sử rằng z tiến đến ε mà $|z| \leq 1$. Ở đây ta có thể chọn ε sao cho $\varepsilon^{b_1} = 1, \varepsilon \neq 1$ và $\varepsilon^{b_i} \neq 1$, $1 < i < k$. Tất cả các số hạng ngoại trừ số hạng đầu tiên hội tụ đến một số nào đó, trong khi số đầu tiên hội tụ đến ∞. Điều đó là không thể!

10) Thứ sáu ngày 13 tương ứng với chủ nhật ngày 1. Kí hiệu các ngày bởi các số 1,2,3,4,...và giả sử t^i tương ứng ngày i. Do đó ngày 01 tháng 01 năm 2001 kí hiệu bởi 1 (hoặc t), ngày thứ 4 tháng 01 năm 2001 bởi

t^4, ... Giả sử A là tập tất cả các ngày (tức là các số tương ứng) mà là ngày đầu của tháng. Chẳng hạn, $1 \in A, 2 \in A, ... A = \{1, 32, 60, ...\}$. Đặt $F_A(t) = \sum\limits_{n \in A} t^n$. Nếu ta thay thế t^{7k} bởi 1, t^{7k+1} bởi t, t^{7k+2} bởi t^2, ... trong đa thức f_A, ta thu được đa thức khác , kí hiệu nó bởi $g_A(t) = \sum\limits_{i=0}^{6} a_i t^i$. Bây giờ số a_i sẽ biểu thị số lần mà ngày thứ i của tuần xuất hiện như ngày mồng một của tháng. Vì ngày 01 tháng 01 năm 2001 là thứ hai, a_1 là số các ngày thứ hai, a_2 là số các ngày thứ ba, ... a_0 là số các ngày chủ nhật.
Ta sẽ xét f_A theo modulus $t^7 - 1$. Đa thức $f_A(t) - g_a(t)$ là chia hết cho $t^7 - 1$. Vì ta chỉ muốn tìm số nào trong các số $a_0, a_1, ..., a_6$ là lớn nhất, chỉ cần xét đa thức modul $q(t) = 1 + t + t^2 + ... + t^6$, là nhân tử của $t^7 - 1$. Giả sử $f_1(t)$ là đa thức biểu thị các ngày đầu tiên của các tháng trong năm 2001. Vì ngày đầu tiên của tháng 1 là thứ hai, thứ ba là ngày đầu tiên của tháng 2,..., thứ bảy là ngày đầu tiên của tháng 12. Ta thu được:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t + t^4 + t^4 + 1 + t^2 + t^5 + 1 + t^3 + t^6 + t + t^4 + t^6 \\ &= 2 + 2t + t^2 + t^3 + 3t^4 + t^5 + 2t^6 \equiv 1 + t + 2t^4 + t^6 \,(\mathrm{mod} q(t)). \end{aligned}$$

Vì thông thường một năm có $365 \equiv 1(\bmod 7)$ ngày, các đa thức $f_2(t)$ và $f_3(t)$ tương ứng cho năm 2002 và 2003, thỏa mãn

$$f_2(t) \equiv t.f_1(t) \equiv t.g_1(t)$$

và

$$f_3(t) \equiv t.f_2(t) \equiv t^2.g_1(t).$$

ở đó đồng dư lấy theo modulo $q(t)$. Sử dụng tính toán đơn giản ta dễ dàng suy ra rằng $f_4(t)$ đối với 2004 là

$$f_4(t) = 2 + 2t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + t^5 + t^6 \equiv 1 + t + t^3 + 2t^4 = g_4(t).$$

Ta sẽ đưa ra một đa thức mới sẽ tính các ngày đầu tiên của tháng cho giai đoạn 2001 – 2004.

$$h_1(t) = g_1(t)\left(1 + t + t^2\right) + g_4(t).$$

Đồng thời sau khi mỗi năm thông thường , các ngày được tiến lên một vị trí, và sau mỗi năm nhuận thì lên hai vị trí, nên sau chu kỳ 4 năm các ngày sẽ được tiến lên 5 vị trí.. Theo cách như vậy ta thu được một đa thức tính số ngày đầu tiên của các tháng giữa năm 2001 và 2100, đó là:

$$p_1(t) = h_1(t)\left(1 + t^5 + t^{10} + ... + t^{115}\right) + t^{120} g_1(t)\left(1 + t + t^2 + t^3\right).$$

Ở đây ta đã viết công thức cuối cho các năm trong dạng

$$g_1(t)\left(1 + t + t^2 + t^3\right),$$

vì năm 2100 không là năm nhuận, và ta không thể thay thế bởi $h_1(t)$. Giai đoạn 100 năm nâng lịch lên 100 ngày (những năm thông thường) và cộng 24 ngày (nhuận), nó đồng dư 5 mođul 7. Ta có

$$g_A(t) = p_1(t)\left(1 + t^5 + t^{10}\right) + t^{15} h_1(t)\left(1 + t^5 + ... + t^{120}\right).$$

Tương tự như trước, 100 năm cuối được tính bởi tổng cuối cùng vì 2400 là nhuận.Bây giờ ta sử dụng:

$$t^{5a} + t^{5(a+1)} + ... + t^{5(a+6)} \equiv 0.$$

Do đó

$$1 + t^5 + ... + t^{23.5} \equiv 1 + t^5 + t^{2.5} \equiv 1 + t^3 + t^5$$

và

$$1 + t^5 + ... + t^{25.5} \equiv 1 + t^5 + t^{2.5} + t^{4.5} \equiv 1 + t^3 + t^5$$

Hơn nữa ta có

$$\begin{aligned}
p_1(t) &\equiv h_1(t)\left(1 + t^3 + t^5\right) + t.g_1(t)\left(1 + t + t^2 + t^3\right) \\
&\equiv g_1(t)\left[\left(1 + t + t^2\right)\left(1 + t^3 + t^5\right) + t\left(1 + t + t^2 + t^3\right)\right] + g_4(t)\left(1 + t^3 + t^5\right) \\
&\equiv g_1(t)\left(2 + 2t + 2t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 2t^5 + t^6\right) + g_4(t)\left(1 + t^3 + t^5\right) \\
&\equiv -g_1(t).t^6 + g_4(t)\left(1 + t^3 + t^5\right)
\end{aligned}$$

Nếu bây giờ ta thay vào công thức $g_A(t)$ ta thu được:

$$\begin{aligned}
g_A(t) &\equiv p_1(t)\left(1 + t^3 + t^5\right) + h_1(t)\left(1 + t + t^3 + t^5\right) \\
&\equiv -g_1(t).t^6\left(1 + t^3 + t^5\right) + g_4(t)\left(1 + t^3 + t^5\right)^2 \\
&+ tg_1(t)\left(1 + t + t^2\right)\left(1 + t + t^3 + t^5\right) + t.g_4(t)\left(1 + t + t^3 + t^5\right) \\
&\equiv g_1(t)\left(t + t^3\right) + g_4(t)\left(2t + 2t^3 + t^5 + t^6\right) \\
&\equiv \left(1 + t + 2t^4 + t^6\right)\left(t + t^3\right) + \left(1 + t + t^3 + 2t^4\right)\left(2t + 2t^3 + t^5 + t^6\right) \\
&\equiv 8 + 4t + 7t^2 + 5t^3 + 5t^4 + 7t^5 + 4t^6 \\
&\equiv 4 + 3t^2 + t^3 + t^4 + 3t^5.
\end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa rằng ngày có nhiều khả năng nhất để làm đầu tháng là ngày chủ nhật (vì a_0 là lớn nhất).
Chúng ta có thể xác định chính xác xác suất đó. Nếu ta sử dụng sự kiện là có 4800 tháng trong giai đoạn của 400 năm , ta có thể dễ dàng nhận được chủ nhật là ngày đầu tiên với đúng 688 lần, thứ hai 684 lần , thứ ba 687, thứ tư 685, thứ năm 685, thứ sáu 687 và thứ bảy 684.

Kết luận

Trong luận văn này, tôi đã trình bày được những vấn đề cơ bản :
(1) Trình bày kiến thức cơ sở về hàm sinh.
(2) Xây dựng một số lớp bài tập liên quan. Qua đó nhận thấy được Hàm Sinh không những chỉ có ứng trong các bài toán đếm hay chứng minh tổ hợp mà nó còn có nhiều ứng dụng khác trong các bài toán thống kê, xác suất, trong lĩnh vực tin học,...Qua các ví dụ trên ta có thể thấy dường như chúng khó có thể giải được nếu như không có hàm sinh. Từ đó mới thấy được ý nghĩa và tầm quan trọng của hàm sinh trong các bài toán tổ hợp.

Tài liệu tham khảo

[1] Nhiều tác giả.Tài liệu tập huấn phát triển chuyên môn Giáo viên trường THPT chuyên, Môn Toán - 2012. Dự án PTGDTHPT.

[2] Các bài toán thi HSG toàn quốc. NXBGD - 2007.

[3] Milan Novakovic.Generating functions. Olympiad training materials - 2012.