

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -1)$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $(\sin x - \sqrt{3} \cos x)(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{7\pi}{4}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x+1-y^2=4y\sqrt{x} \\ y+\sqrt{x}+1=y\sqrt{x} \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{2 \cdot 4^x + 6^x}{6^x + 9^x} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC và mặt bên SAB là những tam giác đều cạnh a . Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a và cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Câu 6 (1,0 điểm). Cho x và y là hai số thực thay đổi thuộc nửa khoảng $(0; 1]$ và $x + y = 4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2y + xy^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh C nằm trên đường thẳng $\Delta: x - 2y - 1 = 0$, đường thẳng BD có phương trình là $7x - y - 9 = 0$. Điểm $E(-1; 2)$ thuộc cạnh AB sao cho $EB = 3EA$. Biết rằng điểm B có tung độ dương. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C, D .

Câu 8a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 2 = 0$ và hai điểm $A(0; 2; 1), B(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 9a (1,0 điểm). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 17 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |i + \overline{z_1}| + |i + z_2|$.

A. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đường phân giác trong của góc A nằm trên đường thẳng $d: x + y = 0$, đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC có phương trình là: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Biết rằng điểm $M(3; -4)$ thuộc đường thẳng BC và điểm A có hoành độ âm. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C .

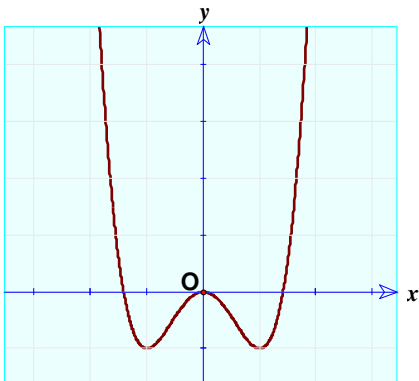
Câu 8b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ của điểm A nằm trên trục Oy sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ bằng 3.

Câu 9b (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2}} x - \log_2(y+1) = 0 \\ \sqrt{x+1} = y - 2x \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

-----HẾT-----

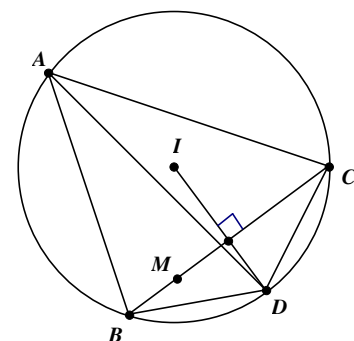
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu	Đáp án	Điểm																					
1a	- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.	0,25																					
	Sự biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.	0,25																					
	Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$																	
	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$														
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$																		
Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{\text{CD}} = 0$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{\text{CT}} = -1$.																							
Đồ thị: 	0,25																						
1b	Gọi $M(x_o; x_o^4 - 2x_o^2) \in (C)$ và d là tiếp tuyến của (C) tại điểm M . Phương trình của d : $y = (4x_o^3 - 4x_o)(x - x_o) + x_o^4 - 2x_o^2$.	0,25																					
	$A(1; -1) \in d \Leftrightarrow -1 = (4x_o^3 - 4x_o)(1 - x_o) + x_o^4 - 2x_o^2 \Leftrightarrow (x_o - 1)^2(3x_o - 1)(x_o + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = \pm 1 \\ x_o = \frac{1}{3} \end{cases}$	0,25																					
	Với $x_o = \pm 1$ thì $d: y = -1$.	0,25																					
	Với $x_o = \frac{1}{3}$ thì $d: y = -\frac{32}{27}x + \frac{5}{27}$.	0,25																					
2	Ta có $\sin\left(x - \frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4} - 2\pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.	0,25																					
	Phương trình đã cho tương đương với: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$.	0,25																					
	$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.	0,25																					

	Gọi D là hình chiếu vuông góc của H trên BC thì $HD \perp BC$. Mặt khác $BC \perp SH$ nên suy ra $BC \perp (SHD)$, do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SDH}$.	0,25
	Trong tam giác vuông BDH, ta có $HD = HB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Suy ra $SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$. $\cos((SBC), (ABC)) = \cos \widehat{SDH} = \frac{HD}{SD} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.	0,25
6	Ta có: $4xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq \frac{1}{4}$. $x, y \in (0; 1] \Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0 \Rightarrow 1 - (x+y) + xy \geq 0 \Rightarrow 1 - 4xy + xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$. $P = x^2y + xy^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) = xy(x+y) - \frac{1}{6}\left[\frac{(x+y)^2 - 2xy}{(xy)^2}\right] = 4(xy)^2 + \frac{1}{3xy} - \frac{8}{3}$. Đặt $t = xy$ thì $P = 4t^2 + \frac{1}{3t} - \frac{8}{3} = f(t)$ với $t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. $f'(t) = 8t - \frac{1}{3t^2} = \frac{24t^3 - 1}{3t^2} < 0, \forall t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. Do đó $f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right), \forall t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.	0,25
	$\max P = -\frac{13}{12}$ đạt được khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.	0,25
	$\min P = -\frac{11}{9}$ đạt được khi và chỉ khi $x = 1; y = \frac{1}{3}$ hoặc $x = \frac{1}{3}; y = 1$.	0,25
7a	$C \in \Delta: x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow C(2c + 1; c)$. Ta có $d(C, BD) = \frac{4}{3}d(E, BD) \Leftrightarrow \frac{ 13c - 2 }{\sqrt{50}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{ -18 }{\sqrt{50}} \Leftrightarrow c = 2$ hoặc $c = -\frac{22}{13}$. $c = 2 \Rightarrow C(5; 2)$ (thỏa mãn vì C, E nằm khác phía đối với BD). $c = -\frac{22}{13} \Rightarrow C\left(-\frac{31}{13}; -\frac{22}{13}\right)$ (loại vì C, E nằm cùng phía đối với BD).	0,25
	$B \in BD: 7x - y - 9 = 0 \Leftrightarrow B(b; 7b - 9)$. Ta có $\widehat{EBC} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (-1-b)(5-b) + (11-7b)(11-7b) = 0 \Leftrightarrow b = 2$ hoặc $b = \frac{29}{25}$. $b = 2 \Rightarrow B(2; 5)$ (thỏa mãn điều kiện $y_B > 0$). $b = \frac{29}{25} \Rightarrow B\left(\frac{29}{25}; -\frac{22}{25}\right)$ (loại).	0,25
	$\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 2 = \frac{4}{3}(-1-2) \\ y_A - 5 = \frac{4}{3}(2-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ y_A = 1 \end{cases}$. Vậy $A(-2; 1)$.	0,25
	$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 5 = -4 \\ y_D - 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -2 \end{cases}$. Vậy $D(1; -2)$. Vậy $A(-2; 1), B(2; 5), C(5; 2)$ và $D(1; -2)$.	0,25

8a	Gọi $\vec{n} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ là vector pháp tuyến của (P) . Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 0; -1)$. Vì A, B thuộc (P) nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2a - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a$. Phương trình của (P) : $ax + b(y - 2) + 2a(z - 1) = 0$.	0,25
	(S) có tâm $T(0; 1; -1)$ và bán kính $R = 2$. (P) tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow d(T, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{ -b - 4a }{\sqrt{5a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow 4a^2 - 8ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{b}{2}$ hoặc $a = \frac{3b}{2}$.	0,25
	$a = \frac{b}{2}$, chọn $a = 1; b = 2$ ta được $(P): x + 2(y - 2) + 2(z - 1) = 0$ hay $(P): x + 2y + 2z - 6 = 0$.	0,25
	$a = \frac{3b}{2}$, chọn $a = 3; b = 2$ ta được $(P): 3x + 2(y - 2) + 6(z - 1) = 0$ hay $(P): 3x + 2y + 6z - 10 = 0$.	0,25
9a	Ta có $\Delta' = (-1)^2 - 17 = -16 = (4i)^2$.	0,25
	Phương trình đã cho có hai nghiệm là $1 + 4i$ và $1 - 4i$.	0,25
	Nếu $z_1 = 1 + 4i$ thì $A = 2 i + 1 - 4i = 2 1 - 3i = 2\sqrt{10}$.	0,25
	Nếu $z_1 = 1 - 4i$ thì $A = 2 i + 1 + 4i = 2 1 + 5i = 2\sqrt{26}$.	0,25
7b	Gọi $(T): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Tọa độ giao điểm của d và (T) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}$ Vì A là một giao điểm của d và (T) đồng thời A có hoành độ âm nên $A(-2; 2)$. Gọi $I(2; -1)$ là tâm của (T) .	0,25
	Gọi $D(5; -5)$ là giao điểm thứ hai của d và (T) . Do AD là phân giác trong góc A nên ta có $DB = DC$. Suy ra ID là đường trung trực của BC . Đường thẳng BC qua $M(3; -4)$ và có vector pháp tuyến $\overrightarrow{ID} = (3; -4)$ nên có phương trình: $3(x - 3) - 4(y + 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 25 = 0$.	0,25
	Tọa độ của các điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x - 4y - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{29}{5} \end{cases}$	0,25
	Vậy $B(7; -1), C(\frac{3}{5}; -\frac{29}{5})$ hoặc $B(\frac{3}{5}; -\frac{29}{5}), C(7; -1)$.	0,25
8b	$A \in Oy \Leftrightarrow A(0; a; 0)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 1; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 4; 1)$.	0,25
	$\overrightarrow{AM} = (2; 1 - a; 2)$, $[\overrightarrow{AM}, \vec{u}] = (-a - 7; 0; a + 7)$. Suy ra $d(A, \Delta) = 3 \Leftrightarrow \frac{[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]}{ \vec{u} } = 3$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(-a - 7)^2 + (a + 7)^2}}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow a + 7 = 9 \Leftrightarrow a = 2$ hoặc $a = -16$.	0,25
	Vậy có hai điểm A thỏa yêu cầu là $A(0; 2; 0)$ và $A(0; -16; 0)$.	0,25
9b	Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}} x - \log_2(y + 1) = 0 & (1) \\ \sqrt{x + 1} = y - 2x & (2) \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$.	



	Điều kiện: $x > 0; y > -1$. (*) $(1) \Leftrightarrow \log_2(y+1) = \log_2 x^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$.	0,25
	Thay vào (2), ta được: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0 \\ x+1 = (x^2 - 2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0 \\ x(x-3)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + \sqrt{2} \text{ hoặc } x \leq 1 - \sqrt{2} \\ x = 0 \text{ hoặc } x = 3 \text{ hoặc } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.	0,25
	Đối chiếu với điều kiện (*), ta được $x = 3$, suy ra $y = 8$. Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm là $(x; y) = (3; 8)$.	0,25

HẾT