

VỀ MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAY

Trong [1], có bài toán ở mức độ phân loại như sau

Bài toán. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x-3)^2 = 2 + \sqrt{y^3 + 3y} \\ 3\sqrt{x-3} = \sqrt{y^2 + 8y}. \end{cases}$$

Phân tích.

1) Điều kiện: $x \geq 3; y \geq 0$ (do $y \leq -8$ không thỏa mãn $y^3 + 3y \geq 0$).

2) Do $y \geq 0$ nên phương trình thứ nhất của hệ đã cho được viết lại thành

$$x(x-3)^2 = 2 + y\sqrt{y+3}.$$

3) Nhận thấy ở vế phải xuất hiện dạng căn bậc hai của nhị thức bậc nhất, ta đặt $\sqrt{y+3} = t$ thì $t \geq \sqrt{3}$ và $y = t^2 - 3$. Khi đó phương trình trên được viết lại

$$x(x-3)^2 - 2 - t(t^2 - 3) = 0.$$

4) Sử dụng chức năng *SOLVE* của máy tính cầm tay Casio, cho $t = 1000$ máy hiện kết quả $x = 1002$. Vì vậy, vế trái của phương trình chứa nhân tử $x - t - 2$. Thực hiện phép chia đa thức cho đa thức (kiến thức lớp 8) lấy $x(x-3)^2 - 2 - t(t^2 - 3)$ chia cho $x - t - 2$ ta được thương là $x^2 + (t-4)x + t^2 - 2t + 1$. Tóm lại phương trình trên được viết lại thành

$$(x - t - 2)[x^2 + (t-4)x + t^2 - 2t + 1] = 0.$$

5) Chú ý rằng $x \geq 3$ và $t \geq \sqrt{3}$ nên $x^2 + (t-4)x + (t-1)^2 = (x-1)(x-3) + \sqrt{3} + 2 > 0$. Do vậy

$$x = 2 + t.$$

6) Tóm lại ta đã có $x = 2 + t; y = t^2 - 3$ với $t \geq \sqrt{3}$.

7) Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$3\sqrt{t-1} = \sqrt{(t^2-3)(t^2+5)}.$$

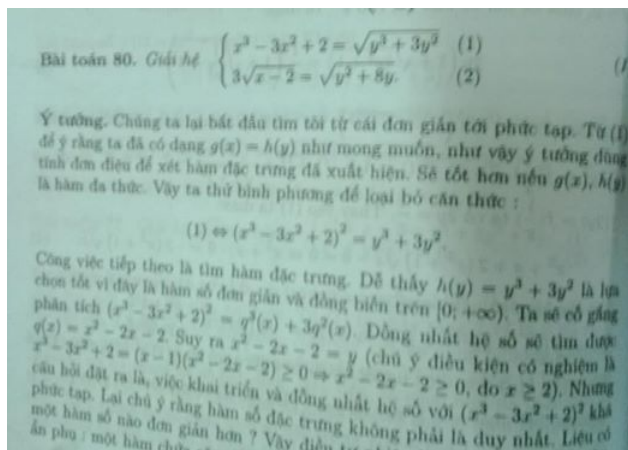
8) Bình phương 2 vế lên, chú ý $t \geq \sqrt{3} > 0$, ta được

$$t^4 + 2t^2 - 9t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 + 6t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

9) Khi $t = 2$ thì $x = 4; y = 1$. Thử lại ta thấy $(4; 1)$ là nghiệm của hệ.

10) Đáp số $(x; y) = (4; 1)$.

Nhận xét. Đây là một bài toán hay, đẹp và có tính thời sự. Bài toán có phần tương tự với một bài toán sau của tác giả Nguyễn Tài Chung.



Hình 1.

Sau đây là một số bài tập

Bài 1. (Nguyễn Huệ, TTDH 2014) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x+3)^2 = -2 + y\sqrt{y+3} \\ 13\sqrt{x} + 9\sqrt{x+2} = \frac{16(y+2)}{1+\sqrt{y+3}}. \end{cases}$$

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6y^2 - 12x = 16 \\ 4x^2 - 3x + 3x\sqrt{4-x^2} = \sqrt{-y^2+4y}. \end{cases}$$

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2x^3 - 1 = 2x^3(y^2 - 1)\sqrt{1+2y^2} \\ \sqrt[3]{x-4} + 3 = \sqrt{-4-x}\sqrt{1+2y^2}. \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 5 + 2x\sqrt{x^2+1} = 2(y+1)\sqrt{y^2+2y+2} \\ x^2 + 2y^2 = 2x - 4y + 3. \end{cases}$$

Bài 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3y + \sqrt{y^2 + 4} \\ x^2 - y^2 = 3x - 3y - 1. \end{cases}$$

Bài 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y + 1 = 2x^2 + 2xy\sqrt{1-x}. \end{cases}$$

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(4y^2+1) + 2\sqrt{x}(x^2+1) = 6 \\ x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1}) = x + \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

Bài 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 4x\sqrt{y+1} + 8x = (4x^2 - 4x - 3)\sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Đề thi thử Đại học môn Toán khối A – A₁ lần 4 năm 2014 trường THPT Chuyên Hà Tĩnh.