ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Nguyễn Ngọc Tĩnh

GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRONG TRƯỜNG SỐ THỰC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của NGND-GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, trường Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của thầy trong suốt quá trình tác giả thực hiện luận văn.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Từ đáy lòng mình, tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các Thầy Cô.

Tác giả xin chân thành cám ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Nguyễn Ngọc Tĩnh

Mục lục

Mở đầu

Chuyên đề phương trình và hệ phương trình trong Toán học cấp THCS và THPT là một trong những đơn vị kiết thức truyền thống, và cực kỳ quan trọng. Các bài toán về phương trình và hệ phương trình có thể xem như những dạng toán cơ bản nhất của chương trình đại số bậc phổ thông. Mỗi bài toán đều có thể có nhiều cách giải. Tuy nhiên việc hệ thống hóa các phương pháp giải sẽ cho phép nhìn nhận các bài toán theo một hệ thống nhất quán. Từ đó các em học sinh có thể thấy được thuật toán chung để giải các bài toán về phương trình và hệ phương trình.

Trong đề tài này, không nhằm khảo sát đầy đủ các khía cạnh của vấn đề về giải, biện luận phương trình, hệ phương trình mà chỉ đưa ra cách giải và biện luận phương trình bâc ba theo phương pháp mới. Cùng với đó là những tính chất, định lý đã được chứng minh về tính chất nghiệm của phương trình bậc ba. Dựa vào cách giải và biện luận của phương trình. Ứng dụng vào giải một số hệ phương trình đại số. Ngoài ra là một số ứng dụng khác của việc giải và biện luận phương trình bậc ba. Luận văn được chia làm ba chương:
Chương 1 trình bày cách giải và biện luận phương trình bâc ba tổng quát và một số tính chất, định lý về tập nghiệm của phương trình bậc ba.
Chương 2 xét các ứng dụng của phương trình bậc ba vào giải hệ phương trình và phương trình lượng giác. Trong chương này đưa ra hệ thống bài tập từ mức độ đơn giản cho đến những bài toán thi chọn học sinh giỏi các tỉnh và học sinh giỏi quốc gia có hướng dẫn giải.
Chương 3 trình bày một số ứng dụng khác của phương trình bậc ba. Cụ thể là ứng dụng của phương trình bậc ba vào để giải một số bài toán phương trình bậc bốn. Ứng dụng của phương trình bậc ba vào giải quyết các bài

toán mà yếu tố nghiệm của phương trình là các yếu tố độ dài trong tam giác. Phần cuối là một số phương trình lượng giác có thể giải được bằng cách đưa về phương trình bậc ba đại số.

Chương 1

Các kiến thức cơ bản về phương trình bậc ba

1.1 Phương pháp giải phương trình bậc ba

Các sách hiện nay chủ yếu trình bày cách giải phương trình bậc ba theo cách cổ điển là công thức Cardano thông qua số phức. Tuy nhiên tôi lựa chọn giải phương trình bậc ba theo cách của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã trình bày trong quyển "Phương pháp giải phương trình và bất phương trình" dựa vào các đồng nhất thức đại số và lượng giác không trên trường số thực.

Nhận xét rằng mọi phương trình bậc ba tổng quát

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0 \quad (a_1 \neq 0)$$

đều có thể đưa được về dạng:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

trong đó

$$a = \frac{b_1}{a_1}, b = \frac{c_1}{a_1}, c = \frac{d_1}{a_1}.$$

Đặt $x = y - \dfrac{a}{3}$, ta có $\left(y - \dfrac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \dfrac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \dfrac{a}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow$ $y^3 - py = q$, trong đó $p = \dfrac{a^3}{3} - b$; $\quad q = -\dfrac{2a^3}{27} + \dfrac{ab}{3} - c.$

1) Nếu $p = 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $y = \sqrt[3]{q}$.

2) Nếu $p > 0$, đặt $y = 2\sqrt{\dfrac{p}{3}}t$ khi đó ta được phương trình $4t^3 - 3t = m$ với $m = \dfrac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}}$.

a) Nếu $|m| < 1$, đặt $m = \cos\alpha$ khi đó phương trình có ba nghiệm
$t_1 = \cos\dfrac{\alpha}{3}$; $\quad t_{2,3} = \cos\dfrac{\alpha \pm \pi}{3}$.

b) Nếu $m = 1$ thì phương trình có nghiệm đơn $t = 1$ và nghiệm bội $t = -\dfrac{1}{2}$

c) Nếu $m = -1$ thì phương trình có nghiệm đơn $t = -1$ và nghiệm bội $t = \dfrac{1}{2}$

d) Nếu $|m| > 1$, đặt $m = \dfrac{1}{2}(d^3 + \dfrac{1}{d^3})$ trong đó $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$, khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = \dfrac{1}{2}\left(d + \dfrac{1}{d}\right) = \dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}})$.

3) Nếu $p < 0$, đặt $y = 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}}t$ khi đó ta được phương trình $4t^3 + 3t = m$ với $m = \dfrac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{p}}$. Đặt $m = \dfrac{1}{2}(d^3 - \dfrac{1}{d^3})$ với $d^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1}$ khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $t = \dfrac{1}{2}(d - \dfrac{1}{d}) = \dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}})$.

1.2 Các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba

Định lý 1.1 (Định lí Viete)**.** Gọi x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình (1.1), khi đó
$T_1 := x_1 + x_2 + x_3 = -a$
$T_2 := x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$
$T_3 := x_1x_2x_3 = -c.$

Từ định lí Viete ta có các tính chất sau:

Tính chất 1.1. $T_4 := \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = -\dfrac{b}{c}$.

Chứng minh. Ta có $T_4 = \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \dfrac{T_2}{T_3} = -\dfrac{b}{c}$.

Tính chất 1.2. $T_5 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b$.

Chứng minh. Ta có $T_5 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = a^2 - 2b$.

Tính chất 1.3. $T_6 := (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = -ab + c.$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}T_6 &= (T_1 - x_1)(T_1 - x_2)(T_1 - x_3) = T_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3\\ &= T_1T_2 - T_3 = -ab + c.\end{aligned}$$

Tính chất 1.4. $T_7 := x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a^3 + 3ab - 3c.$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + x_3)^3 = (x_1 + x_2)^3 + 3(x_1 + x_2)x_3(x_1 + x_2 + x_3) + x_3^3\\ &= x_1^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2^3 + 3T_1(x_1x_3 + x_2x_3) + x_3^3\\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3T_1(x_1x_3 + x_2x_3) + 3x_1x_2(T_1 - x_3)\\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3T_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 3x_1x_2x_3\\ &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3T_1T_2 - 3T_3\\ &\Rightarrow T_7 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3T_1T_2 + 3T_3\\ &= T_1^3 - 3T_1T_2 + 3T_3 = -a^3 + 3ab - 3c.\end{aligned}$$

Tính chất 1.5. $T_8 := (x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2) = a^3-4ab+8c.$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}T_8 &= (T_1 - 2x_3)(T_1 - 2x_1)(T_1 - 2x_2)\\ &= T_1^3 - 2T_1^2(x_1 + x_2 + x_3) + 4T_1(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - 8x_1x_2x_3\\ &= -T_1^3 + 4T_1T_2 - 8T_3 = a^3 - 4ab + 8c.\end{aligned}$$

Tính chất 1.6. $T_9 := \dfrac{x_1 + x_2}{x_3} + \dfrac{x_2 + x_3}{x_1} + \dfrac{x_3 + x_1}{x_2} = \dfrac{ab - 3c}{c} = \dfrac{ab}{c} - 3.$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}T_9 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_3} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2} - 3\\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}) - 3\\ &= T_1T_4 - 3 = \frac{ab}{c} - 3.\end{aligned}$$

Tính chất 1.7. $T_{10} := x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = b^2 - 2ac.$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}T_{10} &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2(x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_2x_3)\\ &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)\\ &= T_1^2 - 2T_3T_1 = b^2 - 2ac.\end{aligned}$$

Tính chất 1.8.

$$T_{11} := x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}T_{11} &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4\\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2)\\ &= T_5^2 - 2T_{10} = (a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)\\ &= a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac.\end{aligned}$$

Tính chất 1.9. với mọi k, l ta có

$$T_{12} := (k + lx_1)(k + lx_2)(k + lx_3) = k^3 - k^2la + kl^2b - l^3c.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}T_{12} &= (k + lx_1)(k + lx_2)(k + lx_3)\\ &= k^3 + k^2l(x_1 + x_2 + x_3) + kl^2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + l^2x_1x_2x_3\\ &= k^3 - k^2la + kl^2b - l^3c.\end{aligned}$$

Tính chất 1.10.

$$T_{13} := \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = \frac{a}{c}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}T_{13} &= \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1}\\ &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3}\\ &= \frac{T_1}{T_3} = \frac{a}{c}.\end{aligned}$$

Tính chất 1.11.

$$T_{14} := \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} = \frac{2b - a^2}{c}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} T_{14} &= \frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1x_2x_3} = \frac{T_5}{T_3} = \frac{a^2 - 2b}{-c} \\ &= \frac{2b - a^2}{c}. \end{aligned}$$

Tính chất 1.12.

$$T_{15} := \frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_3x_1}{x_2} = 2a - \frac{b^2}{c}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} T_{15} &= \frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_3x_1}{x_2} \\ &= \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{T_{10}}{T_3} \\ &= 2a - \frac{b^2}{c}. \end{aligned}$$

Tính chất 1.13.

$$T_{16} := \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} T_{16} &= \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \\ &= \frac{x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2}{x_1^2x_2^2x_3^2} \\ &= \frac{T_{10}}{T_3^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}. \end{aligned}$$

Tính chất 1.14.

$$T_{17} = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2(a^2 - 3b).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} T_{17} &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \\ &= 2(x_1^2 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^2 x_1^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\ &= 2T_5 - 2T_2 = 2(a^2 - 2b) - 2b = 2(a^2 - 3b). \end{aligned}$$

Tính chất 1.15.

$$T_{18} := (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^3.$$

Chứng minh. Khai triển T_{18} và nhóm lại ta có

$$\begin{aligned} T_{18} = {} & (x_1 + x_2 + x_3)^2 (x_1x_2 + x_3x_2 + x_3x_1)^2 \\ & + 18(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_3x_2 + x_3x_1)x_1x_2x_3 \\ & - 4(x_1 + x_2 + x_3)^3 x_1x_2x_3 - 4(x_1x_2 + x_3x_2 + x_3x_1)^3 - 27{x_1}^2{x_2}^2{x_3}^2 \\ = {} & -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^3. \end{aligned}$$

Tính chất 1.16.

$$T_{19} := \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} = \frac{a^2 + b}{-ab + c}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} T_{19} &= \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_3 + x_1} = \frac{{x_1}^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)} \\ &= \frac{T_5 + 3T_2}{T_6} = \frac{a^2 - 2b + 3b}{-ab + c} = \frac{a^2 + b}{-ab + c}. \end{aligned}$$

Tính chất 1.17. Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm thực của phương trình bậc ba

$$a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0 \quad (a_1 \neq 0) \tag{1.2}$$

thì $x_1x_2 \geq \dfrac{4a_1c_1 - b_1^2}{4a_1^2}$.

Chứng minh. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1.2) khi đó

$$a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + d_1 = 0$$
$$a_1x_2^3 + b_1x_2^2 + c_1x_2 + d_1 = 0$$

Trừ vế với vế hai phương trình trên ta được $a_1(x_1^3 - x_2^3) + b_1(x_1^2 - x_2^2) + c_1(x_1 - x_2) = 0$.
Vì x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt nên chia cả hai vế của phương trình cho $x_1 - x_2$ ta được $a_1(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b_1(x_1 + x_2) + c_1 - a_1x_1x_2 = 0$
Theo giả thiết x_1, x_2 tồn tại nên ta có $\Delta = b_1^2 - 4a_1(c_1 - a_1x_1x_2) \geq 0 \Rightarrow x_1x_2 \geq \dfrac{4a_1c_1 - b_1^2}{4a_1^2}$.

Hệ quả 1.1. Nếu phương trình (1.2) có ba nghiệm phân biệt thì

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \geq 3\frac{4a_1c_1 - b_1^2}{4a_1^2}.$$

Hệ quả 1.2. Nếu phương trình (1.1) có ba nghiệm thực thì

$$\begin{cases} x_1x_2 \geq \dfrac{4b - a^2}{4} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \geq 3.\dfrac{4b - a^2}{4}. \end{cases}$$

Định lý 1.2. Phương trình bậc ba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1.1) có 3 nghiệm thực khi và chỉ khi

$$-4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2 \geq 0. \qquad (1.3)$$

Chứng minh. Dựa vào tính chất $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2$

Nếu phương trình (1.1) có hai nghiệm thực thì phương trình (1.3) hiển nhiên đúng.

Ngược lại, giả sử (1.3) đúng nhưng phương trình (1.1) có một nghiệm thực x_1 và hai nghiệm phức $x_2 = A + Bi;\ x_3 = A - Bi \quad (B \neq 0)$ ta có

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 2Bi[(x_1 - A)^2 + B^2]$$

nghĩa là $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = -4B^2[(x_1 - A)^2 + B^2]^2 < 0$, trái với (1.3) điều này chứng tỏ (1.3) đúng thì ba nghiệm của phương trình phải là nghiệm thực.

Định lý 1.3. Phương trình (1.1) có ba nghiệm thực dương khi và chỉ khi có bất đẳng thức (1.3) và

$$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Chứng minh. $x_1 + x_2 + x_3 = -a > 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b > 0$, $x_1x_2x_3 = -c > 0$ Điều này chứng tỏ (1.4) được thỏa mãn.

Ngược lại, nếu (1.3) được thỏa mãn thì theo định lý 1.2 các nghiệm của phương trình (1.1) phải là nhiệm thực. Giả sử $x_1 \leq 0$ thì theo (1.4) ta có $x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c < 0$ chứng tỏ $x_1 \leq 0$ không phải là nghiệm của (1.1) trái với giả thiết $x_1 \leq 0$. Vậy tất cả các nghiệm phải là các số dương.

Định lý 1.4. Nghiệm phương trình (1.1) là độ dài ba cạnh của tam giác khi và chỉ khi ta có (1.3), (1.4) và

$$a^3 - 4ab + 8c > 0 \tag{1.5}$$

Chứng minh. Theo tính chất 1.5 ta có

$$(x_1 + x_2 - x_3)(x_2 + x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2) = a^3 - 4ab + 8c.$$

Nếu nghiệm của (1.1) là độ dài ba cạnh của tam giác thì chúng là số thực dương và $x_1 + x_2 - x_3 > 0,\ x_2 + x_3 - x_1 > 0,\ x_3 + x_1 - x_2 > 0.$

Điều này chứng tỏ (1.3), (1.4), (1.5) được thỏa mãn. Ngược lại vì (1.3), (1.4) được thỏa mãn nên nghiệm x_1, x_2, x_3 là các số thực dương và vì (1.5) được thỏa mãn nên $x_1 + x_2 - x_3 > 0,\ x_2 + x_3 - x_1 > 0,\ x_3 + x_1 - x_2 > 0.$

Thật vậy, nếu một trong ba bất đẳng thức trên có dấu ngược lại, thí dụ $x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$ thì theo (1.5) phải có một bất đẳng thức nữa có dấu ngược lại, chẳng hạn $x_1 + x_3 - x_2 \leq 0$, từ đó suy ra $x_1 \leq 0$, vô lý. Điều này chứng tỏ ba nghiệm dương thỏa mãn (1.5) thì thỏa mãn bất đẳng thức tam giác, nên chúng là ba cạnh của tam giác.

Tiếp theo, ta xét tiêu chuẩn để phương trình bậc hai và bậc ba tổng quát có các nghiệm đều thực thông qua biểu diễn các hệ số của chúng.

Định lý 1.5 (Nguyễn Văn Mậu, [4])**.** Phương trình bậc hai $f(x) = 3x^2 + 2bx + c$ có nghiệm (thực) khi và chỉ khi các hệ số b, c có dạng

$$\begin{cases} b = \alpha + \beta + \gamma \\ c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{cases}$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} \Delta' = b^2 - 3c &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Điều kiện cần: Giả sử phương trình bậc hai có nghiệm thực x_1, x_2. Khi đó, tồn tại đa thức bậc ba có ba nghiệm thực, là nghiệm của $f(x)$, tức là

$$F(x) = (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma).$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Nhận xét 1.1. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + \frac{b}{c}t^2 + \frac{a}{c}t + \frac{1}{c} = 0.$$

Chứng minh. Thay $x = \frac{1}{t}$ vào (1.1) ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét 1.2. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì x_1^2, x_2^2, x_3^2 là nghiệm của phương trình

$$t^3 - (a^2 - 2b)t^2 + (b^2 - 2ac)t - c^2 = 0.$$

Chứng minh. Từ định lý Viete và các tính chất 1.2; 1.7 suy ra điều phải chứng minh

Nhận xét 1.3. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì $(x_1 + x_2), (x_2 + x_3), (x_3 + x_1)$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + 2at^2 + (a^2 + b)t + (ab - c) = 0.$$

Chứng minh. Ta có

1. $(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_1) = 2T_1 = -2a.$

2. $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)(x_3 + x_1) + (x_3 + x_1)(x_1 + x_2)$
$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = T_5 + 3T_2 = a^2 + b$

3. $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = T_6 = -ab + c.$

Theo định lí Viete về nghiệm của phương trình bậc ba, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét 1.4. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì $(x_1x_2 + x_2x_3), (x_2x_3 + x_3x_1), (x_3x_1 + x_1x_2)$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 + 2bt^2 - (b^2 + ac)t + (c^2 - abc) = 0.$$

Chứng minh.

1. $(x_1x_2 + x_2x_3) + (x_2x_3 + x_3x_1) + (x_3x_1 + x_1x_2) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2T_2 = 2b$

2. $(x_1x_2 + x_2x_3)(x_2x_3 + x_3x_1) + (x_3x_1 + x_1x_2)(x_1x_2 + x_2x_3)$
$+ (x_2x_3 + x_3x_1)(x_1x_2 + x_2x_3)$
$= x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = T_{10} + 3T_1T_3 = b^2 + ac$

3. $(x_1x_2 + x_2x_3)(x_2x_3 + x_3x_1)(x_3x_1 + x_1x_2) = x_1x_2x_3[(x_1 + x_2 + x_1)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3] = -(c^2 - abc)$

Vậy theo định lí Viete về nghiệm của phương trình bậc ba, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét 1.5. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình (1.1) thì x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 là nghiệm của phương trình

$$t^3 - bt^2 + act - c^2 = 0. \tag{1.6}$$

Chứng minh. Ta có

1. $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = T_2 = b$
2. $x_1x_2.x_2x_3 + x_2x_3.x_3x_1 + x_3x_1.x_1x_2 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = T_3T_1 = ac$
3. $x_1x_2.x_2x_3.x_3x_{12} = (x_1x_2x_3)^2 = T_3^2 = c^2$

Vậy theo định lí Viete về nghiệm của phương trình bậc ba, suy ra điều phải chứng minh.

Chương 2

Ứng dụng phương trình bậc ba vào giải một số hệ phương trình đại số

Trong chương này ta xây dựng cách giải một số hệ phương trình đại số bằng cách đưa về phương trình dạng (1.1). Hoặc giải hệ phương trình bằng cách áp dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba. Thông qua hệ thống bài tập đã được hướng dẫn giúp cho người dạy và học có thêm một cách tiếp cận mới đối với việc giải một số hệ phương trình.

2.1 Một số hệ phương trình đại số giải được bằng cách áp dụng phương trình bậc ba

Bài toán 2.1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x = \sqrt[3]{6y+4} \\ 2y = \sqrt[3]{6x+4} \end{cases}$$

Cách giải. Lập phương hai vế của từng phương trình rồi trừ vế với vế ta được phương trình có dạng

$$2(x-y)[4(x^2+xy+y^2)+3] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 4(x^2+xy+y^2)+3 = 0 \end{array} \right.$$

Phương trình $4(x^2+xy+y^2)+3 = 0$ vô nghiệm. Thay $x = y$ vào hệ ban đầu ta được phương trình $8x^3 - 6x = 4 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = 2$.
Đây là phương trình bậc ba đã được giải ở phần trên.

Bài toán 2.2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 = 2y - 2 \\ y^3 = 2x - 2 \end{cases}$$

Cách giải. Biến đổi tương tự bài toán 2.1 ta đưa được về phương trình $x^3 - 2x = -2$. Đặt $x = 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}t$ ta đưa được về phương trình $4t^3 - 3t = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Bài toán 2.3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(6 + 21y) = 1 \\ x(y^3 - 6) = 21 \end{cases}$$

Cách giải. Nếu giải hệ với ẩn (x, y) thì bài toán rất khó giải được. Nhưng nếu đặt $x = \dfrac{1}{z}$ khi đó hệ đã cho đưa được về dạng

$$\begin{cases} z^3 = 21y + 6 \\ y^3 = 21z + 6 \end{cases}$$

bài toán trở về dạng bài toán 2.2.

Bài toán 2.4. Giải phương trình $x^3 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x + 6}} = 6$.

Cách giải. Đặt

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + 6} = z \\ \sqrt[3]{z + 6} = y \end{cases}$$

ta có phương trình đã cho có dạng $x^3 - y = 6 \Leftrightarrow x^3 = y + 6$

Mặt khác

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + 6} = z \\ \sqrt[3]{z + 6} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 = x + 6 \\ y^3 = z + 6 \end{cases}$$

như vậy ta được hệ

$$\begin{cases} x^3 = y + 6 \\ y^3 = y + 6 \\ z^3 = x + 6 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình quen thuộc, có thể giải bằng phương pháp áp dụng phương trình bậc ba, hoặc hoán vị vòng quanh.

Bài toán 2.5. Giải phương trình $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \dfrac{4}{3}x - 2$.

Cách giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &27\sqrt[3]{81x-8} = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 54 \\ \Leftrightarrow\ &27\sqrt[3]{81x-8} = (3x-2)^3 - 46 \end{aligned}$$

Đặt $3y - 2 = \sqrt[3]{81x-8}$ từ đó ta đưa về hệ

$$\begin{cases} (3x-2)^3 - 27(3y-2) - 46 = 0 \\ (3y-2)^3 = 81x - 8 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} (3x-2)^3 = 81y - 8 \\ (3y-2)^3 = 81x - 8 \end{cases}$$

Việc giải hệ phương trình này hoàn toàn đơn giản.

Bài toán 2.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) = 8 \\ (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = -3 \end{cases}$$

Cách giải. Áp dụng tính chất 1.5 và tính chất 1.7

Bài toán 2.7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^3 = y + 1 \\ y^3 + y - 27x^3 = 27x^2 + 12x + 2 \end{cases}$$

Cách giải. $y^3 + y - 27x^3 = 27x^2 + 12x + 2 \Leftrightarrow y^3 + y = (3x+1)^3 + 3x + 1$ xét hàm đồng biến $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in R$ hàm đơn điệu tăng. Từ phương trình $f(y) = f(3x+1) \Leftrightarrow y = 3x + 1$. Vậy ta có phương trình $4x^3 - 3x = 2$.
Phương trình này đã giải ở trên.

Bài toán 2.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x = y + 5\sqrt{3} \\ y^3 + 3y = z + 5\sqrt{3} \\ z^3 + 3z = x + 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Cách giải. Xuất phát từ hàm $f(t) = t^3+3t-5\sqrt{3}$ có $f'(t) = 3t^2+3 > 0,\ \forall t$ khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x = \min\{x, y, z\}$ lúc đó $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y), y \le z \Rightarrow f(y) \le f(z) \Rightarrow z \le x$ hay $x \le y \le z \le x \Rightarrow x = y = z$ khi đó ta có phương trình $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$.

Bài toán 2.9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3z^3 + 2z^2 \\ y = 3x^3 + 2x^2 \\ z = 3y^3 + 2y^2 \end{cases}$$

Cách giải. Do hệ hoán vị vòng quanh, giả sử

$$x = \max\{x; y; z\}.$$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + z = 3z^3 + 2z^2 + z \\ y + x = 3x^3 + 2x^2 + x \\ z + y = 3y^3 + 2y^2 + y \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t^2 + t$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x + z = f(z) \\ y + x = f(x) \\ z + y = f(y) \end{cases}$$

Mặt khác $f'(t) = 9t^2 + 4t + 1, \quad \forall t \in R$. Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên R, dẫn đến $x = y = z$. Vậy ta có phương trình $3x^3 + 2x^2 - x = 0$ dễ dàng giải được.

Bài toán 2.10 (học sinh giỏi Tỉnh Long An)**.** Giải phương trình sau

$$x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x+5}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 - 4x + 3)^2 = x + 5 \Leftrightarrow (x-4)(x^3 - 4x^2 + 6x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 4 \\ x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Ta xét phương trình
$$x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 0 \tag{2.1}$$
Hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ có $f'(x) = 3x^2 - 8x + 6 > 0$ nên đồng biến. mặt khác ta có $f(0).f(1) = (-1).2 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Đặt $x = y + \dfrac{4}{3}$ ta có (2.1) tương đương với $y^3 + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{61}{27} = 0$ đặt $y = u + v$

Ta có $(u^3 + v^3 + \dfrac{61}{27}) + (3uv + \dfrac{2}{3})(u + v) = 0$ ta chọn
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -\dfrac{61}{27} \\ u.v = -\dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được nghiệm $x = x_0 \in (0; 1)$ vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 4; x = x_0$.

Bài toán 2.11 (học sinh giỏi Tỉnh Bình Phước)**.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy $y = 0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình, nên ta chỉ xét trong trường hợp $y \neq 0$. Ta có biến đổi sau:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + x = -6(\dfrac{x}{y})^2 \\ \dfrac{1}{y^3} + x^3 = 19(\dfrac{x}{y})^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y} + x = -6(\dfrac{x}{y})^2 \\ (\dfrac{1}{y} + x)^3 - \dfrac{3x}{y}(\dfrac{1}{y} + x) = 19(\dfrac{x}{y})^3 \end{cases}$$
Ta thay phương trình trên vào phương trình dưới ta được
$$-216(\frac{x}{y})^6 + 18(\frac{x}{y})^3 = 19(\frac{x}{y})^3 \Leftrightarrow -216(\frac{x}{y})^6 = (\frac{x}{y})^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 0 \\ \dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{6} \end{array}\right.$$
Với $\dfrac{x}{y} = 0 \Rightarrow x = 0$, thay vào hệ ta thấy không thỏa mãn.

Với $\dfrac{x}{y} = -\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow y = -6x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được
$$-6x + 36x^3 = -6x^2 \Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - x = 0$$
phương trình này giải đơn giản.

Bài toán 2.12 (học sinh giỏi Tỉnh Hưng Yên)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \Leftrightarrow (x^4 - xy^3) + (x^3y - x^2y^2) - 9(x - y) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)[x(x^2 + xy + y^2) + x^2y - 9] = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)[x(x + y)^2 - 9] = 0$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta thấy $x \neq y$ nên từ biến đổi trên suy ra

$$x(x + y)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x(x + y)^2 = 9 \qquad (2.2)$$

Ta có

$$x(y^3 - x^3) = 7 \Leftrightarrow y^3 - x^3 = \frac{7}{x} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}.$$

thay vào phương trình thứ hai ta được $x\left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}\right)^2 = 9$

Ta có

$$VT = x\left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}\right)^2 = x\left(x^2 + 2x\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + \sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2}\right)$$
$$= x^3 + 2x^2\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + x\sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2} = x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4 + 7)^2}$$

Từ (2.2) suy ra $x > 0$ và trong biểu thức trên, các số mũ của biến x đều dương nên đây là một hàm đồng biến. Vậy phương trình trên không có quá một nghiệm.

Bài toán 2.13 (học sinh giỏi Tỉnh Nghệ An)**.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $y = 2t$, hệ trở thành

$$\begin{cases} x^3 + t^3 - xt^2 = 1 \\ 4x^4 + t^4 - 4x - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 1 = x(t^2 - x^2) \\ 4x(x^3 - 1) + t(t^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Thay $t^3 - 1 = x(t^2 - x^2)$ từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$4x(x^3 - 1) + xt(t^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4(x^3 - 1) + t^3 - tx^2 = 0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nhiệm của hệ nên ta chỉ xét

$$4(x^3 - 1) + t^3 - tx^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + t^3 - tx^2 = 4.$$

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại là $4x^3 + 4t^3 - 4xt^2 = 4$. Do đó ta có

$$4x^3 + 4t^3 - 4xt^2 = 4x^3 + t^3 - tx^2 \Leftrightarrow t^3 = tx^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \pm x \end{array}\right.$$

Dễ thấy $t = 0$ không thỏa mãn hệ nên ta chỉ xét $t = \pm x$.
Nếu $t = x$, ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 = 1 \\ 5x^4 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Nếu $t = -x$, ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 = -1 \\ 5x^4 - 5x = 0 \end{cases}$$

hệ này vô nghiệm.

Bài toán 2.14 (Chọn đội tuyển trường Nguyễn Du)**.** Giải phương trình sau $\sqrt[3]{3x + 4} = x^3 + 3x^2 + x - 2$.
Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{3x + 4} + 2x + 3 = (x + 1)^2.$$

Đặt $y + 1 = \sqrt[3]{3x + 4}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + 1)^3 = 2x + y + 4 \\ (y + 1)^3 = 3x + 4 \end{cases}$$

Trừ vế với vế của hệ, ta được.
$(x - y)[(x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 = y - x$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ (x - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) + (y - 1)^2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y$
Suy ra $x + 1 = \sqrt[3]{3x + 4} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$.

Bài toán 2.15 (học sinh giỏi TP.HCM)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4\sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)} \end{cases}$$

Lời giải. Ta thấy hệ này không có nghiệm thỏa mãn $y = 0$ nên ta chỉ xét $y \neq 0$, khi đó ta có

$$x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \Leftrightarrow (\frac{x}{y})^{11} + \frac{x}{y} = y^{11} + y.$$

Xét hàm số $f(t) = t^{11} + t, \quad t \in R \Rightarrow f'(t) = 10t^{10} + 1 > 0, \; \forall t \in R$, đây là hàm đồng biến. Đẳng thức trên chính là $f(\frac{x}{y}) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$.
Thay vào phương trình thứ 2 của hệ, ta được

$$7x^2 + 13x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{x^2(3x + 3x - 1)} \Leftrightarrow \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x} > 0$. Ta được
$7t + 13t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}$
$\Leftrightarrow (2t + 1)^3 + 2(2t + 1) = (3 + 3t - t^2) + 2\sqrt[2]{3 + 3t - t^2}$
Xét hàm số $f(a) = a^3 + 2a, \; a > 0 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 2 > 0$ nên hàm này đồng biến. Phương trình trên chính là

$$f(2t+1) = f(\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}) \Leftrightarrow 2t+1 = \sqrt[2]{3 + 3t - t^2} \Leftrightarrow (2t + 1)^3 = 3+3t-t^2.$$

Do $t > 0$ nên không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài toán 2.16 (học sinh giỏi QG 1994, Bảng A)**.** Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

Lời giải. Xét hàm $f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1), \quad t \in R$. Viết lại hệ phương trình dưới dạng.

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(f(f(x))) = x \end{cases}$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + \dfrac{3t^2 - t + 2}{t^2 - t + 1} > 0, \quad \forall t \in R$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên R. Từ đó dễ dàng chứng minh được

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0$$

Xét hàm $g(x) = x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$, ta có

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

nên $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $g(1) = 0$, nên suy ra $x = 1$.

Bài toán 2.17 (học sinh giỏi QG 1996, Bảng B)**.** Hãy biện luận số nghiệm thực của hệ phương trình với ẩn x, y.

$$\begin{cases} x^3y - y^4 = a^2 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = b^2 \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} y(x^3 - y^3) = a^2 \\ y(x + y)^2 = b^2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Xét các trường hợp sau

1) Nếu $a = b = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (x, y) là $(x, 0)$ với x tùy ý.

2) Nếu $b = 0, a \neq 0$ thì từ phương trình thứ nhất của hệ (2.3) có $y \neq 0$ nên theo phương trình thứ hai của hệ (2.3) ta có $x = -y$. Thay vào phương trình đầu của hệ (2.3) được $-2y^4 = a^2$. Phương trình này vô nghiệm, nên hệ (2.3) vô nghiệm.

3) Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì từ (2) có $y \neq 0$ và từ (1) có $x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ (2.3) được:

$$4y^3 = b^2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4}}.$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất: $x = y = \sqrt[3]{\dfrac{b^2}{4}}$.

4) Nếu $a \neq 0, b \neq 0$. Ta chỉ cần xét với $a > 0, b > 0$ (nếu khác đi, ta chỉ cần

lấy giá trị tuyệt đối của a và b). Từ phương trình thứ hai của hệ (2.3) có $y > 0$ và từ (1) có $x > y > 0$. Lại từ phương trình thứ hai của hệ (2.3) có

$$x = \frac{b}{\sqrt{y}} - y \tag{2.4}$$

Đặt $\sqrt{y} = t$ có $x = \dfrac{b}{t} - t^2$. Thay vào phương trình đầu hệ (2.3) và biến đổi ta được

$$t^9 - \left(b - t^3\right)^3 + a^2 t = 0 \tag{2.5}$$

Xét hàm số $f(t) = t^9 - \left(b - t^3\right)^3 + a^2 t / \left[o; +\infty\right)$. Ta có

$$f'(t) = 9t^8 + \left(b - t^3\right)^2 t^2 + a^2 \geq 0, \quad \forall t \in \left[0; +\infty\right).$$

Suy ra hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ mà $f(0) = -b^3 < 0$; $f(\sqrt[3]{b}) = b^3 + a^2\sqrt[3]{b} > 0$ nên phương trình (2.5) có nghiệm duy nhất $t_0 \in (0; +\infty)$. Kết hợp với (2.4) suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x, y) là $(\dfrac{b}{t_0} - t_0^2, t_0^2)$.

Bài toán 2.18 (học sinh giỏi QG 2004, Bảng A)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x(y - z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z - x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x - y)^2 = 16. \end{cases}$$

Lời giải. Viết lại hệ đã cho dưới dạng tương đương

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ y(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 30 \\ z(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ (y - z)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \\ (z - x)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \end{cases} \tag{2.6}$$

Dễ thấy $(0;0;0)$ không phải là nghiệm của hệ (2.6). Do đó

$$(2.6) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+y^2+z^2) - 2xyz = 2 \\ (y-z)(x^2+y^2+z^2) = 14 \\ y = 2z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ -2x^3 + 6x^2z - 9xz^2 + 5z^3 = 14 \\ y = 2z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ 5z^3 - 16xz^2 + 20x^2z - 16x^3 = 0 \\ y = 2z - x \end{cases} \qquad (2.7)$$

Vì x, z khác 0 nên đặt $t = \dfrac{z}{x}$, từ phương trình thứ hai của hệ (2.7) ta có $5t^3 - 16t^2 + 20t - 16 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Từ đó ta có $z = 2x$. Suy ra nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán 2.19 (học sinh giỏi QG 2004, Bảng B)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

Lời giải.

Cách 1. Đặt $\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases}$, ta có $x = \dfrac{u+v}{2}$ và $y = \dfrac{u-v}{2}$. Từ hệ phương trình đã cho ta có hệ

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -98 \\ -3u^2 + 5v^2 = -9u - 25v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - 27 = -v^3 - 125 \\ -3u^2 + 9u = -5v^2 - 25v \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 3, rồi cộng với phương trình thứ nhất theo từng vế, ta được $(u-3)^3 = -(v+5)^3$ hay $u = -(v+2)$ thay vào phương trình thứ nhất ta được $v^2 + 2v - 15 = 0 \Leftrightarrow (v-3)(v+5) = 0 \Leftrightarrow v = 3$ hoặc $v = -5$, thay trở lại hệ ban đầu ta được nghiệm.

<u>Cách 2</u>. Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 3, rồi cộng với phương trình thứ nhất theo từng vế, ta được

$$x^3 + 3x^2 + 3xy^2 - 24xy + 3y^2 = 24y - 51x - 49$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3y^2(x+1) - 24y(x+1) + 48(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)((x+1)^2 + 3y^2 - 24y + 48) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)((x+1)^2 + 3(y-4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = -1 \\ x = -1; y = 4. \end{array}\right.$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được nghiệm của hệ.

Bài toán 2.20 (học sinh giỏi QG 2006, Bảng B)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Xét các tường hợp

1) $x \geq y \geq z$

Từ đó và hệ phương trình đã cho ta có

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 \geq z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)((x+2)^2 + 1) \leq 0 \\ (z-1)((z+2)^2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ z \geq 1. \end{cases}$$

2) $x \geq z \geq y$

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 \geq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)((x+2)^2 + 1) \leq 0 \\ (y-1)((y+2)^2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ y \geq 1. \end{cases}$$

Cả hai trường hợp đều cho $x = y = z = 1$. Thử lại, ta thấy $x = y = z = 1$ là nghiệm của hệ đã cho.

(Có thể dùng hoán vị vòng quanh cho bài này và các Bài toán 2.12, 2.13)

2.2 Một số bài toán tương tự

Bài toán 2.21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-\dfrac{3}{4} \\ xyz=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Chỉ dẫn. Áp dụng định lí Viete về nghiệm của phương trình bậc ba, ta có x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3-\dfrac{3}{4}t-\dfrac{1}{8}=0 \Leftrightarrow 4t^3-3t=\dfrac{1}{2}$.
Đây là phương trình đã giải ở phần trên.

Bài toán 2.22. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^3+y^3+z^3=36 \\ xyz=6 \end{cases}$$

Chỉ dẫn. Giả sử x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3+at^2+bt+c=0 \quad (1.1)$ thì theo tính chất 1.4 ta có $T_7=x_1^3+x_2^3+x_3^3=-a^3+3ab-3c$ Theo định lí Viete về nghiệm của phương trình bậc ba ta có

$$\begin{cases} x+y+z=-a=6 \\ xyz=-c=6 \end{cases} \Rightarrow b=12.$$

Vậy x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3-6t^2+12t-6=0$, đặt $t=u-\dfrac{a}{3}=u+2$ ta được phương trình $u^3=6 \Rightarrow u=\sqrt[3]{6}$ thay vào phương trình trên ta tìm được x, y, z.

Bài toán 2.23. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=a_1 \\ x^2+y^2+z^2=a_1^2 \\ x^3+y^3+z^3=a_2^3 \end{cases}$$

Chỉ dẫn. Giả sử x, y, z là nghiệm của phương trình (1.1) thì theo tính chất 1.2 ta có $T_5=x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b$, và theo tính chất 1.4 ta có $T_7=x_1^3+x_2^3+x_3^3=-a^3+3ab-3c$ ta có

$$\begin{cases} x+y+z=a_1=-a \\ x^2+y^2+z^2=a_1^2=a^2-2b \\ x^3+y^3+z^3=a_1^3=-a^3+3ab-3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-a_1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Vậy x, y, z là nghiệm của phương trình $t^3 - a_1t^2 = 0$.

Bài toán 2.24. Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$$

Chỉ dẫn. Từ hệ phương trình đã cho suy ra $(x^3+y^3-xy^2)(4x+y) = 4x^4+y^4$
Đặt $x = ty$ $(do\ y \neq 0)$. Ta có

$$y^4(t^3 + 1 - t)(4t + 1) = y^4(4t^4 + 1) \Rightarrow t^3 - 4t^2 + t = 0$$

Giải phương trình này, sau đó thay trở lại hệ ban đầu ta được kết quả.

Bài toán 2.25. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases}$$

Chỉ dẫn. Từ hệ phương trình ta có $y^3 + y = (x + 1)^3 + (x + 1)$.
Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1$ là hàm đơn điệu tăng.
Từ phương trình $f(y) = f(x + 1) \Leftrightarrow y = (x + 1)$.
Đưa được về phương trình $x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$.

Chương 3

Một số ứng dụng khác của phương trình bậc ba

3.1 Ứng dụng phương trình bậc ba để giải một số phương trình bậc bốn

Trong phần này, trước hết sẽ đưa ra bài toán về giải phương trình bậc bốn tổng quát, và phương trình bậc bốn dạng đặc biệt. Tiếp theo là một số bài toán về phương trình bậc bốn, mà trong quá trình giải, nếu ta sử dụng những tính chất của phương trình bậc ba thì việc giải quyết sẽ đơn giản hơn.

Bài toán 3.1. Giải phương trình bậc bốn dạng tổng quát

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{3.1}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned}(3.1) &\Leftrightarrow x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d\\ &\Leftrightarrow x^4 + ax^3 + \frac{a^2x^2}{4} = \Big(\frac{a^2}{4} - b\Big)x^2 - cx - d\\ &\Leftrightarrow \Big(x^2 + \frac{ax}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{a^2}{4} - b\Big)x^2 - cx - d \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Đưa vào phương trình ẩn phụ y như sau. Cộng cả hai vế của phương trình (3.2) với $\Big(x^2 + \dfrac{ax}{2}\Big)y + \dfrac{y^2}{4}$ ta có:

$$\Big(x^2 + \frac{ax}{2}\Big)^2 + \Big(x^2 + \frac{ax}{2}\Big)y + \frac{y^2}{4} = \Big(x^2 + \frac{ax}{2}\Big)y + \frac{y^2}{4} + \Big(\frac{a^2}{4} - b\Big)x^2 - cx - d$$

$$\Leftrightarrow \Big(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\Big)^2 = \Big(x^2 + \frac{ax}{2}\Big)y + \frac{y^2}{4} + \Big(\frac{a^2}{4} - b\Big)x^2 - cx - d \tag{3.3}$$

Ta tìm giá trị của y sao cho hai vế của biểu thức là chính phương. Muốn như vậy, vế phải phải có nghiệm kép x. Hay

$$\Delta = \Big(\frac{ay}{2} - c\Big)^2 - 4\Big(\frac{a^2}{4} - b + y\Big)\Big(\frac{y^2}{4} - d\Big) = 0$$

Nghĩa là:

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - [d(a^2 - 4b) - dy] = 0. \tag{3.4}$$

Với y_0 vừa tìm được thì vế phải của (3.3) có dạng $(\alpha x + \beta)^2$. Do đó thế y_0 vào phương trình (3.3) ta có. Từ (3.4), ta có được hai phương trình

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = \alpha x + \beta \tag{3.5}$$

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -\alpha x - \beta \tag{3.6}$$

Từ đây, giải hai phương trình (3.5), (3.6) ta được bốn nghiệm của phương trình tổng quát ban đầu.

Từ phương trình (3.4) ta được ba giá trị của y; mỗi giá trị của y được bốn giá trị của x. Như vậy ta có 12 giá trị của x là nghiệm của (3.1). Nhưng do (3.1) là phương trình bậc bốn, có nhiều nhất là bốn nghiệm thực (hoặc phức). Do đó, các giá trị x tương ứng với y_0 phải trùng tại các giá trị của x tương ứng với y_1, y_2. Vì vậy ta chỉ cần tìm một giá trị của y_0 là đủ.

Định lý Viete cho phương trình bậc bốn. Nếu x_1, x_2, x_3, x_4 là bốn nghiệm của phương trình (3.1) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = b \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -c \\ x_1x_2x_3x_4 = d \end{cases}$$

Bài toán 3.2 (học sinh giỏi Tỉnh Đồng Nai)**.** Giải phương trình sau

$$x^5 - x^4 - x^3 - 11x^2 + 25x - 14 = 0$$

Lời giải: Phương trình đã cho tương đương với.

$$(x^5 - 2x^4) + (x^4 - 2x^3) + (x^3 - 2x^2) + (-9x^2 + 18x) + (7x - 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 7 = 0 \end{array} \right.$$

Phương trình thứ hai ở trên có thể viết lại như sau

$$\begin{aligned}&(x^4+x^3+x^2-9x+6)+1=0\\ \Leftrightarrow&(x^4-x^3+2x^3-2x^2+3x^2-3x-6x+6)+1=0\\ \Leftrightarrow&(x-1)^2(x^3+3x^2+6)+1=0\end{aligned}$$

Do $(x-1)^2(x^3+3x^2+6)+1>0, \forall x$ nên phương trình này vô nghiệm.
Vậy phương trình có duy nhất nghiệm $x=2$.

Bài toán 3.3 (học sinh giỏi Tỉnh Long An)**.** Giải phương trình sau

$$x^3+x^2-3x-1=2\sqrt{x+2} \text{ trên } [-2,2]$$

Lời giải: Điều kiện $x\geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$(x^3+x^2-3x-1)^2=4(x+2)\Leftrightarrow (x+1)(x^5+x^4-6x^3-2x^2+9x-7)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=-1\\ x^5+x^4-6x^3-2x^2+9x-7=0\end{array}\right.$$

Giải phương trình thứ hai tương tự như bài 3.2 ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm $x_0\in[-2,2],\ x_0\neq -1$.
Vậy phương trình có hai nghiệm là -1 và x_0.

Bài toán 3.4 (học sinh giỏi Tỉnh Hà Tĩnh)**.** Giải phương trình

$$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}.$$

Lời giải: Điều kiện $x\in(-\infty,-1]\cup(0,1]$. Nếu $x<-1$ thì

$x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^2+x)^2+(x-1)^2>0, x^3+x=x(x^2+1)<0$

nên phương trình trên không có nghiệm thỏa mãn $x<-1$.
Đồng thời $x=1$ không phải là nghiệm nên ta chỉ xét $x\in(0,1)$.
Đặt $t=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x(1-x^2)}}>0$, phương trình trên trở thành $t-\dfrac{2}{t}=1\Leftrightarrow$ $t^2-t-2=0\Rightarrow t=2$
Với

$$\begin{aligned}t=2\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{\sqrt{x(1-x^2)}}=2\Leftrightarrow (x^2+1)^2=4x(1-x^2)\\ \Leftrightarrow x^4+2x^2+1-4x+4x^3=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}.\end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1+\sqrt{2}$.

Bài toán 3.5 (học sinh giỏi QG- 2006 Bảng A)**.** Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16.$$

Chứng minh rằng: $a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$.
Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

Chứng minh:

1. Trước hết ta chứng minh rằng

$$x + y + z - (xy + yz + zx) \geq 0 \tag{3.7}$$

Trong đó x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$xy + yz + zx + xyz = 4 \tag{3.8}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$ thì $x > 0, y > 0$ nên

$$x + y + xy > 0 \text{ và } z = \frac{4 - xy}{x + y + xy} \tag{3.9}$$

Đặt vế trái của (3.7) là A thay (3.8), (3.9) vào A ta được

$$\begin{aligned} A &= x + y + z + xyz - 4 = x + y + \frac{4 - yz}{x + y + xy} + \frac{xy(4 - xy)}{x + y + xy} - 4 \\ &= \frac{(x + y)^2 - 4(x + y) + 4 + xy(x + y - xy - 1)}{x + y + xy} \\ &= \frac{(x + y - 2)^2 - xy(x - 1)(y - 1)}{x + y + xy} \end{aligned}$$

Đặt $B = (x + y - 2)^2 - xy(x - 1)(y - 1)$ thì $A \geq 0 \Leftrightarrow B \geq 0$
Xét các trường hợp sau:
Nếu $(x - 1)(y - 1) \leq 0$ thì $B \geq 0$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. Lúc đó từ (3.9) có $z = 1$
Nếu $(x - 1)(y - 1) > 0$ ta có $((x - 1) + (y - 1))^2 \geq 4(x - 1)(y - 1)$ và từ (3.9) có $4 \geq xy$ nên $(x + y - 2)^2 \geq xy(x - 1)(y - 1) \Leftrightarrow B \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $z = 0, x = y = 2$.
Như vậy bất đẳng thức (3.7) đúng và đẳng thức xảy ra chỉ trong hai trường

hợp là $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ hoặc $(2, 2, 0)$ với $(z = \min\{x, y, z\})$.
2. Đặt

$$\begin{aligned} &p = a + b + c + d,\ q = ab + ac + ad + bc + bd + cd,\\ &r = abc + abd + acd + bcd,\ s = abcd. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Theo định lý Viete đảo ta thấy a, b, c, d là bốn nghiệm thực không âm của đa thức $F(x) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c \le d$.
Theo định lý Rolle với $F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 0$ tồn tại ba nghiệm thực x_1, x_2, x_3 của đa thức $F'(x) = 4x^3 - 3px^2 + 2qx - r$, trong đó

$$a \le x_1 \le b \le x_2 \le c \le x_3 \le d. \tag{3.11}$$

Theo định lý Viete ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3p}{4},\quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{q}{2},\quad x_1x_2x_3 = \frac{r}{4} \tag{3.12}$$

Từ (3.10) giả thiết của đề bài có thể viết thành $2q + r = 16$ hay là (theo (3.12)) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2x_3 = 4$ đẳng thức này chính là (3.8).
Từ (3.10) bất đẳng thức cần chứng minh của đề bài viết thành $3p \ge 2q$ hay theo (3.12)

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

bất đẳng thức này tương đương với (3.7). Theo kết quả phần 1 từ giả thiết (3.8) suy ra bất đẳng thức (3.7) đúng, hay từ giả thiết $2q + r = 16$ ta có bất đẳng thức $3p \ge 2q$, nghĩa là bài toán đúng. Đẳng thức xảy ra trong $3p \ge 2q$ khi và chỉ khi $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ hoặc $(0, 2, 2)$. Thay các giá trị này vào (3.11) và (3.12) suy ra chỉ một trường hợp thỏa mãn là $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$.

3.2 Phương trình bậc ba với nghiệm là các yếu tố độ dài trong tam giác

Trong phần này ta áp dụng phương trình bậc ba để giải quyết các bài toán với các nghiệm là các yếu tố độ dài trong tam giác. Để xây dựng các phương trình bậc ba ấy ta dựa vào nhận xét ở chương 1 và làm như sau. Trước hết ta phải sử dụng biến đổi lượng giác thiết lập các hệ thức lượng giác để dưa về dạng tính chất T_1, T_2, T_3. Cách làm này giúp ta dễ nhận biết phương trình bậc ba, quen thuộc và thuận tiện với học sinh phổ thông, vì học sinh phổ thông đã quen với cách làm như vậy trong phương trình bậc hai. Cách làm này là tổng quát và phát huy được kiến thức lượng giác của học sinh. Sau khi đã có được phương trình bậc ba về các yếu tố độc lập, ta sử dụng các tính chất về nghiệm của phương trình bậc ba để xây dựng các hệ thức lượng giác cà chứng minh các hệ thức lượng giác đó. Cách làm này khá ngắn gọn và tổng quát, số lượng hệ thức đưa ra cũng rất nhiều góp phần quan trọng trong việc giảng dạy và học tập ở trường phổ thông.

Bài toán 3.6. Chứng minh độ dài ba cạnh của tam giác ABC (giả sử lần lượt là a, b, c) là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4pRr = 0 \tag{3.13}$$

Chứng minh. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC, khi đó theo định lý hàm số sin và công thức góc nhân đôi ta có

$$a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \tag{3.14}$$

Theo công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp thì

$$p - a = r \cot \frac{A}{2} = r \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \tag{3.15}$$

Lấy (3.14) chia cho (3.15) ta được

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{ar}{4R(p-a)}.$$

Lấy (3.14) nhân (3.15) ta được

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a(p-a)}{4Rr}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{ar}{4R(p-a)} + \dfrac{a(p-a)}{4Rr} = \sin^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{A}{2} = 1.$
Quy đồng mẫu số ta được

$$\begin{aligned} &r^2a + a(p-a)^2 = 4Rr(p-a) \\ \Leftrightarrow\ &a^3 - 2pa^2 + (r^2+p^2+4Rr)a - 4Rrp = 0 \end{aligned}$$

Vậy a là nghiệm của (3.13). Tương tự b, c cũng là nghiệm của (3.13) từ đó ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 3.7. Chứng minh $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}t^2 + \frac{1}{2Rr}t - \frac{1}{4pRr} = 0 \tag{3.16}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.13) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.8. Chứng minh a^2, b^2, c^2 là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2(p^2-r^2-4Rr)t^2 + [(p^2+r^2+4Rr)^2 - 16p^2Rr]t - 16p^2R^2r^2 = 0. \tag{3.17}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.2 cho phương trình (3.13) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.9. Chứng minh $a+b, b+c, c+a$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 4pt^2 + (5p^2+r^2+4Rr)t - 2p(p^2+r^2+2Rr) = 0. \tag{3.18}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.3 cho phương trình (3.13) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.10. Chứng minh $ab+bc, bc+ca, ca+ab$ là các nghiệm của phương trình.

$$\begin{aligned} t^3 - 2(p^2+r^2+4Rr)t^2 + [(p^2+r^2+4Rr)^2 + 8p^2Rr]t \\ - 8p^2Rr(p^2+r^2+2Rr) = 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Chứng minh. Từ nhận xét 1.4 cho phương trình (3.13) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.11. Chứng minh ab, bc, ca là các nghiệm của phương trình.

$$t^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)t^2 + 8p^2Rrt - 16p^2R^2r^2 = 0. \qquad (3.20)$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.13) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.12. Chứng minh $\frac{1}{ab}, \frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{2Rr}t^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{16p^2R^2r^2}t - \frac{1}{16p^2R^2r^2} = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.16) hoặc nhận xét 1.1 cho phương trình (3.20) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.13. Chứng minh $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2Rr}{16p^2R^2r^2}t^2 + \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{8p^2R^2r^2}t - \frac{1}{16p^2R^2r^2} = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.17) hoặc nhận xét 1.2 cho phương trình (3.16) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.14. Chứng minh a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2 là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - [(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16p^2Rr]t^2 + 32p^2R^2r^2(p^2 - r^2 - 4Rr)t - 256p^4R^4r^4 = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.17) hoặc nhận xét 1.2 cho phương trình (3.20) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.15. Chứng minh $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{5(p^2 + r^2 + 4Rr)}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}t^2 + \frac{2}{p^2 + r^2 + 2Rr}t - \frac{1}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)} = 0 \qquad (3.21)$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.18) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.16. Chứng minh $(a+b)(b+c), (b+c)(c+a), (c+a)(a+b)$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - 5(p^2+r^2+4Rr)t^2 + 8p^2(p^2+r^2+2Rr)t - 4p^2{(p^2+r^2+2Rr)}^2 = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.18) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.17. Chứng minh $\frac{1}{ab+bc}, \frac{1}{bc+ca}, \frac{1}{ca+ab}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{{(p^2+r^2+4Rr)}^2+8p^2Rr}{8p^2Rr(p^2+r^2+2Rr)}t^2 + \frac{1}{4p^2Rr}.\frac{p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr}t - \frac{1}{8p^2Rr(p^2+r^2+2Rr)} = 0 \tag{3.22}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.19) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.18. Chứng minh $\frac{1}{{(a+b)}^2}, \frac{1}{{(b+c)}^2}, \frac{1}{{(c+a)}^2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \left[\Big(\frac{5p^2+r^2+4Rr}{2p(p^2+r^2+2Rr)}\Big)^2 - \frac{4}{p^2+r^2+2Rr}\right]t^2 + \frac{3p^2-r^2-4Rr}{2p^2{(p^2+r^2+2Rr)}^2}t - \frac{1}{8p^2{(p^2+r^2+2Rr)}^2} = 0 \tag{3.23}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.2 cho phương trình (3.21) ta có điều phải chứng minh.

Định lý 3.1. Gọi $G(p,R,r)$ là biểu thức chứa ba biến p,R,r(để cho tiện, ta viết G thay vì viết $G(p,R,r)$). Khi đó:
1. $(G,a),(G,b),(G,c)$ là các nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2pGx^2 + (p^2+r^2+4Rr)G^2x - 4pRrG^3 = 0$$

2. $(\frac{G}{a}),(\frac{G}{b}),(\frac{G}{c})$ là các nghiệm của phương trình

$$x^3 - \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}Gx^2 + \frac{G^2}{2Rr}x - \frac{G^3}{4pRr} = 0$$

3. $(G-a),(G-b),(G-c)$ là các nghiệm của phương trình

$$x^3-(3G-2p)x^2+(p^2+r^2+3G^2+4Rr-4pG)x$$
$$-[G^3-2pG^2+(p^2+r^2+4Rr)G-4pRr]=0$$

4. $\left(G-\dfrac{1}{a}\right),\left(G-\dfrac{1}{b}\right),\left(G-\dfrac{1}{c}\right)$ là các nghiệm của phương trình

$$x^3-\left(3G-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)x^2+\left(3G^2-\frac{1}{2Rr}-2G\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)x$$
$$-\left[G^3-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}G^2+\frac{1}{2Rr}G-\frac{1}{4pRr}\right]=0$$

Chứng minh.

1. Nhân hai vế của phương trình (3.13) với G^3 ta được điều phải chứng minh.
2. Nhân hai vế của phương trình (3.16) với G^3 ta được điều phải chứng minh.
3. Thay $x=G-(G-x)$ vào phương trình (3.13) ta được

$$[G-(G-x)]^3-2p[G-(G-x)]^2+$$
$$+(p^2+r^2+4Rr)[G-(G-x)]-4pRr=0 \qquad (3.24)$$

Đặt $G-x=X$, khi đó

$$(3.24)\Leftrightarrow [G-X]^3-2p[G-X]^2+(p^2+r^2+4Rr)[G-X]-4pRr=0$$
$$\Leftrightarrow G^3-3GX(G-X)-X^3-2p(G^2-2GX+X^2)$$
$$+(p^2+r^2+4Rr)(G-X)-4pRr=0$$
$$\Leftrightarrow X^3-(3G-2p)X^2+(p^2+r^2+3G^2+4Rr-4pG)X$$
$$-[G^3-2pG^2+(p^2+r^2+4Rr)G]=0$$

Ta được điều phải chứng minh.

4. Thay $\dfrac{1}{x}=G-\left(G-\dfrac{1}{x}\right)$ vào phương trình (3.16) ta được

$$\left[G-\left(G-\frac{1}{x}\right)\right]^3-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\left[G-\left(G-\frac{1}{x}\right)\right]^2+$$
$$+\frac{1}{2Rr}\left[G-\left(G-\frac{1}{x}\right)\right]-\frac{1}{4pRr}=0 \qquad (3.25)$$

Đặt $G - \dfrac{1}{x} = X$, khi đó

$$(3.25) \Leftrightarrow [G-X]^3 - \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}[G-X]^2 + \frac{1}{2Rr}[G-X] - \frac{1}{4pRr} = 0$$

$$\Leftrightarrow G^3 - 3G^2X + 3GX^2 - X^3 - \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}(G^2 - 2GX + X^2)$$

$$+ \frac{1}{2Rr}[G-X] - \frac{1}{4pRr} = 0$$

$$\Leftrightarrow -G^3 + 3G^2X - 3GX^2 + X^3 + \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}G^2$$

$$-2\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}GX + \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}X^2 - C + \frac{1}{2Rr}X + \frac{1}{4pRr} = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 - \left(3G - \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)X^2 + \left(3G^2 + \frac{1}{2Rr} - 2G\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)X$$

$$-\left[G^3 - \frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}G^2 + \frac{1}{2Rr}G - \frac{1}{4pRr}\right] = 0$$

Ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 3.19. Chứng minh $p-a, p-b, p-c$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - pt^2 + (r^2+4Rr)t - pr^2 = 0 \qquad (3.26)$$

Chứng minh.

Thay $G = p$ vào định lý (3.13) ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 3.20. Chứng minh $\dfrac{1}{p-a}, \dfrac{1}{p-b}, \dfrac{1}{p-c}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{4R+r}{pr}t^2 + \frac{1}{r^2}t - \frac{1}{pr^2} = 0 \qquad (3.27)$$

Chứng minh.

Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.26) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.21. Chứng minh $(p-a)^2, (p-b)^2, (p-c)^2$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - (p^2 - 2r^2 - 8Rr)t^2 + [(r^2+4Rr)^2 - 2p^2r^2]t - p^2r^4 = 0 \qquad (3.28)$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.2 cho phương trình (3.26) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.22. Chứng minh $(p-a)(p-b),(p-b)(p-c),(p-c)(p-a)$ là nghiệm của phương trình

$$t^3-(r^2+4Rr)t^2+p^2r^2t-4p^2r^4=0 \tag{3.29}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.26) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.23. Chứng minh $\dfrac{1}{(p-a)^2},\dfrac{1}{(p-b)^2},\dfrac{1}{(p-c)^2}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3-\frac{(4R+r)-2p^2}{p^2r^2}t^2+\frac{p^2-2r^2-8Rr}{p^2r^4}t-\frac{1}{p^2r^4}=0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.28) hoặc từ nhận xét 1.2 cho phương trình (3.27) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.24. Chứng minh $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)},\dfrac{1}{(p-b)(p-c)},\dfrac{1}{(p-c)(p-a)}$ là nghiệm của phương trình

$$t^3-\frac{1}{r^2}t^2+\frac{r^2+4Rr}{p^2r^4}t-\frac{1}{p^2r^4}=0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.29) hoặc từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.27) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.25. Chứng minh $\left(p-\dfrac{1}{a}\right),\left(p-\dfrac{1}{b}\right),\left(p-\dfrac{1}{c}\right)$ là nghiệm của phương trình

$$t^3-\left(3p-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)t^2+\left(3p^2+\frac{1}{2Rr}-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)t$$
$$-\left[\mathrm{p}^3-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}p^2+\frac{1}{2Rr}p-\frac{1}{4pRr}\right]=0$$

Chứng minh.
Thay $G=p$ vào định lý 3.1 ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.26. Chứng minh $r-a, r-b, r-c$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3-(3r-2p)t^2+(p^2+4r^2+4Rr-4pr)t$$
$$-r[2r^2-2r(p-2R)+p(p-4R)]=0$$

Chứng minh.
Thay $G=r$ vào định lý 3.1 ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 3.27. Chứng minh $\Big(r-\dfrac{1}{a}\Big),\Big(r-\dfrac{1}{b}\Big),\Big(r-\dfrac{1}{c}\Big)$ là nghiệm của phương trình

$$t^3-\Big(3r-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\Big)t^2+\Big(3r^2+\frac{1}{2Rr}-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\Big)t$$
$$-\Big[\mathrm{r}^3-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}r+\frac{1}{2R}-\frac{1}{4pRr}\Big]=0$$

Chứng minh.
Thay $G=r$ vào định lý 3.1 ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.28. Chứng minh $\Big(R-\dfrac{1}{a}\Big),\Big(R-\dfrac{1}{b}\Big),\Big(R-\dfrac{1}{c}\Big)$ là nghiệm của phương trình

$$t^3-\Big(3R-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\Big)t^2+\Big(3R^2+\frac{1}{2Rr}-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\Big)t$$
$$-\Big[\mathrm{R}^3-\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}R+\frac{1}{2r}-\frac{1}{4pRr}\Big]=0$$

Chứng minh.
Thay $G=R$ vào định lý 3.1 ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.29. Chứng minh h_a, h_b, h_c là các nghiệm của phương trình

$$t^3-\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}t^2+\frac{2p^2r}{R}t-\frac{2p^2r^2}{R}=0 \qquad (3.30)$$

Chứng minh.
Ta có $h=\dfrac{2pr}{a}$, nên thay $G=2pr$ vào định lý 3.1 ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.30. Chứng minh $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{r}t^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2p^2r^2}t - \frac{R}{2p^2r^2} = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.30) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.31. Chứng minh h_a^2, h_b^2, h_c^2 là các nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} &t^3 - \Big[\Big(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}\Big)^2 - \frac{2p^2r}{R}\Big]t^2 \\ &+ \Big[\frac{4p^4r^2}{R^2} - \frac{2p^2r^2}{R^2}\Big(p^2 + r^2 + 4Rr\Big)\Big]t - \frac{2p^4r^4}{R^2} = 0 \end{aligned}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.2 cho phương trình (3.30) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.32. Chứng minh $h_a + h_b, h_b + h_c, h_c + h_a$ là các nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} &t^3 - \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{R}t^2 + \Big[\Big(\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}\Big)^2 + \frac{2p^2r}{R^2}\Big]t \\ &- \Big[\frac{p^2r}{R^2}\Big(p^2 + r^2 + 4Rr\Big) - \frac{p^2r^2}{R}\Big] = 0 \end{aligned}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.3 cho phương trình (3.30) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.33. Chứng minh $h_ah_b + h_bh_c, h_bh_c + h_ch_a, h_ch_a + h_ah_b$ là các nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} &t^3 - \frac{4p^2r}{R}t^2 + \Big(\frac{4p^4r^4}{R^2} + \frac{2p^2r}{R}.\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}\Big)t \\ &- \Big(\frac{4p^4r^4}{R^2} + \frac{2p^4r^3}{R^2}.\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}\Big) = 0 \end{aligned}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.4 cho phương trình (3.30) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.34. Chứng minh $h_a h_b, h_b h_c, h_c h_a$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{2p^2 r}{R} t^2 + \frac{p^2 r^2}{R} . \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R} t - \frac{4p^4 r^4}{R^2} = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.30) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.35. Chứng minh r_a, r_b, r_c là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - (4R + r)t^2 + p^2 t - p^2 r = 0 \tag{3.31}$$

Chứng minh.
Ta có $r_a(p - a) = pr$ nên $r_a = \dfrac{pr}{p - a}$ thay $t = \dfrac{pr}{p - a} . \dfrac{1}{pr}$ vào phương trình (3.27), và biến đổi theo $\dfrac{pr}{p - a}$ ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 3.36. Chứng minh $\dfrac{1}{r_a}, \dfrac{1}{r_b}, \dfrac{1}{r_c}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{r} t^2 + \frac{4R + r}{p^2 r} t - \frac{1}{p^2 r} = 0 \tag{3.32}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.31) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.37. Chứng minh r_a^2, r_b^2, r_c^2 là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \left[(4R + r)^2 - 2p^2\right] t^2 + \left[p^4 - 2p^2 r(4R + r)\right] t - p^4 r^2 = 0 \tag{3.33}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.2 cho phương trình (3.31) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.38. Chứng minh $r_a + r_b, r_b + r_c, r_c + r_a$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2(4R + r)^2 t^2 + [(4R + r)^2 + p^2]t - p^2(4R + r) + p^2 r = 0 \tag{3.34}$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.3 cho phương trình (3.31) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.39. Chứng minh $r_ar_b + r_br_c, r_br_c + r_cr_a, r_cr_a + r_ar_b$ là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2p^2t^2 + [p^4 + p^2r(4Rr + r)]t - p^4r(4R + r^2) = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.4 cho phương trình (3.31) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.40. Chứng minh r_ar_b, r_br_c, r_cr_a là nghiệm của phương trình

$$t^3 - p^2t^2 + p^2r(4Rr + r)t - p^4r = 0 \qquad (3.35)$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.5 cho phương trình (3.31) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.41. Chứng minh $\frac{1}{r_a^2}, \frac{1}{r_b^2}, \frac{1}{r_c^2}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{p^2 - 2r(4R + r)}{p^2r^2}t^2 + \frac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p^4r^2}t - \frac{1}{p^4r^2} = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.33), hoặc nhận xét 1.2 cho phương trình (3.32) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.42. Chứng minh $\frac{1}{r_a + r_b}, \frac{1}{r_b + r_c}, \frac{1}{r_a + r_a}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{(4R + r) + p^2}{p^2(4R + r) - p^2r}t^2 + \frac{2(4R + r)}{p^2(4R + r) - p^2r}t - \frac{1}{p^2(4R + r) - p^2r} = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.34) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.43. Chứng minh $\frac{1}{r_ar_b}, \frac{1}{r_br_c}, \frac{1}{r_ar_a}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{4R + r}{p^2r}t^2 + \frac{1}{p^2r^2}t - \frac{1}{p^4r^2} = 0$$

Chứng minh.
Từ nhận xét 1.1 cho phương trình (3.35), hoặc nhận xét 1.5 cho phương trình (3.32) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.44. Chứng minh m_a^2, m_b^2, m_c^2 là các nghiệm của phương trình

$$t^3 + \alpha_m t^2 + \beta_m t + \gamma_m = 0 \tag{3.36}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
&\alpha_m = -\frac{3}{2}(p^2 - r^2 - 4Rr);\\
&\beta_m = \frac{9}{16}(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 9p^2Rr;\\
&\gamma_m = \frac{1}{2}(p^2 - r^2 - 4Rr)^3 - \frac{9}{16}(p^2 - r^2 - 4Rr)(p^2 + r^2 + 4Rr)^2\\
&\qquad - 16p^2Rr + \frac{27}{4}p^2R^2r^2;
\end{aligned}$$

Chứng minh.

Ta chỉ cần chứng minh:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = -\alpha_m \tag{3.37}$$

$$m_a^2m_b^2 + m_b^2m_c^2 + m_c^2m_a^2 = \beta_m \tag{3.38}$$

$$m_a^2m_b^2m_c^2 = -\gamma_m \tag{3.39}$$

1. Ta chứng minh (3.37). Theo công thức trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4};$$
$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Áp dụng tính chất 1.2 cho phương trình (3.13) ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-2p)^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

2. Ta chứng minh (3.38). Ta có

$$m_a^2m_b^2 = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2}{4}\frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - 3b^2}{4}.$$

Đặt $a^2 + b^2 + c^2 = M$, suy ra $m_a^2m_b^2 = \dfrac{1}{16}(4M^2 - 6Ma^2 - 6Mb^2 + 9a^2b^2)$.
Tương tự, ta có

$$m_b^2m_c^2 = \frac{1}{16}(4M^2 - 6Mb^2 - 6Mc^2 + 9b^2c^2).$$

$$m_c^2m_a^2 = \frac{1}{16}(4M^2 - 6Mc^2 - 6Ma^2 + 9c^2a^2).$$

Hay

$$\begin{aligned}
&m_a^2m_b^2 + m_b^2m_c^2 + m_c^2m_a^2 = \\
&= \frac{1}{16}(12M^2 - 12M(a^2+b^2+c^2) + 9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)) \\
&= \frac{9}{16}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).
\end{aligned}$$

Áp dụng tính chất 1.7 cho phương trình (3.13) ta được

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (p^2+r^2+4Rr)^2 - 16p^2Rr.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
m_a^2m_b^2 + m_b^2m_c^2 + m_c^2m_a^2 &= \frac{9}{16}[(p^2+r^2+4Rr)^2 - 16p^2Rr] \\
&= \frac{9}{16}(p^2+r^2+4Rr)^2 - 9p^2Rr = \beta_m
\end{aligned}$$

3. Ta chứng minh (3.39). Ta có

$$\begin{aligned}
&m_a^2m_b^2m_c^2 = \frac{1}{64}(2M-3a^2)(2M-3b^2)(2M-3c^2) \\
&= \frac{1}{64}[(8M^3 - 12M^2(a^2+b^2+c^2) + 18M(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - 27a^2b^2c^2] \\
&= \frac{1}{64}[-4(a^2+b^2+c^2)^3 + 18(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - 27a^2b^2c^2]
\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Viete cho phương trình (3.13) ta được $abc = 4pRr$.
Áp dụng tính chất 1.2 cho phương trình (3.13) ta được

$$a^2+b^2+c^2 = (-2p)^2 - 2(p^2+r^2+4Rr) = 2(p^2-r^2-4Rr).$$

Áp dụng định lý Viete cho phương trình (3.13) ta được

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = 2(p^2+r^2+4Rr)^2 - 16p^2Rr.$$

Từ đó ta được (3.39).
Từ (3.37), (3.38), (3.39) ta được (3.36). Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.45. Chứng minh l_a^2, l_b^2, l_c^2 là các nghiệm của phương trình

$$t^3 + \alpha_l t^2 + \beta_l t + \gamma_l = 0$$

Chứng minh.
Ta chỉ cần chứng minh

$$l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = -\alpha_l \tag{3.40}$$

$$l_a^2 l_b^2 + l_b^2 l_c^2 + l_c^2 l_a^2 = \beta_l \tag{3.41}$$

$$l_a^2 l_b^2 l_c^2 = -\gamma_l \tag{3.42}$$

1. Ta chứng minh (3.42). Sử dụng công thức đường phân giác

$$l_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2};\ l_b^2 = \frac{4cap(p-b)}{(c+a)^2};\ l_a^2 = \frac{4bap(p-c)}{(a+b)^2}$$

Từ đó ta có

$$l_a^2 l_b^2 l_c^2 = 64\frac{a^2b^2c^2p^2S^2}{[(a+b)(b+c)(c+a)]^2}.$$

Áp dụng định lý Viete cho phương trình (3.13) ta được $abc = 4pRr$
Áp dụng định lý Viete cho phương trình (3.18) ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr).$$

Suy ra $l_a^2 l_b^2 l_c^2 = \dfrac{256p^4R^2r^4}{(p^2+r^2+2Rr)^2} = -\gamma_l.$
2. Ta chứng minh (3.40). Ta có

$$\begin{aligned} l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 &= 4pabc[\frac{p-a}{a(b+c)^2} + \frac{p-b}{b(c+a)^2} + \frac{p-c}{c(a+b)^2}] \\ &= 4pabc[\frac{b+c-a}{a(b+c)^2} + \frac{a+c-b}{b(c+a)^2} + \frac{a+b-c}{c(a+b)^2}] \\ &= 2pabc[(\frac{1}{ab+bc} + \frac{1}{ab+bc} + \frac{1}{ab+bc}) \\ &\quad -(\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2})] \end{aligned} \tag{3.43}$$

Áp dụng định lý Viete cho phương trình (3.22) ta được

$$\frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ba} + \frac{1}{ca+cb} = \frac{(p^2+r^2+4Rr)^2 + 8p^2Rr}{8p^2Rr(p^2+r^2+2Rr)} \tag{3.44}$$

Áp dụng định lý Viete cho phương trình (3.23) ta được

$$\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}=[\frac{5p^2+r^2+4Rr}{2p(p^2+r^2+4Rr)}]^2-\frac{4}{p^2+r^2+4Rr} \quad (3.45)$$

Thay (3.44), (3.45) vào (3.43), kết hợp với $abc=4pRr$, ta được

$$\begin{aligned}
&l_a^2+l_b^2+l_c^2=\\
&=2p.4pRr[\frac{(p^2+r^2+4Rr)^2+8p^2Rr}{8p^2Rr(p^2+r^2+2Rr)}-(\frac{5p^2+r^2+4Rr}{2p(p^2+r^2+2Rr)})^2\\
&\quad+\frac{4}{p^2+r^2+2Rr}\\
&=\frac{(p^2+r^2+4Rr)^2+8p^2Rr}{p^2+r^2+2Rr}-2Rr(\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr})^2+\frac{32p^2Rr}{p^2+r^2+2Rr}\\
&=\frac{(p^2+r^2+4Rr)^2}{p^2+r^2+2Rr}-2Rr(\frac{5p^2+r^2+4Rr}{p^2+r^2+2Rr})^2+\frac{40p^2Rr}{p^2+r^2+2Rr}=-\alpha_l.
\end{aligned}$$

Vậy (3.40) được chứng minh.

3. Ta chứng minh (3.41). Biến đổi

$$l_a^2l_b^2+l_b^2l_c^2+l_c^2l_a^2=l_a^2l_b^2l_c^2(\frac{1}{l_a^2}+\frac{1}{l_b^2}+\frac{1}{l_c^2}) \quad (3.46)$$

Mà

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_a^2}+\frac{1}{l_b^2}+\frac{1}{l_c^2}&=\frac{(b+c)^2}{4pbc(p-a)}+\frac{(c+a)^2}{4pca(p-b)}+\frac{(a+b)^2}{4pab(p-c)}\\
&=\frac{1}{4pabc}[\frac{a(b+c)^2}{(p-a)}+\frac{b(c+a)^2}{(p-b)}+\frac{c(a+b)^2}{(p-c)}] \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Đặt $L=\frac{a(b+c)^2}{(p-a)}+\frac{b(c+a)^2}{(p-b)}+\frac{c(a+b)^2}{(p-c)}$, khi đó

$$\begin{aligned}
L&=2abc(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c})\\
&\quad+(a^2+b^2+c^2)(\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c})(\frac{a^3}{p-a}+\frac{b^3}{p-b}+\frac{c^3}{p-c})
\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Viete cho phương trình (3.27) ta được

$$L_1=\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}=\frac{4R+r}{pr}.$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \\
&= (\frac{a}{p-a} + 1) + (\frac{b}{p-b} + 1) + (\frac{c}{p-c} + 1) - 3 \\
&= p(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}) - 3 \\
&= p\frac{4R+r}{pr} - 3 = \frac{4R-2r}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} \\
&= (\frac{a^2}{p-a} + a) + (\frac{b^2}{p-b} + b) + (\frac{c^2}{p-c} + c) - (a+b+c) \\
&= p(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}) - (a+b+c) \\
&= pL_2 - 2p = 4p\frac{R-r}{r} = p\frac{4R-2r}{r} - 2p \\
&= p(\frac{4R-2r}{r} - 2) = p\frac{4R-4r}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_4 &= \frac{a^3}{p-a} + \frac{b^3}{p-b} + \frac{c^3}{p-c} \\
&= (\frac{a^2}{p-a} + a^2) + (\frac{b^2}{p-b} + b^2) + (\frac{c^2}{p-c} + c^2) - (a^2+b^2+c^2) \\
&= p(\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c}) - (a^2+b^2+c^2) \\
&= pL_3 - (a^2+b^2+c^2) = p4p\frac{R-r}{r} - 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \\
&= 4p^2\frac{R}{r} - 4p^2 - 2p^2 + 2r^2 + 8Rr = 4p^2\frac{R}{r} - 6p^2 + 2r^2 + 8Rr
\end{aligned}$$

Thay L_1, L_2, L_4 vào L, ta được

$$\begin{aligned}
L &= 2.4pRr\frac{4R+r}{pr} + 2(p^2 - r^2 - 4Rr)(\frac{4R}{r} - 2) - 4p^2\frac{R}{r} + 6p^2 - 2r^2 - 8Rr \\
&= 32R^2 + 8Rr + 8p^2\frac{R}{r} - 8Rr - 32R^2 - 4p^2 + 4r^2 + 16Rr \\
&\quad - 4p^2\frac{R}{r} + 6p^2 - 2r^2 - 8Rr \\
&= 4p^2\frac{R}{r} + 8Rr + 2p^2 + 2r^2 \\
&= 2(\frac{2p^2R + 4Rr^2 + p^2r + r^3}{r}).
\end{aligned}$$

Thay L vào (3.47), sau đó thay (3.47) vào (3.46), kết hợp với (3.42) ta được

$$\begin{aligned}
l_a^2l_b^2 + l_b^2l_c^2 + l_c^2l_a^2 &= \frac{256p^4R^2r^4}{(p^2 + r^2 + 2Rr)^2}.\frac{1}{4p.4pRr}.2(\frac{2p^2R + 4Rr^2 + p^2r + r^3}{r}) \\
&= 32pRr.\frac{2p^2R + 4Rr^2 + p^2r + r^3}{(p^2 + r^2 + 2Rr)^2} = -\beta_l.
\end{aligned}$$

3.3 Một số phương trình lượng giác đưa được về phương trình bậc ba đại số

Bài toán 3.46. Giải phương trình

$$\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$$

Chỉ dẫn: Dễ thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $\cos x$ ta được:

$$\tan^3 x + \sqrt{3}\tan^2 x - \tan x - \sqrt{3} = 0$$

Đặt $t = \tan x$, thì phương trình trở thành: $t^3 + \sqrt{3}t^2 - t - \sqrt{3} = 0$
Đây là phương trình bậc ba đại số, có ba nghiệm là $-\sqrt{3}$ và ± 1.

Bài toán 3.47. Giải phương trình:

$$\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3.$$

Chỉ dẫn: Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin^2 x(\sin x + \cos x) = 3\sin x\cos x(\cos x - \sin x) + 3\sin x$$

Rõ ràng $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình trên cho $\cos^3 x$ ta được phương trình:

$$\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x + 3\tan^2 x - 3(1 + \tan^2 x) = 0$$

Đặt $t = \tan x$, khi đó ta được: $t^3 + t^2 - 3t - 3 = 0$. Đây là phương trình bậc ba đại số có ba nghiệm là -1 và $\pm\sqrt{3}$.

Bài toán 3.48. Giải phương trình

$$8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x.$$

Chỉ dẫn: Phương trình tương đương với

$$8\left(\tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^3 = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^3 x + \cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - \cos x = 0$$

Do $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ rồi đặt $t = \tan x$ ta được phương trình:

$$\sqrt{3}t^3 + 1 + \sqrt{3}t - 3t^2 - 1 - t^2 = 0$$

Phương trình này có ba nghiệm là 0, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ và $\sqrt{3}$.

Bài toán 3.49. Giải phương trình

$$\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0$$

Chỉ dẫn: Do $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được phương trình:

$$\tan x(1 + \tan^2 x) + 1 + \tan^2 x - 4\tan^3 x = 0$$

Đặt $t = \tan x$, khi đó ta được phương trình bậc ba: $3t^3 - t^2 - t - 1 = 0$ có một nghiệm bằng 1.

Thông thường với các phương trình lượng giác đẳng cấp bậc ba với $\sin x$ và $\cos x$ thì ta đều có thể đưa được về phương trình bậc ba đại số để giải. Sau đây là một số phương trình lượng giác đối xứng với $\sin x$ và $\cos x$

Bài toán 3.50. Giải phương trình

$$1+\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3}{2}\sin 2x$$

Chỉ dẫn: Phương trình đã cho tương đương với

$$1+(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)-3\sin x\cos x=0$$

Đặt $t=\sin x\cos x\left(t\le\left|\sqrt{2}\right|\right)$, phương trình trở thành:

$$1+t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)-3\frac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^3+3t^2-3t-5=0$$

Giải phương trình này ta chỉ nhận được một nghiệm $t=-1$ thỏa mãn.

Bài toán 3.51. Giải phương trình

$$\sin^3 x-\cos^3 x=1.$$

Chỉ dẫn: Phương pháp tương tự bài toán 3.50 ta đưa về phương trình bậc ba: $t^3-3t+2=0$.
Sau đây là một số bài tập tương tự:

Bài toán 3.52. Giải phương trình

$$4\sin^3 x+3\cos^3 x-3\sin x-\sin^2 x\cos x=0.$$

Bài toán 3.53. Giải phương trình

$$\sqrt{2}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x.$$

Kết luận

Luận văn nghiên cứu phương pháp giải và các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba tổng quát trên tập hợp số thực, đồng thời đưa ra phương pháp giải phương trình bậc bốn tổng quát bằng cách đưa được về phương trình bậc ba để giải.

Bên cạnh đó luận văn cũng trình bày được một số ứng dụng của phương trình bậc ba vào giải một lớp các hệ phương trình đại số, giải quyết các bài toán về phương trình bậc ba với các nghiệm là các yếu tố độ dài trong tam giác và một số các phương trình lượng giác giải được bằng cách đưa được về phương trình bậc ba đại số.

Hướng nghiên cứu tiếp theo của đề tài này là nghiên cứu các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba trong tập hợp số phức và ứng dụng của nó vào các lĩnh vực bất đẳng thức và các bài toán cực trị trong hình học và lượng giác.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục, 1993.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo Dục, 2004.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lí và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2006.

[4] Nguyễn Văn Mậu, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2008.

[5] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Ngọc, *Chuyên đề chọn lọc: Đa thức đối xứng và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2008.

[6] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2009.

[7] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Số phức và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2010.

[8] Tạ Duy Phượng, *Phương trình bậc ba và các bài toán trong tam giác*, NXB Giáo Dục, 2006.