ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Đặng Thị Thủy

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TỔ HỢP

Chuyên Ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH.HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2013

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH.HÀ HUY KHOÁI

Phản biện 1: .....
.....

Phản biện 2: .....
.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên
Ngày .... tháng .... năm 2013

Có thể tìm hiểu tại
Thư Viện Đại Học Thái Nguyên

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Mục lục

Mục lục 1
Mở đầu 3

Chương 1. PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN 6
1.1. Giới thiệu về phương pháp đại lượng bất biến 6
1.2. Một số bài toán 6
1.2.1. Dạng 1: Phát hiện bất biến trong bài toán 6
1.2.2. Dạng 2: Giải toán bằng đại lượng bất biến 11

Chương 2. PHƯƠNG PHÁP HÀM SINH 16
2.1. Tóm tắt lí thuyết 16
2.1.1. Định nghĩa 16
2.1.2. Một số đẳng thức liên quan đến hàm sinh 16
2.2. Một số bài toán 20
2.2.1. Dạng 1: Sử dụng hàm sinh trong việc giải bài toán đếm tổ hợp nâng cao 20
2.2.2. Dạng 2: Sử dụng hàm sinh để tính tổng các biểu thức tổ hợp và chứng minh các đẳng thức tổ hợp 28

Chương 3. NGUYÊN TẮC CỰC HẠN 31
3.1. Cơ sở lí thuyết 31
3.1.1. Khái niệm điểm cực hạn 31
3.1.2. Một số định lí 32
3.2. Mô tả nội dung phương pháp 32
3.3. Một số bài toán 33

Chương 4. SỬ DỤNG ÁNH XẠ TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP 39
4.1. Kiến thức cơ bản 39

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

4.1.1. Ánh xạ 39
4.1.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh 39
4.1.3. Ánh xạ ngược của một ánh xạ 40
4.1.4. Ánh xạ hợp 40
4.2. Phương pháp ánh xạ 40
4.2.1. Nguyên lý ánh xạ 40
4.2.2. Định lý (Bài toán chia kẹo của Euler) 41
4.3. Một số bài toán 42
4.3.1. Dạng 1: Sử dụng song ánh vào các bài toán đếm nâng cao 42
4.3.2. Dạng 2: Sử dụng song ánh vào các bài toán chứng minh và tính biểu thức tổ hợp 49
Kết luận 52
Tài liệu tham khảo 53

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Mở đầu

Có thể nói tư duy về tổ hợp ra đời từ rất sớm, tuy nhiên lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới vào khoảng thế kỷ 17 bằng một loạt các công trình nghiên cứu của các nhà toán học xuất sắc như Pascal, Fermat, Leibnitz, Euler... Mặc dù vậy, trong suốt hai thế kỷ rưỡi, tổ hợp không đóng vai trò nhiều trong việc nghiên cứu tự nhiên. Đến nay với sự hỗ trợ đắc lực của máy tính, tổ hợp đã chuyển sang lĩnh vực toán ứng dụng với sự phát triển mạnh mẽ, có nhiều ứng dụng cho con người.

Nhận thức được vai trò của lý thuyết tổ hợp đối với đời sống hiện đại, lý thuyết tổ hợp đã được đưa vào chương trình toán trung học phổ thông. Các bài toán tổ hợp ngày càng chiếm một vị trí hết sức quan trọng trong các kì thi học sinh giỏi toán, olympic toán, vô địch toán... Toán tổ hợp là một dạng toán khó, đòi hỏi tư duy lôgic, tư duy thuật toán cao, tính hình tượng tốt, phù hợp với mục đích tuyển chọn học sinh có khả năng và năng khiếu toán học. Hơn nữa, nội dung các bài toán kiểu này ngày càng gần với thực tế, và điều này hoàn toàn phù hợp với xu hướng của toán học hiện đại.

Giải một bài toán tổ hợp không hề đơn giản. Khi mới làm quen với giải tích tổ hợp, chúng ta vẫn liên tục đếm nhầm vì những vụ đếm lặp, đếm thiếu, không phân biệt được các đối tượng tổ hợp cần áp dụng, không biết nên sử dụng công cụ gì để giải quyết bài toán. Khi đã vượt qua những khó khăn ban đầu này, ta lại gặp những bài toán mà việc áp dụng trực tiếp các quy tắc đếm cơ bản và các đối tượng tổ hợp không đem lại kết quả mong muốn ngay lập tức. Với những bài toán như vậy, ta cần đến các phương pháp đếm nâng cao hơn.

Để giải các bài toán tổ hợp-rời rạc có rất nhiều phương pháp. Luận văn này chúng tôi đã tìm hiểu và trình bày "**Một số phương pháp**

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

giải toán tổ hợp"

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm 4 chương.

Chương 1. PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN.
Trong chương này trình bày ...

Chương 2 . PHƯƠNG PHÁP HÀM SINH.
Trong chương này trình bày ...

Chương 3. NGUYÊN TẮC CỰC HẠN
Trong chương này trình bày ...

Chương 4. SỬ DỤNG ÁNH XẠ TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP.
Trong chương này trình bày ...

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS.TSKH .Hà Huy Khoái-Trường Đại học Thăng Long.Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Từ đáy lòng mình, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin trân trọng gửi tới các Thầy cô khoa Toán, phòng Đào tạo sau Đại học Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên cũng như các thầy cô đã tham gia giảng dạy khóa cao học 2011-2013, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ của các thầy, cô trong suốt quá trình giáo dục, đào tào của nhà trường. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao Học Toán K5C Trường Đại Học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luân văn này.

Tôi xin cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo Tỉnh Bắc Ninh, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Lý Thường Kiệt Bắc Ninh đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và những người đã quan tâm tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi hoàn thành nhiệm vụ của mình

Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên luận văn mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày kết quả nghiên cứu đã cho theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn cũng như trong quá trình xử lý văn bản và sự hiểu biết của bản thân nên chắc chắn không tể tránh khỏi những

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

thiếu sót, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày ...tháng ... năm 2013

Tác giả

Đặng Thị Thủy

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chương 1
PHƯƠNG PHÁP ĐẠI LƯỢNG BẤT BIẾN

1.1. Giới thiệu về phương pháp đại lượng bất biến

Nhiều bài toán cho biết thực hiện một số thao tác trên một hệ đối tượng nào đó như các số, quân bài, quân cờ hoặc những biến đã cho.Tuy bài toán có phức tạp nhưng ẩn chứa những đại lượng bất biến như tính chẵn lẻ hoặc tổng, tích của các biến không thay đổi,... Nhờ phát hiện ra, hoặc xây dựng những biến cố có tính chất bất biến của bài toán, ta có thể dựa vào những bất biến đó để đi đến lời giải. Phương pháp đó gọi là phương pháp sử dụng bất biến, thường được dùng trong các bài toán tổ hợp. Những bài toán liên quan đến bất biến được chia làm hai loại:
1. Những bài toán lấy bất biến làm kết luận phải tìm.
2. Những bài toán lấy bất biến làm phương pháp giải.

Thực ra không có lý thuyết chung nào cho các bài toán mà trong đó có đại lượng bất biến. Phương pháp này chỉ hình thành như một cách phân loại bài tập có những ý tưởng chung trong lời giải. Vì thế tốt nhất là tìm hiểu phương pháp bất biến thông qua một số bài tập cụ thể.

Những bài tập lựa chọn ở đây phù hợp với trình độ THPT, đặc biệt là đối với học sinh khá giỏi. Mặt khác, trong khi lựa chọn những ví dụ điển hình, chúng tôi cố gắng làm nổi bật những thao tác thường dùng khi sử dụng phương pháp bất biến trong những tình huống khác nhau.

1.2. Một số bài toán

1.2.1. Dạng 1: Phát hiện bất biến trong bài toán

Bài toán 1.3.1. *Trên bảng ta viết 10 dấu cộng (+) và 15 dấu trừ (-) tại các vị trí bất kì. Thực hiện xóa hai dấu bất kì trong đó và viết vào đó một dấu cộng (+) nếu hai dấu vừa xóa là giống nhau và dấu trừ (-) nếu*

hai dấu vừa xóa khác nhau. Làm như vậy cho đến khi trên bảng chỉ còn một dấu. Hỏi trên bảng còn lại dấu gì?

Lời giải: *Cách 1.* Ta thay mỗi dấu cộng bằng số 1, mỗi dấu trừ bằng số -1.Thao tác thực hiện chính là xóa hai số và viết lại một số là tích của chúng.Vì thế tích của tất cả các số viết trên bảng sẽ không thay đổi. Ở thời điểm xuất phát, tích các số trên bảng bằng -1, nên cuối cùng còn lại số -1, nghĩa là trên bảng còn lại dấu trừ.
Cách 2. Ta thay mỗi dấu cộng bằng số 0, còn dấu trừ bằng số 1. Thao tác thực hiện là: nếu tổng của hai số xóa đi là số chẵn thì ta viết lại số 0, nếu tổng là lẻ thì ta viết số 1. Như vậy tổng các số trên bảng sau khi thực hiện một thao tác hoặc là không thay đổi hoặc là giảm đi 2. Đầu tiên tổng các số trên bảng là một số lẻ (bằng 15), nên số cuối cùng trên bảng còn lại là số lẻ, vậy là số 1, nghĩa là trên bảng còn dấu trừ.
Cách 3. Sau khi thực hiện một thao tác, ta thấy số các dấu trừ hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 đơn vị. Như vậy tính chẵn lẻ của số các dấu trừ cũng là một bất biến.Tại trạng thái ban đầu số các dấu trừ là số lẻ (15), nên khi còn lại một dấu, đó phải là dấu trừ.
Phân tích ba cách giải ta thấy: Trong **Cách 1** ta thay các dấu bởi các số, và lợi dụng tính bất biến của tích các số viết trên bảng; **cách 2** sử dụng bất biến là tính chẵn lẻ của tổng các số và **cách 3** là sự bất biến của tính chẵn lẻ của số các dấu trừ. Như vậy trong cách giải ta sử dụng tính bất biến của tích, tổng, hoặc tính chẵn lẻ của các số. Qua cách giải trên ta thấy rằng khi gặp những lớp bài toán mà thao tác lặp đi, lặp lại, ta phải biến đổi và tìm ra những đại lượng bất biến của thao tác ta thực hiện. Chú ý rằng các thao tác ta thực hiện không phụ thuộc vào thứ tự các đối tượng được chọn. □

Bài toán 1.3.2.*Trên bảng ta viết tập hợp số gồm các số 0; 1 và 2. Cho phép xóa hai số khác nhau và điền vào đó số còn lại trong 3 số (Nghĩa là 2 thay cho 0 và 1; 1 thay cho 0 và 2; 0 thay cho 2 và 1). Chứng minh rằng nếu sau một số lần thực hiện thao tác trên, trên bảng chỉ còn lại một số duy nhất thì số đó không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện các thao tác .*

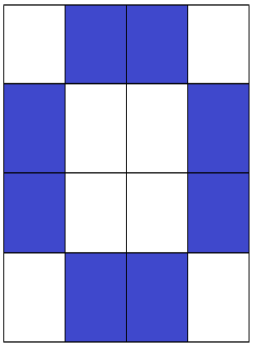
Lời giải: Ta thực hiện một lần thao tác thì số lượng mỗi loại trong ba loại số trên tăng lên hoặc giảm đi 1, suy ra số lượng các số thay đổi tính chẵn lẻ. Khi trên bảng chỉ còn lại một số, nghĩa là hai trong các số 0, 1 và 2 có số lượng bằng 0 còn số thứ ba bằng một. Như vậy ngay từ đầu số lượng hai số trong ba số trên bảng phải có cùng tính chẵn lẻ và số lượng loại số còn lại có tính chẵn lẻ khác. Vì thế không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện thao tác, cuối cùng chỉ còn một trong các số 0, 1, và 2, số này chính là số thuộc loại mà số lượng loại số đó khác tính chẵn lẻ với số lượng hai loại số kia.

Nhận xét. Trong chứng minh bài toán trên, nếu số lượng cả ba loại số trên bảng có cùng tính chẵn lẻ thì dù có thực hiện thao tác trên thế nào đi nữa, cuối cùng cũng không thể nào còn một số duy nhất trên bảng. □

Bài toán 1.3.3. *Một hình vuông có cạnh 4 cm được chia thành 16 ô vuông, mỗi ô vuông có cạnh 1 cm. Tại mỗi một trong 15 ô nào đó ta đánh dấu cộng (+), ô còn lại đánh dấu trừ (-). Những dấu ở các ô vuông có thể thay đổi đồng thời theo hàng, một cột hoặc theo một đường chéo. Có khả năng sau hữu hạn lần đổi dấu theo nguyên tắc trên dẫn đến tất cả các ô vuông đều có dấu cộng (+) hay không?*

1	1	-1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Hình 1.1



Hình 1.2

Lời giải: Ta thay dấu cộng (+), trừ (-) bằng các số tương ứng 1 và -1. Trạng thái ban đầu giả sử được mô tả bởi **Hình1.1**. Có thể thấy rằng tích các số ở các ô được tô màu trong **Hình1.2** là một đại lượng bất

biến, vì số ô được tô màu trong mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo là số chẵn, nên tích của chúng không đổi sau mỗi thao tác. Ở thời điểm xuất phát, tích đó bằng -1. Nghĩa là trong các ô được tô màu luôn tồn tại một ô có số -1, suy ra không thể nhận được bảng không chứa một dấu trừ (-) nào. □

Bài toán 1.3.4.
Các số 1,2,. . . ,n được sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Ta có thể đổi chỗ hai số kề nhau tùy ý. Chứng minh rằng, với một số lẻ lần thực hiện phép tính, dãy nhận được khác với dãy ban đầu.

Lời giải: Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số 1, 2, ..., n viết theo thứ tự nào đó. Ta có một phép thế của các số 1, 2, . . . , n .Các số a_i, a_j trong phép thế này gọi là lập nên một nghịch thế nếu i>j nhưng $a_i < a_j$. Khi đổi chỗ hai số kề nhau, ta đổi thứ tự của chúng trong khi vẫn giữ nguyên thứ tự các số còn lại. Như vậy, số các nghịch thế sẽ tăng hoặc giảm một đơn vị. Sau một số lẻ lần thực hiện phép toán, ta làm thay đổi tính chẵn lẻ của số các nghịch thế và do đó nhận được một dãy khác với dãy ban đầu. □

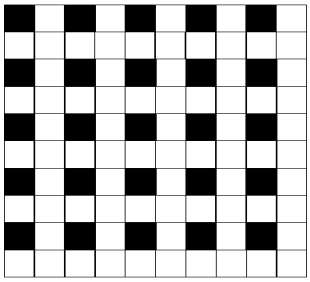
Bài toán 1.3.5.
Ngoài biển đông, trên hòn đảo sinh sống giống thằn lằn có ba loại màu: màu xám có 133 con, màu nâu có 155 con và màu đỏ có 177 con. Nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau thì chúng đồng thời đổi màu sang màu thứ ba. Trong những trường hợp hai con thằn lằn cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên không đổi màu. Có xảy ra tình trạng trên đảo tất cả thằn lằn trở thành cùng một màu được không?

Lời giải: Ta có ba số nguyên 133, 155, 177 chia cho 3 được bộ số dư là 1, 2 và 0. Khi đó xét các khả năng sau:
Nếu một con thằn lằn màu xám gặp một con thằn lằn màu nâu thì chúng đồng thời đổi thành màu đỏ. Khi đó ta có 132 con thằn lằn màu xám, 154 con thằn lằn màu nâu và 179 con đỏ. Những số dư của 132, 154 và 179 chia cho 3 tương ứng là 0, 1 và 2, nghĩa là gặp lại đầy đủ các số dư đã cho.

Nếu một con thằn lằn màu xám gặp một con thằn lằn màu đỏ thì chúng đồng thời đổi thành màu nâu. Khi đó ta có 132 con thằn lằn màu xám, 157 con thằn lằn màu nâu và 176 con thằn lằn màu đỏ. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là 0, 1 và 2 , nghĩa là gặp lại đầy đủ các số dư đã cho.
Nếu một con thằn lằn màu nâu gặp một con thằn lằn màu đỏ thì chúng đồng thời đổi thành màu xám. Khi đó ta có 135 con thằn lằn màu xám, 154 con thằn lằn màu nâu và 176 con thằn lằn màu đỏ. Lấy những số trên chia cho 3 cho số dư tương ứng là 0, 1 và 2 , nghĩa là gặp lại đầy đủ các số dư đã cho Vậy bất biến ở đây là dù thay đổi màu như thế nào thì số dư của các số lượng thằn lằn chia cho 3 đều có đầy đủ ba số 0, 1 và 2.
Số lượng tất cả thằn lằn trên đảo là 133+ 155 + 177 = 465 là một số chia hết cho 3. Nếu tất cả thằn lằn đều cùng một màu thì số dư của số lượng thằn lằn màu xám, màu nâu, màu đỏ chia cho 3 tương ứng là 0, 0, 0(vì hai màu còn lại khôn có con nào). Điều này vô lí vì các số dư phải có đầy đủ các số 0, 1, 2 khi chia cho 3. Như vậy, câu trả lời là không thể được. □

Bài toán 1.3.6. *Cho một bảng hình ô vuông có cạnh 10 cm được chia ra thành 100 ô vuông nhỏ cạnh 1 cm. Đặt lên đó 25 hình chữ nhật có cạnh 4 cm và 1 cm, mỗi hình chữ nhật bao gồm 4 ô vuông có cạnh là 1 cm. Có thể sắp đặt những hình chữ nhật trên bảng hình vuông sao cho chúng phủ toàn bộ bảng vuông hay không?(Mỗi ô vuông nhỏ chỉ được phủ bởi một hình chữ nhật và không hình chữ nhật nào có cạnh lồi ra khỏi bảng).*

Lời giải: Ta tô bảng ô vuông bằng màu đen, trắng như hình vẽ.
Ta nhận được 25 ô đen và 75 ô trắng. Ta chú ý là đặt hững hình chữ nhật trên bảng vuông sao cho mỗi ô vuông của hình chữ nhật trùng với một ô vuông nào đó của bảng vuông. Hình chữ nhật này sẽ phủ lên hoặc là 2 hoặc là 0 ô vuông đen. Từ đó suy ra khi đặt tất cả 25 hình chữ nhật trên bảng vuông, chúng sẽ phủ kín một số chẵn những ô vuông đen. Bởi vì số lượng của ô vuông đen đã tô là 25, nó không phải là một số chẵn.



Hình 1.4

Như vậy không thể phủ 25 hình chữ nhật lên hình vuông đã cho. □

1.2.2. Dạng 2: Giải toán bằng đại lượng bất biến

Bằng cách phát hiện ra những đại lượng bất biến trong bài toán ta có thể giải nhiều bài toán. Sau đây là một số bài tập giúp tìm hiểu thêm những cách tìm đại lượng bất biến trong giải toán.

Bài toán 1.3.7. *Có ba đống sỏi gồm những viên sỏi nhỏ có số lượng tương ứng là 19, 8 và 9 (viên sỏi). Ta được phép chọn hai đống sỏi và chuyển từ mỗi đống sỏi đã chọn một viên sang đống sỏi thứ ba. Sau một số lần làm như vậy thì có khả năng tạo ra mọi đống sỏi đều có 12 viên sỏi hay không?*

Lời giải: Đặt số viên sỏi trong ba đồng sỏi tương ứng là a, b, c. Ta xét số dư chia cho 3 của những số này. Khi xuất phát, những số dư này là 1, 2, 0. Sau một lần chọn thay đổi, những số dư này là 0, 1, 2 vì hai đống sỏi có sự chuyển một viên sỏi đến đống thứ ba. Như vậy những số dư luôn luôn là 0, 1, 2 với những thứ tự khác nhau. Do đó tất cả các đống sỏi đều có 12 viên sỏi là không thể được (vì khi đó số dư là 0, 0, 0, vô lí). Vậy không thể tạo ra mọi đống sỏi đều có 12 viên sỏi . □

Bài toán 1.3.8. *Hai người chơi một trò chơi với hai đống kẹo. Đống kẹo thứ nhất có 12 cái và đống thứ hai có 13 cái. Mỗi người chơi được lấy hai chiếc kẹo từ một trong hai đống hoặc chuyển một cái kẹo từ đống thứ nhất sang đống thứ hai. Người chơi nào không thể làm được những thao tác trên coi như là thua. Hãy chứng minh rằng người chơi đi lượt thứ hai không thể thua. Người đó có thể thắng không*?

Lời giải: Ta kí hiệu S là giá trị tuyệt đối của số keọ trong đống thứ hai trừ đi số kẹo trong đống thứ nhất.
Khởi đầu $S = |13 - 12| = 1$. Sau mỗi nước đi S sẽ giảm hoặc tăng lên 2. Như vậy số dư của S chia cho 4 có dạng 1, 3, 1, 3, ...Sau mỗi nước đi của người thứ nhất số dư của S chia cho 4 luôn luôn là 3. Ta thấy rằng người chơi bị thua khi và chỉ khi đến lượt anh ta thì không còn cái kẹo nào ở đống thứ nhất và chỉ còn một cái kẹo ở đống thứ hai.
Khi đó $S = |1 - 0| = 1$. Do đó người đi sau luôn luôn còn nước đi, do đó người đó không thua. Ta thấy rằng, hoặc là tổng số kẹo ở hai đống giảm đi hoặc là số kẹo ở đống thứ nhất giảm đi, như vậy trò chơi phải có kết thúc, do đó người chơi thứ hai phải thắng. □

Bài toán 1.3.9. *Mỗi thành viên của một câu lạc bộ có nhiều nhất là ba đối thủ trong câu lạc bộ (đối thủ ở đây được hiểu là tương hỗ). Chứng minh rằng những thành viên của câu lạc bộ có thể chia thành hai nhóm sao cho mỗi thành viên trong mỗi nhóm có nhiều nhất một đối thủ trong cùng nhóm.*

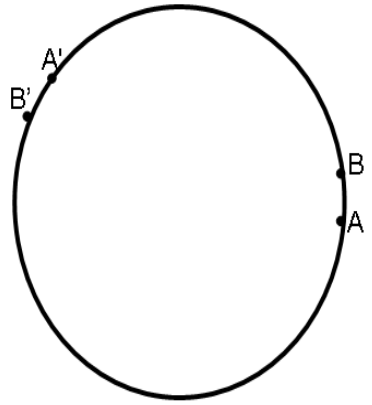
Lời giải: Thoạt tiên ta chia ngẫu nhiên những thành viên trong câu lạc bộ thành hai nhóm. Kí hiệu S là số các cặp đối thủ trong cùng nhóm. Nếu một thành viên nào đó có nhiều hơn một đối thủ trong cùng nhóm, thì thành viên này có nhiều nhất một đối thủ trong nhóm kia. Ta chuyển thành viên đó sang nhóm kia. Làm như vậy, ta sẽ giảm S đi ít nhất 1 đơn vị. Vì S là một số nguyên không âm, nó không thể giảm mãi được. Như vậy sau một số hữu hạn lần chuyển đổi, mỗi thành viên có thể có nhiều nhất một đối thủ trong cùng nhóm. □

Chú ý: Phương pháp chứng minh bài toán trên gọi là phương pháp xuống dốc vô hạn. Nó chỉ ra rằng ta không thể giảm mãi số khi nó chỉ có hữu hạn giá trị.

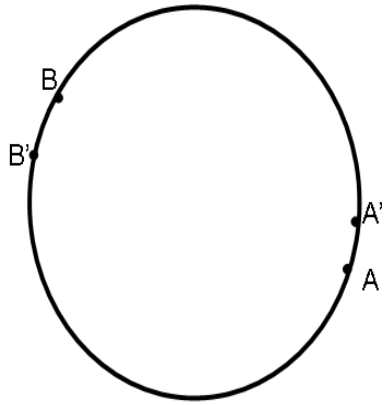
Bài toán 1.3.10. *Cho 13 đoạn thẳng đứng, đầu trên tô đỏ, đầu dưới tô xanh. Mỗi lượt người ta đổi màu hai đầu của 4 đoạn thẳng: đỏ thành xanh, xanh thành đỏ. Có cách nào sau một số lượt đổi màu, đầu trên của 13 đoạn thẳng được tô xanh hay không?*

Lời giải: Nhận thấy rằng sau mỗi lần đổi màu thì số đầu trên mầu đỏ của 13 đoạn thẳng, luôn thay đổi một số chẵn, mà ban đầu số đầu trên màu đỏ là số lẻ (13) nên không thể có khả năng không có đầu trên nào màu đỏ sau một số lần đổi, tức là không xảy ra trường hợp cả 13 đầu trên của 13 đoạn thẳng đều có màu xanh. □

Bài toán 1.3.11. *Tại một hội nghị có 2n quan khách. Mỗi vị khách được mời có nhiều nhất n-1 kẻ thù. Chứng minh rằng các vị khách có thể ngồi quanh một bàn tròn sao cho không ai ngồi cạnh kẻ thù của mình.*



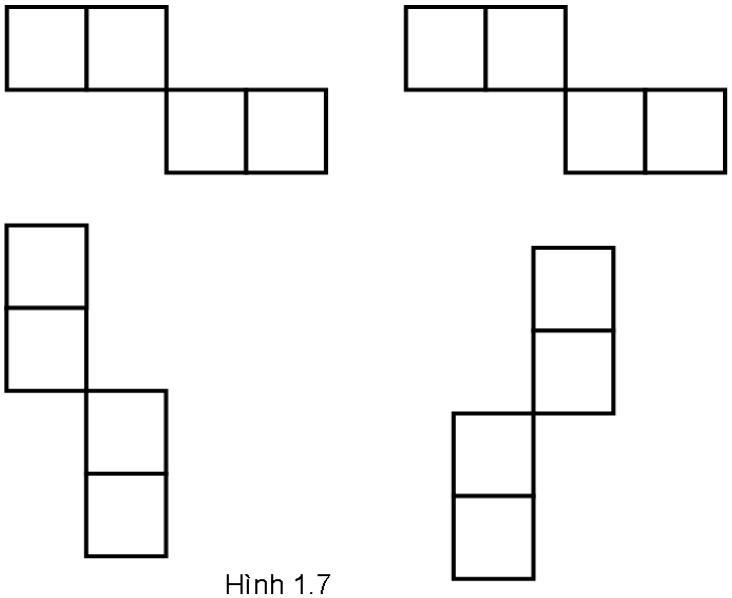
Hình1.5



Hình1.6

Lời giải: Trước tiên ta xếp các vị khách ngồi vào vị trí bất kì. Gọi H là số những đôi thù địch ngồi cạnh nhau. Ta phải tìm thuật toán để làm giảm số H khi H>0. Giả sử (A,B) là cặp thù địch với B ngồi bên phải A (Hình 1.5). Ta phải tách được cặp này ra. Điều này thực hiện được nếu có một cặp khác cạnh nhau (A',B'), mà (A,A') và (B,B') không là những cặp kẻ thù. Khi đó ta đổi chỗ B và A' (Hình 1.6) và H sẽ giảm. Chỉ còn chứng minh rằng một cặp (A',B') như trên luôn luôn tồn tại với B' ngồi bên phải A' mà A' là bạn của A và B' là bạn của B. Ta khởi đầu từ A và đi theo chiều ngược kim đồng hồ(đi về phía phải) quanh bàn. Ta sẽ bắt gặp ít nhất n người bạn (không phải kẻ thù) của A. Về phía phải mỗi người bạn của A có ít nhất n chỗ. Những chỗ này không thể bị chiếm hết bởi các kẻ thù của B vì B chỉ có nhiều nhất n-1 kẻ thù. Như vậy tồn tại người bạn A' của A mà về phía phải người này là B' mà B' là người bạn của B. □

Bài toán 1.3.12 (VMO 2006). *Cho m và n là ác số nguyên dương lớn hơn 3 và bảng ô vuông kích thước $m \times n$. Cho phép đặt bi vào các ô vuông con của bảng theo cách sau: mỗi lần, đặt vào 4 ô vuông con (mỗi ô 1 viên) mà 4 ô vuông đó tạo thành 1 trong các hình dưới đây: Hỏi bằng*



Hình 1.7

cách trên ta có thể đặt bi vào các ô vuông con của bảng sao cho số bi trong mỗi ô vuông đều bằng nhau hay không, nếu m=2005 và n=2006.

Lời giải: Giả sử sau một số hữu hạn lần phép thực hiện đặt bi của đề bài, ta đặt được vào mỗi ô vuông con của bảng 2005×2006 là k viên bi. Tô màu tất cả các ô vuông con thuộc hàng lẻ của bảng bởi màu đen và coi các ô không tô màu có màu trắng. Khi đó, số ô màu đen bằng 2.1032 và số ô màu trắng bằng 2006.1002 Ta thấy, ở mỗi lần đặt bi, ta đều đặt đúng hai viên bi vào các ô màu đen và đúng 2 viên bi vào các ô màu trắng. Do đó, sau mỗi lần đặt bi, số bi trong các ô màu đen và số bi trong các ô màu trắng luôn bằng nhau. Suy ra, khi ở mỗi ô có k viên bi, ta phải có $2.1032.k = 2006.1002.k$ suy ra k=0. Điều vô lý này chứng tỏ giả sử ban đầu là sai, vì thế ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 1.3.13(Olympic Bungari)
Có 2000 quả cầu trắng trong một chiếc hộp. Bên ngoài chiếc hộp cũng có các quả cầu trắng, xanh và đỏ với số lượng không hạn chế. Trong mỗi

lần thay đổi chúng ta có thể thay đổi hai quả cầu trong hộp bởi 1 hoặc 2 quả cầu theo cách sau:
2 quả trắng bởi một quả xanh, 2 quả đỏ bởi 1 quả xanh, 2 quả xanh bởi 1 quả trắng và 1 quả đỏ, 1 quả trắng và 1 quả xanh bởi 1 quả đỏ; hoặc 1 quả xanh và 1 quả đỏ bởi 1 quả trắng.
(a) Sau một số hữu hạn lần thực hiện như trên còn lại 3 quả cầu trong hộp. CMR có ít nhất 1 quả xanh trong 3 quả cầu còn lại.
(b) Liệu có thể xảy ra sau một số hữu hạn lần thực hiện như trên trong hộp còn lại đúng một quả cầu?

Lời giải: Ta gắn giá trị i cho mỗi quả cầu trắng, -i cho mỗi quả cầu đỏ, và -1 cho mỗi quả cầu xanh. Ta có thể kiểm tra lại rằng các phép thay thế đã cho không làm thay thế các giá trị của các quả cầu trong hộp. Tích các giá trị của các quả cầu ban đầu là $i^{2000} = 1$.
Nếu trong hộp còn lại ba quả cầu không có quả nào màu xanh thì tích các giá trị của chúng sẽ là: $\pm i$, mâu thuẫn. Do đó, nếu trong hộp còn lại ba quả thì phải có ít nhất một quả màu xanh, (a) được chứng minh.
Hơn nữa, vì không có quả nào có giá trị 1 nên trong hộp phải chứa ít nhất hai quả. Do đó, không thể xảy ra trường hợp trong hộp còn lại 1 quả. □

Chương 2
PHƯƠNG PHÁP HÀM SINH

2.1. Tóm tắt lí thuyết

2.1.1. Định nghĩa

*Định nghĩa 1:Hàm sinh của dãy số thực $a_0; a_1; a_2; ...; a_n; ...$ là hàm số được xác định bởi $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$

*Định nghĩa 2: Cho dãy số thực $a_0; a_1; a_2; ...; a_n; ...$ Hàm số cho bởi công thức $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}$ được gọi là hàm sinh dạng mũ của dãy.

2.1.2. Một số đẳng thức liên quan đến hàm sinh

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{C}^i_{i+n-1}x^i.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x^r} = 1 + x^r + x^{2r} + x^{3r} + \cdots$$

* Hai mệnh đề thường được sử dụng

+ **Mệnh đề 1**: Cho hàm sinh $G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n$

a) Đặt a^r là hệ số của x^r trong khai triển của G(x) thì

$$a^r = \mathrm{C}^r_{r+n-1}.$$

b) $(1-x^m)^n = 1 - \mathrm{C}_n^1 x^m + \mathrm{C}_n^2 x^{2m} - \cdots + (-1)^n x^{mn}$.

c) $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1+x+x^2+\cdots)^n$.

+ **Mệnh đề 2** (Công thức xác định hệ số tích của hai hàm sinh)
Cho hai hàm sinh của hai dãy $(a_n); (b_n)$ lần lượt là:
$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$
$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$
Đặt

$$\begin{aligned} G(x) = A(x).B(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Khi đó hệ số của x^r trong khai triển của G(x) là:

$$a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_{r-2}b_2 + a_{r-1}b_1 + a_rb_0.$$

* Quy tắc xoắn : Gọi A(x) là hàm sinh cho dãy cách chọn các phần tử từ tập A, B(x) là hàm sinh cho dãy cách chọn các phần tử từ tập B. Nếu A và B rời nhau thì hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ tập AUB là A(x).B(x)
Ví dụ. Xét dãy C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n, 0; ... có hàm sinh là:

$$F(x) = \mathrm{C}_n^0 + \ \mathrm{C}_n^1 x + \mathrm{C}_n^2 x^2 + \cdots + \ \mathrm{C}_n^n x^n = (1+x)^n.$$

Ta thấy với mỗi số k, số C_n^k chính là cách chọn k phần tử từ tập gồm n phần tử, trong khai triển thì nó là hệ số của x^{k}.
Đây là ý tưởng chính của việc sử dụng hàm sinh trong bài toán đếm, thay vì đi tính trực tiếp số cách chọn, ta đưa về việc tính hệ số của hàm sinh sinh bởi dãy các cách chọn đó.
*Ví dụ : *Giả sử có 4 loại kẹo: Chanh, dâu, sôcôla, sữa. Tìm hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo thỏa mãn các điều kiện khác nhau sau đây*:

a) *Mỗi loại kẹo xuất hiện số lẻ lần.*

b) *Số kẹo của mỗi loại kẹo chia hết cho 3.*

c) *Không có kẹo socola và có nhiều nhất 1cái kẹo chanh.*

d) *Có 1; 3 hay 11 cái kẹo socola và có 2; 4 hoặc 5 cái kẹo chanh.*

e) *Mỗi loại kẹo xuất hiện ít nhất 10 lần.*

Lời giải: a) Vì mỗi loại kẹo xuất hiện là như nhau nên ta chỉ cần tìm hàm sinh cho số cách chọn một loại kẹo.
Ta có

0 cách chọn 0 cái kẹo
1cách chọn 1cái kẹo
0 cách chọn 2 cái kẹo
1 cách chọn 3 cái kẹo
.....

Vậy hàm sinh cho số cách chọn một loại kẹo là: $x + x^3 + x^5 + \cdots$
Áp dụng quy tắc xoắn ta được hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ 4 loại kẹo là

$$A(x) = (x + x^3 + x^5 + \cdots)^4 = x^4(1 + x + x^2 + \cdots)^4 = \frac{x^4}{(1 - x^2)^4}$$

b) Ta có số cách chọn kẹo thỏa mãn điều kiện số kẹo của mỗi loại chia hết cho 3 là

1 cách chọn 0 cái kẹo
0 cách chọn 1 cái kẹo
0 cách chọn 2 cái kẹo
1 cách chọn 3 cái kẹo
0 cách chọn 4 cái kẹo
0 cách chọn 5 cái kẹo
1 cách chọn 6 cái kẹo
. . . . . .

Hàm sinh cho số cách chọn mội loại kẹo thỏa mãn điều kiện là:

$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots$$

Vậy hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ 4 loại kẹo thỏa mãn điều kiện là:

$$B(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)^4 = \frac{1}{(1 - x^3)^4}.$$

c) Hàm sinh cho số cách chọn kẹo socola là : 1
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo chanh là : 1+ x
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo dâu là :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn kẹo sữa là:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Vậy hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ 4 loại kẹo thỏa mãn điều kiện là:

$$C(x) = 1.(1+x).\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

d) Hàm sinh cho số cách chọn kẹo socola là: $x + x^3 + x^{11}$
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo chanh là : $x^2 + x^4 + x^5$
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo dâu là :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn kẹo sữa là:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Vậy hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ 4 loại kẹo thỏa mãn điều kiện là:

$$D(x) = (x + x^3 + x^{11}).(x^2 + x^4 + x^5).\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{x^3}{(1-x)^2}.(1 + x^2 + x^{10}).(1 + x^2 + x^3)$$

d) Hàm sinh cho số cách chọn kẹo sao cho một loại kẹo xuất hiện ít nhất 10 lần là

$$\mathrm{x}^{10} + \mathrm{x}^{11} + \mathrm{x}^{12} + \cdots$$

Vậy hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ 4 loại kẹo thỏa mãn điều kiện là

$$E(x) = (x^{10} + x^{11} + x^{12} + \cdots)^4 = x^{40}(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^4 = \frac{x^{40}}{(1-x)^4}.$$

□

2.2. Một số bài toán

2.2.1. Dạng 1: Sử dụng hàm sinh trong việc giải bài toán đếm tổ hợp nâng cao

Bài toán 2.2.1.. *Vào ngày chủ nhật, cô Hoa đi chơi và mua quà là 12 quả cam cho 3 đứa trẻ An, Bình, Chi. Hỏi cô Hoa có bao nhiêu cách phân phối 12 quả cam sao cho An có ít nhất 4 quả, Bình và chi mỗi người đều có ít nhất 2 quả, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 quả.*

Lời giải: Hàm sinh cho số cách chọn quả cho An là:

$$A(x) = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^4.\frac{1-x^5}{1-x}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cho Bình là:

$$B(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x^2.\frac{1-x^5}{1-x}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cho Chi là:

$$C(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = x^2(1 + x + x^2 + x^3) = x^2.\frac{1-x^4}{1-x}.$$

Hàm sinh cho số cách phân phối 12 quả cam thỏa mãn điều kiện đề bài

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

là:

$$\begin{aligned} G(x) &= A(x)B(x)C(x) \\ &= x^4.\frac{1-x^5}{1-x}.x^2.\frac{1-x^5}{1-x}.x^2.\frac{1-x^4}{1-x} \\ &= \frac{x^8(1-x^5)^2(1-x^4)}{(1-x)^3} \\ &= x^8(1-2x^5+x^{10})(1-x^4)(\frac{1}{1-x})^3 \\ &= (x^8-x^{12}-2x^{13}+2x^{17}+x^{18}-x^{22})(\frac{1}{1-x})^3. \end{aligned}$$

Do cần tìm hệ số của x^{12} trong khai triển của G(x) nên ta chỉ quan tâm đến hệ số của

$$U(x) = (x^8 - x^{12} - 2x^{13} + 2x^{17} + x^{18} - x^{22}).$$

Do đó U(x) chỉ có các hệ số $a_8; a_{12}$ thỏa mãn.
Và hệ số của x^r trong khai triển $V(x) = (\frac{1}{1-x})^3$ là $b_r = \mathrm{C}_{r+2}^r$.
Vậy hệ số của x^{12} trong khai triển của G(x) là:
$a_8b_4 + a_{12}b_o = 1.\mathrm{C}_6^4 - 1.\mathrm{C}_2^0 = 14.$
Kết luận : Cô Hoa có 14 cách phân chia 12 quả cam cho 3 đứa trẻ thỏa mãn yêu cầu An có ít nhất 4 quả, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 quả, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 quả
Nhận xét: *Thoạt nhìn ban đầu chúng ta thấy cách giải bằng liệt kê cho lời giải ngắn gọn hơn cách hàm sinh nhưng suy nghĩ sâu thêm chúng ta sẽ thấy đối với bài toán có dữ kiện lớn thì cách làm liệt kê tỏ ra kém hiệu quả thậm chí khó làm được và mất nhiều thời gian hơn rất nhiều.*
Chẳng hạn ta thay đổi bài toán như sau: Vào ngày nghỉ chủ nhật, cô Hoa đi chơi và mua quà là 50 cái kẹo cho 3 đứa trẻ An, Bình, Chi. Hỏi cô Hoa có bao nhiêu cách phân phối 50 cái kẹo sao cho An có ít nhất 4 cái, Bình và Chi mỗi người đều có ít nhất 2 cái, nhưng Chi không được nhiều hơn 5 cái.

□

Bài toán 2.2.2.*Có bao nhiêu cách xếp một giỏ gồm n trái cây gồm*

táo, chuối, cam, đào sao cho số táo phải là chẵn, số chuối chia hết cho 5, chỉ có thể nhiều nhất 4 quả cam và nhiều nhất một quả đào?

Lời giải: Hàm sinh cho số cách chọn quả táo (số chẵn) là:

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả chuối (số chia hết cho 5) là:

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả cam (nhiều nhất 4 quả) là:

$$C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn quả đào (nhiều nhất 1 quả) là:

$$D(x) = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

Hàm sinh cho số cách chọn cả 4 loại quả là:

$$G(x) = A(x)B(x)C(x)D(x) = \frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^5}.\frac{1-x^5}{1-x}.\frac{1-x^2}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Khai triển $G(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ theo chuỗi lũy thừa ta có

$$G(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

Vậy số cách chọn trái cây thỏa mãn đề bài là n+1 cách. □

Bài toán 2.2.3. *Trong một túi sách của Long có 10 chiếc nhẫn vàng, 20 chiếc nhẫn bạc và 30 viên kim cương. Hỏi Long có bao nhiêu cách chọn ra 30 đồ vật để đem bán, biết rằng mỗi loại trang sức có ít nhất 1 đồ vật được lấy ra.*

Lời giải: Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất một chiếc nhẫn vàng được chọn là:

$$M(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10}$$

Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất một chiếc nhẫn bạc được chọn là:

$$N(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{20}$$

Hàm sinh cho số cách chọn ít nhất một viên kim cương được chọn là:

$$P(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{30}$$

Hàm sinh cho số cách chọn 30 đồ vật để đem bán,biết rằng mỗi loại trang sức có ít nhất 1 đồ vật được lấy ra là

$$\begin{aligned}
G(x) &= M(x)N(x)P(x) \\
&= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{20})(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{30}) \\
&= x^3(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{19})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{29}) \\
&= x^3\frac{1 - x^{10}}{1 - x}.\frac{1 - x^{20}}{1 - x}.\frac{1 - x^{30}}{1 - x} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{10})(1 - x^{20})(1 - x^{30})}{(1 - x)^3} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{30} - x^{20} + x^{50} - x^{10} + x^{40} + x^{30} - x^{60})}{(1 - x)^3} \\
&= \frac{x^3(1 - x^{10} - x^{20} + x^{40} + x^{50} - x^{60}}{(1 - x)^3} \\
&= (x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}).\frac{1}{(1 - x)^3}.
\end{aligned}$$

Đặt

$$A(x) = (x^3 - x^{13} - x^{23} + x^{43} + x^{53} - x^{63}); B(x) = \frac{1}{(1 - x)^3}.$$

Hệ số khác 0 và có bậc nhỏ hơn 30 của A(x) là:

$$a_3 = 1; a_{13} = -1; a_{23} = -1.$$

Và $B(x) = \dfrac{1}{(1 - x)^3} = \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} \mathrm{C}_{r+2}^{r} x^r$ có hệ số của x^r là $b^r = \mathrm{C}_{r+2}^{r}$.

Vậy hệ số của x^{30} trong khai triển của G(x) là:

$$a_3 b_{27} + a_{13} b_{17} + a_{23} b_7 = \mathrm{C}_{29}^{27} - \mathrm{C}_{19}^{17} - \mathrm{C}_{9}^{7} = 199.$$

Vậy Long có 199 cách chọn 30 đồ vật để đem bán, biết rằng mỗi loại trang sức có ít nhất 1 đồ vật được lấy ra. □

Bài toán 2.2.4 (Bài 5 VMO 2012).*Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu G1, G2, G3, G4, G5 và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:*
1) Mỗi ghế có đúng một người ngồi.
2) Thứ tự ngồi của các cô gái xét từ trái qua phải là:G1,G2,G3,G4,G5.
3) Giữa G1 và G2 có ít nhất 3 chàng trai.
4) Giữa G4 và G5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.
Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy?

Lời giải: Gọi x_1 là số chàng trai được xếp bên trái G1.
x_2 là số chàng trai được xếp giữa G1 và G2.
x_3 là số chàng trai được xếp giữa G2 và G3.
x_4 là số chàng trai được xếp giữa G3 và G4.
x_5 là số chàng trai được xếp giữa G4 và G5.
x_6 là số chàng trai được xếp bên phải G5.
Khi đó bộ số $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ hoàn toàn xác định vị trí các cô gái và ta có:
i) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$.
ii) $x_2 \geq 3$.
iii) $1 \leq x_5 \leq 4$.
Ta đi tính số cách chọn bộ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.
Hàm sinh cho số cách chọn x_1, x_3, x_4, x_6 giống như nhau và bằng $\dfrac{1}{1-t}$.
Hàm sinh cho số cách chọn x_2 là $t^3 + t^4 + t^5 + \cdots = \dfrac{t^3}{1-t}$.
Hàm sinh cho số cách chọn x_5 là $t + t^2 + t^3 + t^4 = t(1 + t + t^2 + t^3)$.
Hàm sinh cho số cách chọn bộ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ là:

$$f(t) = \frac{t^4}{(1-t)^5}(1+t+t^2+t^3) = \frac{t^4}{(1-t)^5} + \frac{t^5}{(1-t)^5} + \frac{t^6}{(1-t)^5} + \frac{t^7}{(1-t)^5}.$$

Số cần tìm chính là hệ số của t^{12} trong khai triển của f(t) thành lũy thừa hay chính bằng tổng các hệ số của $t^8; t^7; t^6; t^5$ trong khai triển của $g(t) = \dfrac{1}{(1-t)^5}$.
Hệ số của t^n là C^4_{n+4}.
Vậy số cách chọn bộ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ là: $C^4_{12} + C^4_{11} + C^4_{10} + C^4_9$.
Do vai trò của 12 người nam là như nhau nên số cách xếp thỏa mãn điều kiện bài toán là: $(C^4_{12} + C^4_{11} + C^4_{10} + C^4_9).12!$. □

Bài toán 2.2.5.
Có bao nhiêu cách đổi n dollars thành các đồng 1 dollars và 2 dollars?

Lời giải: Gọi a_n là số cách đổi n dollars thành các đồng 1 dollars và b_n là số cách đổi n dollars thành các đồng 2 dollars. Khi đó, số cách đổi n dollars thành các đồng 1 dollars và 2 dollars là:

$$S_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

Hàm sinh của dãy (a_n) là $A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$
Hàm sinh của dãy (bn) là $B(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$.
Suy ra hàm sinh của dãy S_n là $S(x) = A(x).B(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2(1+x)}$.
Ta có

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(1 + 2x + 3x^2 + \cdots) + (1 + x^2 + x^4 + \cdots)\right] \\ &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^2 + 3x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)x^n. \end{aligned}$$

Vậy số cách đổi n dollars thành các đồng 1 dollars và 2 dollars là:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right).$$

□

Bài toán 2.2.6. *Có bao nhiêu số có 4 chữ số chia hết cho 3, biết các chữ số này được lấy từ tập* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lời giải: Số các số cần tìm bằng số các bộ $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4)$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{4} x_i$:3.
Ta kí hiệu tổng các phần tử của X là S(X).
Xét tập $M = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) | \, x_i \in A\}$.
$M_j = \{X \in M \backslash S(X) \equiv j(\mathrm{mod}3)\}$,j $= 0, 1, 2$.
Ta có $M_j \cap M_k = \varphi, \forall j \neq k; \bigcup_{j=0}^{2} M_j = M$.
suy ra $\sum_{j=0}^{2} |M_j| = M = 5^4$.
Ta cần tính M_0.
Xét phương trình $\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 = 0$ có hai nghiệm phức phân biệt. Gọi α là một nghiệm bất kì của phương trình trên, suy ra α^2 cũng là một nghiệm của phương trình $\alpha^3 = 1$, hơn nữa $\alpha^k = \alpha^j$ nếu $j \equiv k(\mathrm{mod}3)$.
Với tập $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ta xét mỗi tập gồm một phần tử $\{x_i\}$, xét dãy số các cách chọn của x_i trong tập.
Số 0 có 0 cách chọn, số 1 có 1 cách chọn, số 2 có 1 cách chọn số 3 có 1 cách chọn, số 4 có 1 cách chọn, số 5 có 1 cách chọn, từ số 6 trở lên có 0 cách chọn.
Vậy ta có dãy 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0,...
Hàm sinh của dãy là: $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.
Với bốn phần tử vai trò như nhau, suy ra hàm sinh của số cách chọn bộ bốn phần tử trong M là:

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 = \sum_{j=1}^{20} x^j.$$

Suy ra $f(\alpha) = \sum_{j=1}^{20} \alpha^j$.
Trong mỗi số hạng, số mũ của α chính là tổng của 4 số (không bắt buộc đôi một khác nhau) lấy từ A

Vì thế có thể viết

$$f(\alpha) = \sum_{X \in M} \alpha^{S(X)} = \sum_{j=0}^{2} |M_j|\, \alpha^j.$$

Mà ta có:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5)^4 = (\alpha + \alpha^2 + 1 + \alpha + \alpha^2)^4 \\ &= (2\alpha^2 + 2\alpha + 2 - 1)^4 = (-1)^4 = 1. \end{aligned}$$

vì α là nghiệm của phương trình $\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 = 0$
Do đó ta có

$$\sum_{j=0}^{2} |M_j|\, \alpha^j = 1 \Leftrightarrow |M_2|\, \alpha^2 + |M_1|\, \alpha + |M_0| - 1 = 0.$$

Do α là nghiệm bất kì của phương trình $\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1 = 0$ nên ta có $|M_2| = |M_1| = |M_0| - 1$.
Suy ra $|M_0| = \dfrac{5^4 + 2}{3}$.
Vậy có $\dfrac{5^4 + 2}{3}$ số có 4 chữ số chia hết cho 3, biết các chữ số này được lấy từ tập $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

□

Bài toán 2.2.7 (Mở rộng của Bài toán 2.2.6). *Tìm số tất cả có n chữ số lập từ các chữ số 3,4,5,6 và chia hết cho 3.*

Lời giải: Một số chia hết cho 3 nếu tổng các chữ số của nố chia hết cho 3. Mỗi chữ số có thể là 3,4,5,6.
Xét hàm sinh

$$G(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{6n} x^{6n}$$

Gọi số tất cả có n chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3 là S_n thì S_n chính là tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3.
Gọi $\varepsilon = e^{\dfrac{2\pi i}{3}}$ là căn bậc ba nguyên thủy của phương trình $\mathrm{x}^3 = 1$, ta có

$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Suy ra

$$G(1) + G(\varepsilon) + G(\varepsilon^2) = 3g_0 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)g_1 + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)g_2 + 3g_3 + \cdots$$
$$= 3(g_0 + g_3 + g_6 + \cdots) = 3S_n.$$

Vậy $S_n = \dfrac{1}{3}(G(1) + G(\varepsilon) + G(\varepsilon^2))$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+1+1+1)^n + (\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon + 1)^n + (\varepsilon + 1 + \varepsilon^2 + 1)^n\right]$$
$$= \frac{1}{3}(4^n + 2).$$

□

2.2.2. Dạng 2: Sử dụng hàm sinh để tính tổng các biểu thức tổ hợp và chứng minh các đẳng thức tổ hợp

Bài toán 2.2.8.

Cho n là số tự nhiên. Tính các tổng sau:

1) $\sum\limits_{k=m}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^m$ *với m là số tự nhiên và* $m \leq n$.

2) $\sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r \mathrm{C}_{2n-2r}^{n-1}$ *với r là số tự nhiên và* $r \leq n$.

Lời giải: 1) Đặt $a_n = \sum\limits_{k=m}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^m$.

Xét hàm

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{n} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^m x^n$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_k^m x^n = \sum_{k=m}^{\infty} \mathrm{C}_k^m x^k \sum_{n=k}^{\infty} \mathrm{C}_n^{n-k} x^{n-k}$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty} \mathrm{C}_k^m \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \sum_{k=m}^{\infty} \mathrm{C}_k^{k-m} \frac{x^{k-m}}{(1-x)^{k-m}}$$
$$= \frac{x^m}{(1-x)^{m+1}} \frac{1}{(1 - \dfrac{x}{1-x})^{m+1}} = \frac{x^m}{(1-2x)^{m+1}}$$

Vậy hệ số của x^n trong khai triển là $a_n = \mathrm{C}_n^m 2^{n-m}$.

2) Đặt $a_k = \sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r \ \mathrm{C}_{2n-2r}^k$.

Xét hàm sinh

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r \mathrm{C}_{2n-2r}^k x^k$$
$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{2n-2r}^k x^k$$
$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \mathrm{C}_n^r (1+x)^{2n-2r} = (x^2+2x)^n$$

Suy ra $F(x) = x^n(x+2)^n$.
Vậy $\mathrm{a_{n-1}} = 0$. □

Bài toán 2.2.9. *Cho m, n là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{2m-k}^{m+n} 2^k = 4^m - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_{2m+1}^{m+j}.$$

Lời giải: Ta có $2^{2m+1} = \sum\limits_{i=0}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^i = 2 \sum\limits_{i=m+1}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^i$.

Suy ra $4^m = \sum\limits_{i=m+1}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^i$.

Như vậy ta được $4^m - \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{C}_{2m+1}^{m+j} = \sum\limits_{j=m+n+1}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^j$.

Ta đặt $a_t = \sum\limits_{j=t+1}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^j$.

Xét hàm sinh $F(x) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} a_t x^t$.

Vậy $F(x) = \sum\limits_{t=0}^{\infty} \sum\limits_{j=t+1}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^j x^t$.

$$= \sum_{j=1}^{2m+1} \sum_{t=0}^{j-1} \mathrm{C}_{2m+1}^j x^t$$
$$= \sum_{j=1}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^j \frac{x^j - 1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{x-1} \Big(\sum_{j=0}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^j x^j - \sum_{j=0}^{2m+1} \mathrm{C}_{2m+1}^j \Big)$$
$$= \frac{1}{x-1} ((1+x)^{2m+1} - 2^{2m+1})$$
$$= (1+x)^{2m} + 2(1+x)^{2m-1} + \ldots + 2^{2m}.$$

Từ đó ta được hệ số của x^t trong khai triển của F là
$a_t = \sum_{j=0}^{2m} \mathrm{C}_j^t 2^{2m-j}$.
Suy ra đẳng thức cần chứng minh □

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chương 3
NGUYÊN TẮC CỰC HẠN

3.1. Cơ sở lí thuyết

3.1.1. Khái niệm điểm cực hạn

Một trong những lời khuyên đối với người làm toán là: "Hãy chú ý xét các trường hợp đặc biệt"

Khái niệm trường hợp đặc biệt có thể hiểu theo nhiều góc độ:

1) Đối với một đa giác, các điểm đặc biệt là những điểm thuộc cạnh (điểm biên), các đỉnh (điểm cực biên) hoặc các điểm mà tại đó có một đặc trưng nào đó của hình đạt giá trị đặc biệt($= 0; = \infty$; không xác định; đạt min; đạt max; ...), ví dụ điểm trọng tâm của hình.

2) Đối với một tập hợp sắp thứ tự,các điểm đặc biệt là những phần tử lớn nhất hoặc phần tử nhỏ nhất của tập hợp.

3) Trên trục số có ba điểm đặc biệt là $0; -\infty; +\infty$.

4) Đối với một bài toán có điều kiện, các trường hợp đặc biệt xảy ra khi các biến có mặt bằng nhau hoặc xảy ra dấu bằng trong các đánh giá của điều kiện.

5) Đối với một hàm số, các điểm đặc biệt là những điểm mà tại đó hàm số không xác định, hoặc bằng 0, hoặc đạt cực trị, ...

6) Đối với một đường cong, đó là các điểm gián đoạn, điểm cực trị, điểm uốn, điểm biên, ...

Các điểm, trường hợp đặc biệt nói trên được gọi chung là các điểm cực hạn. Tóm lại, điểm cực hạn là các điểm mà tại đó một đặc trưng nào đó của đối tượng đang xét đạt khủng hoảng, hay là có thay đổi về chất. Tùy theo trường hợp mà điểm cực hạn có các tên gọi khác nhau. Chẳng

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

hạn : "Điểm kì dị " trong lí thuyết hàm phức, "Điểm tới hạn" khi xét sự biến thiên của hàm số, "Điểm gián đoạn" khi xét tính liên tục của hàm số .... Các điểm cực hạn của một hệ thống có vai trò quan trọng trong việc khảo sát hệ thống đó.

3.1.2. Một số định lí

Ta chỉ xét một số trường hợp đặc biệt, riêng của điểm cực hạn. Muốn vậy, trước hết phải chỉ ra sự tồn tại của nó.

* Định lí 2.1. (Về sự tồn tại điểm cực hạn của tập hợp). Trong tập hợp gồm hữu hạn phần tử là các số, luôn tồn tại phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.

Định lí trên là trường hợp đặc biệt của định lí sau đây:

* Định lí 2.2. Xét tập A gồm hữu hạn phần tử. Mỗi phần tử $x \in A$ được đặt tương ứng với một trạng thái f (x) nào đó của nó. Khi đó, nếu mỗi trạng thái f (x) có một đặc trưng P(f(x)) và tập các đặc trưng: $\{P(f(x))|x \in A\}$ có thể sắp thứ tự thì tồn tại
$\min\limits_{x\in A} P(f(x))$ và $\max\limits_{x\in A} P(f(x))$.

Hệ quả 1: Nếu vai trò của các chỉ số trong tập gồm n số: $x_1; x_2; ...; x_n$ là như nhau thì luôn có thể giả sử: $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$.

Một trong những ứng dụng của điểm cực hạn là nguyên lí nổi tiếng của Pontriagin:

Nếu $\exists \min\limits_{x\in A} f(x); \max\limits_{x\in A} f(x)$ thì các giá trị min; max đó thường đạt tại những điểm cực hạn của A.

3.2. Mô tả nội dung phương pháp

Khi khảo sát một tính chất nào đó của các phần tử của tập A, ta có thể xét tính chất đó tại điểm cực hạn $x \in A$. Do x là điểm cực hạn nên ta có thêm những thông tin(điều kiện) phụ đối với x. Từ các kết quả của việc khảo sát tại những điểm cực hạn ta có thể dự đoán kết quả chung cho các phần tử thuộc A.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

3.3. Một số bài toán

Bài toán 3.4.1. *Có 3 trường học, mỗi trường có n học sinh. Mỗi học sinh quen với ít nhất n+1 học sinh từ hai trường khác. Chứng minh rằng người ta có thể chọn ra từ mỗi trường một bạn sao cho ba học sinh được chọn đôi một quen nhau.*

Lời giải: Rõ ràng ở đây cần quan tâm đến phần tử "cực hạn" là người có nhiều bạn nhất, vì chúng ta đang muốn tìm những người quen nhau đôi một.
Gọi A là học sinh có nhiều bạn nhất ở một trường khác. Gọi số bạn nhiều nhất này là k. Giả sử A ở trường thứ nhất và tập những bạn quen A là $\mathrm{M} = \{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{k}\}$
ở trường thứ 2.
Theo giả thiết, có ít nhất một học sinh C ở trường thứ 3 quen với A. Vì C quen không quá k học sinh ở thường thứ nhất nên theo giả thiết C quen với ít nhất n+1-k học sinh của trường thứ hai, đặt $\mathrm{N} = \{\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \ldots, \mathrm{D}_\mathrm{m}\}$ là những người quen C ở trường thứ hai thì $m \geq n + 1 - k$ Vì M, N đều thuộc tập hợp gồm n học sinh và $|M| + |N| \geq k + n + 1 - k = n + 1$ nên ta có $M \bigcap N \neq \phi$ .Chọn B nào đó thuộc $M \bigcap N$ thì ta có A, B, C đôi một quen nhau. □

Bài toán 3.4.2. *Trên bảng có 2010 câu khẳng định:*
Câu 1. Trên bảng có ít nhất một câu khẳng định sai.
Câu 2. Trên bảng có ít nhất hai câu khẳng định sai
. . . . . .
Câu 2010. Trên bảng có ít nhất 2010 câu khẳng định sai.
Hỏi những câu nào đúng?

Lời giải: Gọi A là tập hợp các chỉ số k sao cho câu khẳng định thứ k là câu đúng. Vì câu thứ 2010 không thể là câu đúng nên câu 1 là câu đúng, do đó $A \neq \phi$ Vì A có hữu hạn phần tử nên tồn tại một phần tử k lớn nhất. Do $k \in A$ nên $1, 2, 3, ..., k - 1 \in A$. Do k là phần tử lớn nhất của A nên $k + 1, ...2010 \in A$. Suy ra $|A| = k$.
Goi B là tập hợp các chỉ số k sao cho câu khẳng định thứ k là câu sai.

Do câu khẳng định thứ k là câu đúng nên $|B| \geq k$. Do câu khẳng định thứ k+1 sai nên $|B| \leq k$. Suy ra $|B| = k$
Mặt khác $|A| + |B| = 2010$ nên k=1005
Vậy các câu khẳng định đúng là 1, 2, ...,1005. □

Bài toán 3.4.3. *Trên một bàn cờ quốc tế kích thước $n \times n$, ta đặt các quân xe thỏa mãn điều kiện sau: Nếu có một ô nào đó không có quân xe thì tổng số các quân xe đứng cùng hàng và cùng cột với ô đó không nhỏ hơn n. Chứng minh rằng trên bàn cờ có không ít hơn $\frac{n^2}{2}$ quân xe.*

Lời giải: Tồn tại một đường (hàng hoặc cột, giả sử là hàng) có số quân xe nhỏ nhất (giả sử là k quân xe).
Nếu $k \geq \frac{n}{2}$ thì tổng số các quân xe S thỏa mãn $S \geq n.\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$.
Nếu $k \prec \frac{n}{2}$ thì trên đường đang xét còn có n- k ô trống. Trong mỗi cột của n-k cột đi qua những ô trống đó có $\geq n - k$ quân xe và tổng số các quân xe như vậy là $\geq (n-k)^2$. Trong k cột còn lại có $\geq k^2$ quân xe.
Mặt khác, dễ thấy:
$\left[(n-k)^2 + k^2\right] - \frac{n^2}{2} = 2(\frac{n}{2} - k)^2 \geq 0.$ □

Bài toán 3.4.4(HSG QG -1992-1993 bảng A). *Có 80 sân bay mà khoảng cách giữa các cặp sân bay bất kì đều khác nhau và không có ba sân bay nào thẳng hàng. Cùng một thời điểm từ mỗi sân bay có một chiếc máy bay cất cánh và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kì sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.*

Lời giải: Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì MN là cạnh lớn nhất trong tam giác OMN. Vì vậy $\angle MON$ là góc lớn nhất trong tam giác OMN và do đó $\angle MON > 60^0$. Giả sử O là sân bay có số máy bay bay đến là nhiều nhất(=n) và các máy bay đó bay đến từ các sân bay $M_1, M_2, ..., M_n$ (Tên của các sân bay được đặt sao cho các tia $[OM_i)$ và $[OM_{i+1})$ là kề nhau và được xếp theo chiều ngược chiều kim đồng hồ $M_{n+1} := M_1$). Do không có ba sân bay nào thẳng hàng nên ta sẽ được n góc $\angle M_iOM_{i+1}$ có tổng bằng 360^0 Góc

nhỏ nhất trong số các góc đó phải $\leq \dfrac{360^0}{n}$ .Nhưng theo trên góc đó phải $> 60^0$. Từ đó ta có: $\dfrac{360^0}{n} \succ 60^0 \Rightarrow n < 6 \Rightarrow n \leq 5$. □

Bài toán 3.4.5. *Một quốc gia có 2005 thành phố.Giữa hai thành phố bất kì đều có đường nối với nhau.Độ dài của các con đường đó đôi một khác nhau.Từ một thành phố A nào đó ta đi đến thành phố B khác theo con đường ngắn nhất.Từ B lại đi đến thành phố C theo con đường ngắn nhất khác với con đường vừa đi.Cứ như vậy cho đến khi không thể đi tiếp theo qua tắc đó nữa. Hỏi trên dường đi có thành phố nào được đi qua hai lần hay không?.*

Lời giải: Biểu diễn các thành phố bởi điểm $A_j, (j \in \overline{1, ..., 2005})$ trên mặt phẳng. Giả sử ta xuất phát từ điểm A_1 và đi đến điểm A_2. Khi đó A_1A_2 là đoạn ngắn nhất trong các đoạn A_1A_j và A_1 là duy nhất. Xét các đoạn A_2A_j và tìm đoạn ngắn nhất trong số các đoạn đó.Có thể xảy ra hai khả năng:
Khả năng 1: $\underset{j\in 1,...,2005, j\neq 2}{\underline{Min}} A_2A_j = A_2A_1$. Khi đó đường đi kết thúc tại A_2 và không có thành phố nào được đi qua hai lần.
Khả năng 2 : $\underset{j\in 1,...,2005, j\neq 2}{\underline{Min}} A_2A_j = A_2A_3$. Khi đó A_3 là duy nhất và $A_2A_3 < A_2A_1$ .Ta đi tiếp đến điểm A_3. Đối với điểm A_3 ta cũng làm như vậy. Giả sử đường đi kết thúc tại điểm A_n thì theo lập luận trên, mỗi điểmA_k ,$k \in \overline{1, ..., n}$) được chọn một cách duy nhất và $A_1A_2 > A_2A_3 > ... > A_iA_{i+1} > ... > A_{n-1}A_n$
Giả sử trên đường đi ta đi qua điểm Ai hai lần, thế thì đường đi trên chứa một đường gấp khúc khép kín:

$$A_iA_{i+1}A_{i+2} \dots A_mA$$

Theo nhận xét trên ta có

$$A_iA_{i+1} > A_{i+1}A_{i+2} > ... > A_{m-1}A_m > A_mA_i \Rightarrow A_iA_{i+1} > A_iA_m$$

Điều này là vô lí (Trái với cách chọn điểm $A_i + 1$ là điểm duy nhất có khoảng cách ngắn nhất tới A_i). Vậy trên đường đi không có thành phố nào được đi qua hai lần. □

Bài toán 3.4.6. *Có 2009 vận động viên thi đấu bóng bàn theo thể thức đấu vòng tròn, mỗi cầu thủ đấu với tất cả các cầu thủ còn lại. Kết quả các trận đấu chỉ có thắng hoặc thua, không có hòa. Chứng minh rằng có thể xếp 2009 vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau.*

Lời giải: Xét tất cả các cách xếp một số vận động viên theo hàng dọc sao cho người đứng trước thắng người đứng kề sau. Vì số cách xếp như vậy là hữu hạn nên tồn tại một cách xếp T có nhiều vận động viên nhất. Ta chứng minh cách xếp T thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Thật vậy, giả sử T không chứa tất cả các vận động viên và A là người không nằm trong cách xếp T. Giả sử trong cách xếp T có n người

$$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n},$$

sao cho A_i thắng $A_i + 1$. Nếu A thắng A_1 thì cách xếp $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$, có nhiều vận động viên hơn cách xếp T. Do đó A thua A_1. Lập luận tương tự như vậy ta dẫn đến A thua tất cả các vận động viên $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$. Nhưng khi đó cách xếp $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}, \mathrm{A}$ có nhiều vận động viên hơn cách xếp T, vô lí. Vậy cách xếp T phải chứa tất cả các vận động viên và ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 3.4.7. *Cho một số hữu hạn điểm, trong đó có một số hữu hạn điểm màu đen, còn lại là điểm màu trắng. Biết rằng :*
i) Mỗi điểm đen đều được nối với ít nhất một điểm trắng.
ii) Không có điểm trắng nào được nối với tất cả các điểm đen.
Chứng minh rằng tồn tại một nhóm 4 điểm gồm 2 điểm đen và hai điểm trắng mà mỗi điểm được nối với đúngmột điểm khác màu của nhóm.

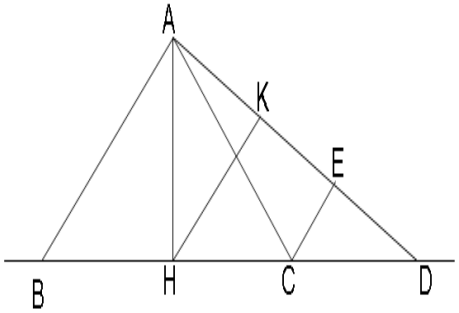
Lời giải: Gọi A là điểm trắng được nối với nhiều điểm đen nhất. Do điều kiện ii) nên tồn tại điểm đen không được nối với A, gọi đó là điểm B. Do điều kiện i) mà B phải được nối với một điểm trắng khác A, gọi đó là điểm C. Trong tất cả các điểm đen được nối với A tồn tại một điểm không được nối với C, gọi đó là điểm D (vì nếu không tồn tại thì điểm trắng C được nối với nhiều điểm đen hơn A, trái với cách chọn điểm A). Như vậy nhóm 4 điểm A, B, C, D là nhóm cần tìm. □

Bài toán 3.4.8. *Cho tập hợp X gồm hữu hạn các điểm trên mặt phẳng.Mỗi cặp điểm bất kì được nối với nhau bởi một đoạn thẳng và tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Biết rằng nếu hai điểmA và B thuộc tập hợp X là đầu mút của cùng một số đoạn thẳng xanh thì không tòn tại điểm C thuộc tập hợp X sao cho AC và BC cùng tô xanh.Chứng minh rằng tồn tại một điểm mà nó chỉ là đầu mút của đúng một đoạn thẳng xanh.*

Lời giải: Vì số điểm thuộc X là hữu hạn nên có thể tìm được một điểm A là đầu mút của nhiều đoạn thẳng tô màu xanh nhất.
Giả sử $AB_1, AB_2, \ldots, AB_k$ tô màu xanh và
B_i là đầu mút của n_i đoạn thẳng xanh.
Từ điều kiện bài toán ta suy ra $n_1, n_2, \ldots, n_k$ đôi một khác nhau.
Mặt khác các số $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nhận các giá trị nguyên trong khoảng từ 1 đến k nên chắc chắn tồn tại $n_i = 1$. Ta có điều cần phải chứng minh. □

Bài toán 3.4.9 (Bài toán Sylvester). *Trong mặt phẳng cho n điểm. Biết rằng, mỗi đường thẳng đi qua hai điểm bất kì đều đi qua một điểm thứ ba khác. Chứng minh rằng n điểm đã cho thẳng hàng.*

Lời giải: Giả sử n điểm đã cho không thẳng hàng. Gọi S là tập hợp gồm n điểm đã cho và $T = \{(A, B, C) : A, B, C \in S$ và $d(A, BC) > 0\}$
Vì n điểm đã cho không thẳng hàng nên $T \neq \phi$. Vì T có hữu hạn phần tử nên theo nguyên tắc cực hạn, tồn tại phần tử $(A, B, C) \in T$ sao cho d(A,BC) nhỏ nhất



Hình 3.1

Theo giả thiết, đường thẳng BC còn đi qua điểm thứ ba $D \in S$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử C nằm giữa B và D.
Kẻ $AH \perp BC, HK \perp AD, CE \perp AD$.Ta có CE $<$ HK $<$ AH.
Suy ra phần tử $(C, A, D) \in T$ có d (C, AD) $<$ d (A, BC), vô lí.Vậy n điểm đã cho thẳng hàng. □

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chương 4
SỬ DỤNG ÁNH XẠ TRONG CÁC BÀI TOÁN TỔ HỢP

4.1. Kiến thức cơ bản

4.1.1. Ánh xạ

*** Định nghĩa**. Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một (và chỉ một) phần tử của Y. Phần tử này được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và được kí hiệu là f(x).

(i) Tập X được gọi là tập xác định của f. Tập hợp Y được gọi là tập giá trị của f.

(ii) Ánh xạ f từ X đến Y được kí hiệu là $f : X \to Y$

$$x \mapsto y = f(x)$$

(iii) Khi X và Y là các tập số thực, ánh xạ f được gọi là một hàm số xác định trên X.

(iv) Cho $a \in X, y \in Y$. Nếu $f(a) = y$ thì ta nói y là ảnh của a và a là nghịch ảnh của y qua ánh xạ f.

(vi) Tập hợp $Y = \{y \in Y | \exists x \in X, y = f(x)\}$ gọi là tập ảnh của f. Nói cách khác, tập ảnh $f(X)$ là tập hợp tất cả các phẩn tử của Y mà có nghịch ảnh.

4.1.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

*** Định nghĩa.** Ánh xạ: $f : X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu với $a \in X, b \in X$ mà $a \neq b$ thì $f(a) \neq f(b)$, tức là hai phần tử phân biệt sẽ có hai ảnh phân biệt.
Từ định nghĩa ta suy ra ánh xạ f là đơn ánh khi và chỉ khi với $a \in X, b \in X$ mà $f(a) = f(b)$, ta phải có $a = b$.

*** Định nghĩa.**Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu với mỗi phần tử $y \in Y$ đều tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy f là toàn ánh nếu và chỉ nếu $y = f(X)$.
*** Định nghĩa.** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Như vậy ánh xạ $f : X \to Y$ là song ánh nếu và chỉ nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại và duy nhất một phần tử $x \in X$ để $y = f(x)$.

4.1.3. Ánh xạ ngược của một ánh xạ

*** Định nghĩa.** Ánh xạ ngược của f, được kí hiệu bởi f^{-1}, là ánh xạ từ Y đến X gán cho mỗi phần tử $y \in Y$ phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Như vậy $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.
*** Chú ý**. Nếu f không phải là song ánh thì ta không thể định nghĩa được ánh xạ ngược của f. Do đó chỉ nói đến ánh xạ ngược khi f là song ánh.

4.1.4. Ánh xạ hợp

*** Định nghĩa**. Nếu $g : A \to B$ và $f : B \to C$ và $g(A) \subset B$ thì ánh xạ hợp $f \circ g : A \to C$ được xác định bởi $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.
Kí hiệu $p^n = \underbrace{p \circ p \circ ... \circ p}_{n}$.

4.2. Phương pháp ánh xạ

4.2.1. Nguyên lý ánh xạ

Cho A và B là các tập hữu hạn khác rỗng và $f : A \to B$ là một ánh xạ. Khi đó,

a) Nếu f là đơn ánh thì $|A| \leq |B|$.

b) Nếu f là toàn ánh thì $|A| \geq |B|$.

c) Nếu f là song ánh thì $|A| = |B|$.

Phương pháp ánh xạ dựa vào ý tưởng rất đơn giản:
* Nếu tồn tại một song ánh từ tập hữu hạn A vào tập hữu hạn B thì

|A| = |B|. Do đó, muốn chứng minh hai tập hợp có cùng số phần tử, chỉ cần xây dựng một song ánh giữa chúng. Hơn nữa, ta có thể đếm được số phần tử của một tập hợp A bằng cách xây dựng song ánh từ A vào một tập hợp B mà ta đã biết cách đếm hoặc dễ đếm hơn.
* Nếu tồn tại một đơn ánh (tương ứng toàn ánh) từ A vào B thì $|A| \leq |B|$ (tương ứng $|A| \geq |B|$). Do đó, đơn ánh và toàn ánh chủ yếu được sử dụng để chứng minh các bài toán liên quan đến bất đẳng thức tổ hợp. Chuyển bài toán cần chứng minh về việc so sánh số phần tử của hai tập hợp, trong đó có một tập hợp đã biết cách đếm hoặc dễ đếm.
Tương tự nguyên lý Dirichle, về mặt ý tưởng thì hết sức đơn giản tuy nhiên thực thế thì không phải đơn giản như thế. Để sử dụng phương pháp này ta cần xác định được một song ánh giữa tập cần đếm vào một tập đã biết cách đếm việc làm này không phải lúc nào cũng thực hiện dễ dàng. Sau đây là một số bài tập áp dụng phương pháp trên.

4.2.2. Định lý (Bài toán chia kẹo của Euler)

Cho k, n là các số nguyên dương. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ là C_{n+k-1}^{k-1}.

Chứng minh: Ta cho tương ứng mỗi nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$ (1) với một xâu nhị phân độ dài n+k-1 trong đó có n bit 1 và k-1 bit 0, cụ thể xâu gồm x_1 bit 1, sau đó là 1 bit 0, tiếp theo là x_2 bit 1, sau đó là 1 bit 0, cứ như thế, cuối cùng là x_k bit 1. Dễ dàng chứng minh được đây là một song ánh từ tập A các nghiệm nguyên không âm của (1) vào tập hợp B các xâu nhị phân độ dài n+k-1 với n bit 1 và k-1 bit 0. Từ đó, theo nguyên lý song ánh ta có $|A| = |B| = \mathrm{C}_{n+k-1}^{k-1}$. □

4.3. Một số bài toán

4.3.1. Dạng 1: Sử dụng song ánh vào các bài toán đếm nâng cao

Bài toán 4.3.1. *Xác định số cách chọn bộ 5 số từ tập 18 số nguyên dương đầu tiên sao cho bất kỳ một cặp 2 số trong 5 số được chọn có hiệu số giữa số lớn và số bé lớn hơn hoặc bằng 2.*

Lời giải: Kí hiệu A là tập hợp các bộ 5 số $(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Kí hiệu B là tập hợp các bộ 5 số phân biệt của 14 số nguyên dương đầu tiên.
Ta xây dựng ánh xạ $\phi : A \to B$ theo quy tắc sau:
$\phi(a_1; a_2; a_3; a_4; a_5) = (a_1; a_2 - 1; a_3 - 2; a_4 - 3; a_5 - 4)$
trong đó $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.
Vì

$$a_2 - a_1 \geq 2 \Rightarrow a_2 - 1 \geq a_1 + 1 > a_1$$
$$a_3 - a_2 \geq 2 \Rightarrow a_3 - 2 \geq a_2 > a_2 - 1$$
$$a_4 - a_3 \geq 2 \Rightarrow a_4 - 3 \geq a_3 - 1 > a_3 - 2$$
$$a_5 - a_4 \geq 2 \Rightarrow a_5 - 4 \geq a_4 - 2 > a_4 - 3$$

$$a_1 \geq 1, a_5 - 4 \leq 18 - 4 = 14$$
$$\Rightarrow (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, a_4 - 3, a_5 - 4)$$

Như vậy với mỗi phần tử của A được ứng với duy nhất một phần tử của B qua ánh xạ ϕ Tương tự với $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in B$ luôn tồn tại duy nhất

$$(b_1, b_2 + 1, b_3 + 2, b_4 + 3, b_5 + 4) = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$

Suy ra ϕ là phép tương ứng 1 - 1 giữa A và B. Vậy số phần tử của A bằng số phần tử của B bằng C_{14}^5 Đáp số d = C_{14}^5. □

Bài toán 4.3.2 . *Có n người xếp hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra k người sao cho không có hai người liên tiếp được chọn.*

Lời giải: Ta đánh số n người bằng các số thứ tự 1, 2, ..., n. Một cách chọn thích hợp là một bộ số $1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n$ thỏa mãn điều kiện $a_{i+1} - a_i > 1$ (tức là ≥ 2). Vậy ta cần tìm số phần tử của
$A = \{(a_1, a_2, ..., a_k) | 1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n, a_{i+1} - a_i \geq 2\}$
với i = 1, 2, ..., k-1.
Xét ánh xạ
$f(a_1, a_2, ..., a_k) = (b_1, b_2, ..., b_k)$ với $b_i = a_i - i + 1$ thì rõ ràng ta có

1) $b_1 = a_1 \geq 1$.

2) $b_{i+1} - b_i = (a_{i+1} - (i+1) + 1) - (a_i - i + 1) = a_{i+1} - a_i - 1 > 0$.

3) $b_k = a_k - k + 1 \leq n - k + 1$.

Suy ra $(b_1, b_2, ..., b_k)$ là phần tử của tập hợp B:
$B = \{(b_1, b_2, ..., b_k) | 1 \leq b_1 < b_2 < ... < b_k \leq n - k + 1\}$.
Dễ thấy f là một đơn ánh.
Ngoài ra ánh xạ $g(b_1, b_2, ..., b_k) = (a_1, a_2, ..., a_k)$ với $a_i = b_i + i - 1$ cho chúng ta một đơn ánh từ B vào A. Vậy $|A| = |B| = C^k_{n-k+1}$. □

Bài toán 4.3.3. *Có n người xếp thành một vòng tròn. Có bao nhiêu cách chọn ra k người, sao cho không có hai người kề nhau được chọn?*

Lời giải: Bài toán này có thể giải bằng kết quả của bài toán trên và phương pháp « cắt đường tròn ».

Giả sử n người đó được đánh số 1, 2, ..., n. Ta xét các trường hợp sau :
1) Người số 1 được chọn. Khi đó người số 2 và số n không được chọn. Như vậy ta phải chọn thêm k-1 người từ 3 đến n-1 sao cho không có hai người kề nhau được chọn. Vì n-1 không kề 3 nên có thể coi đây là n-3 người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng $C^{k-1}_{n-3-(k-1)+1} = C^{k-1}_{n-k-1}$.
2) Người số 1 không được chọn. Khi đó ta cần chọn k người từ số 2 đến n sao cho không có 2 người kề nhau được chọn. Vì 2 và n không kề nhau nên có thể coi đây là n-1 người xếp theo một hàng dọc. Theo kết quả của bài toán trên, số cách chọn bằng C^k_{n-k}

Vậy đáp số của bài toán là
$C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^{k}$

$$= \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} = \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(k+n-k) \ = \frac{n}{k}C_{n-k-1}^{k-1}.$$

□

Bài toán 4.3.4. *Có một nhóm người mà trong đó, mỗi cặp không quen nhau có đúng hai người quen chung, mỗi cặp quen nhau thì không có người quen chung. Chứng minh rằng số người quen của mỗi người là như nhau.*

Lời giải: Giả sử a,b là hai người tuỳ ý.
* Nếu a quen b thì a, b không có người quen chung. Gọi A, B là tập các người quen của a, b tương ứng. Ta chỉ ra một tương ứng 1-1 giữa A, B như sau: Với mỗi người tuỳ ý $a' \in A$ thì ' a không quen b nên ' a và b có đúng hai người quen chung. Một trong hai người đó là a người còn lại là c, một người quen của b (hay $c \in B$).
* Nếu a không quen b thì họ có người quen chung là c.
Khi đó $|A| = |B| = |C|$. □

Bài toán 4.3.5. *Cho tập $A = \{1, 2, ..., 2n\}$. Một tập con B của A gọi là một tập cân nếu trong tập đó số các số chẵn và số các số lẻ bằng nhau. (Tập rỗng là một tập cân vì số các số chẵn và số các số lẻ trong tập rỗng đều bằng 0). Hỏi A có chứa bao nhiêu tập cân? Chẳng hạn với n = 2,* $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *A có 6 tập con cân là các tập:* $\phi, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$.

Lời giải: Kí hiệu $X = \{2, 4, ..., 2n\}$ là tập hợp tất cả các số chẵn của A và $Y = \{1, 3, ..., 2n-1\}$ là tập hợp tất cả các số lẻ của A. Gọi C là họ tất cả các tập cân của A và D là họ các các tập con của A có đúng n phần tử.

Ta lập một ánh xạ f từ C vào D như sau: Giả sử B là một tập cân. Kí hiệu B_1, B_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của B. Khi đó đặt $f(B) = B_1 \cap (Y \backslash B_2)$.
Do B là tập cân nên $|B_1| = |B_2|$. Thành thử

$|f(B)| = |B_1| + |Y \backslash B_2| = |B_1| + |Y| - |B_2| = |Y| = n.$
Vậy $f(B) \in D$.

Tiếp theo ta chứng minh f là một song ánh.
+ f là đơn ánh: Giả sử $f(B) = f(C)$, suy ra $B_1 \cap (Y \backslash B_2) = C_1 \cap (Y \backslash C_2)$. Vì B_1, C_1 là tập các số chẵn; $(Y \backslash B_2), (Y \backslash C_2)$ là tập các số lẻ nên từ đó suy ra $B_1 = C_1; Y \backslash B_2 = Y \backslash C_2$. Do đó $B_1 = C_1; B_2 = C_2$ hay B = C.
+ f là một toàn ánh: Giả sử $M \in D$ là một tập con của A có n phần tử. Kí hiệu M_1, M_2 tương ứng là tập các số chẵn và tập các số lẻ của M. Đặt $B_1 = M_1; B_2 = Y \backslash M_2$ và $B = B_1 \cup B_2$.
Ta có

$$|B_1| = |M_1|\,; |B_2| = |Y| - |M_2| = n - |M| - |M_2| = |M_1|$$

Vậy nên $|B_1| = |B_2|$, tức B là một tập cân.
Rõ ràng $f(B) = B_1 \cap (Y \backslash B_2) = M_1 \cup M_2 = M$.
Vì có một song ánh giữa họ các tập cân và họ các tập con có n phần tử của A nên số các tập cân của A bằng số các tập con có n phần tử của A. Vậy A có tất cả là C_{2n}^n tập cân. □

Bài toán 4.3.6. *Một cửa hàng có bán ba loại kem: kem xoài, kem sôcôla và kem sữa. Một nhóm có 6 người vào ăn kem và gọi 6 cốc kem. Hỏi*
a) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn? b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn, trong đó cả ba loại kem đều có mặt?

Lời giải: a) Mỗi sự lựa chọn: " a kem xoài, b kem sôcôla và c kem sữa " được kí hiệu bởi bộ ba (a, b, c), trong đó a, b, c là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện a+b+c=6.

Chẳng hạn bốn sự lựa chọn
+ 2 kem xoài, 1 kem sôcôla, 3 kem sữa;
+ 1 kem xoài, 4 kem sôcôla, 1 kem sữa;
+ 2 kem sôcôla, 4 kem sữa;
+ 3 kem xoài, 3 kem sữa.
được kí hiệu là các bộ (2,1,3); (1,4,1); (0,2,4); (3,0,3).

Với mỗi bộ (a,b,c) như vậy, ta đặt tương ứng với một dãy nhị phân (dãy gồm các chữ số 0 và 1) theo quy tắc sau: viết từ trái sang phải a

số 1 liên tiếp,số 0, b số 1 liên tiếp, số 0, rồi c số 1 liên tiếp.

$$\underbrace{11....1}_{a}0\underbrace{11...1}_{b}0\underbrace{11...1}_{c}$$

Như vậy, mỗi bộ ba (a,b,c) được tương ứng với một dãy nhị phân độ dài 8 (tức là gồm 8 kí tự), trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.
Chẳng hạn,

$$(2,1,3) \to 11010111$$
$$(1,4,1) \to 10111101$$
$$(0,2,4) \to 01101111$$
$$(3,0,3) \to 11100111$$

Rõ ràng, phép tương ứng đó là một đơn. Ngược lại, với mỗi dãy 8 kí tự với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 khi ta đếm từ trái sang phải mà có a số 1 liên tiếp, số 0, b số 1 liên tiếp, số 0 và c số 1 liên tiếp thì dãy đó sẽ ứng với bộ (a,b,c) thỏa mãn a+b+c = 6.
Chẳng hạn, dãy 10110111 sẽ ứng với bộ (1,2,3), tức là ứng với sự lựa chọn: 1 kem xoài, 2 kem sôcôla và 3 kem sữa. Dãy 01011111 ứng với bộ (0,1,5), tức là ứng với sự lựa chọn 1 kem sôcôla và 5 kem sữa.
Như vậy, ta đã thiết lập một song ánh giữa tập hợp các sự lựa chọn với tập hợp các dãy nhị phân độ dài 8, trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.
Do đó, số các sự lựa chọn bằng số các dãy nhị phân độ dài 8, trong đó có 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.
Mặt khác một dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0 tương ứng với cách chọn 2 vị trí trong 8 vị trí để ghi số 0 (6 vị trí còn lại ghi số 1).
Thành thử có $C_8^2 = 28$ dãy nhị phân độ dài 8 với 6 kí tự 1 và 2 kí tự 0.
Do đó, số các sự lựa chọn là 28.
b) Mỗi sự lựa chọn: "a kem xoài, b kem sôcôla và c kem sữa" được kí hiệu bởi một bộ ba (a,b,c), trong đó a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện a+b+c = 6.
Với mỗi bộ (a,b,c) thỏa mãn điều kiện trên ta cho tương ứng với bộ (x,y,z) với x = a-1; y = b-1; z = c-1. Khi đó (x,y,z) là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện x+y+z = a+b+c - 3 = 3. Để kiểm tra rằng đây là một phép song ánh giữa tập các bộ ba (a,b,c), trong đó a,

b, c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện a+b+c = 6 ứng với tập các bộ ba (x,y,z) là các số nguyên không âm thỏa mãn điều kiện x+y+z = a+b+c - 3 = 3. Bằng suy luận tương tự câu a), ta tìm được số các sự lựa chọn là $C_5^2 = 10$.

Nhận xét. *Ta có bài toán tổng quát sau:*
Một cửa hàng có bán m loại kem. Một nhóm có n người vào ăn kem và gọi n cốc kem . Hỏi
a) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?
b) Họ có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn, trong đó cả m loại kem đều có mặt?
Đáp số a) C_{n+m-1}^{m-1}, b) C_{n-1}^{m-1}. □

Bài toán 4.3.7(Vô địch Trung Quốc - 1997).*Trong các xâu nhị phân có độ dài n, gọi a_n là số các xâu không chứa 3 số liên tiếp 0, 1, 0 và b_n là số các xâu không chứa 4 số liên tiếp 0,0,1,1 hoặc 1,1,0,0. Chứng minh rằng $b_{n+1} = 2a_n$.*

Lời giải: Ta gọi một xâu thuộc loại A nếu nó không chứa 3 số liên tiếp 0, 1, 0 và gọi một xâu thuộc loại B nếu nó không chứa 4 số hạng liên tiếp 0, 0, 1, 1 hoặc 1, 1, 0,0.
Với mỗi xâu $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ta xây dựng $f(X) = (y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ như sau: $y_1 = 0, y_k \equiv x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} (\text{mod} 2)$. Rõ ràng X chứa 3 số liên tiếp 0, 1, 0 khi và chỉ khi f(X) chứa 4 số hạng liên tiếp 0, 0, 1, 1 hoặc 1, 1, 0, 0 tức là X thuộc loại A khi và chỉ khi f(X) thuộc B.
Vậy f là một song ánh đi từ tập các xâu loại A độ dài n đến tập các xâu loại B độ dài n+1 mà bắt đầu bằng 0. Nhưng từ mỗi xâu X thuộc B ta nhận được một xâu X cũng thuộc B bằng cách đổi các phần tử của X theo quy tắc $1 \to 0, 0 \to 1$ nên số các xâu loại B độ dài n+1 gấp đôi số các xâu loại B độ dài n+1 mà bắt đầu bằng số 0. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 4.3.8(Vô địch Ucraina - 1996).*Gọi M là số các số nguyên dương viết trong hệ thập phân có 2n chữ số, trong đó có n chữ số 1 và n chữ số 2. Gọi N là số tất cả các số viết trong hệ thập phân có*

n chữ số, trong đó chỉ có các chữ số 1, 2, 3, 4 và số chữ số 1 bằng số chữ số 2. Chứng minh rằng $M = N = C_{2n}^{n}$.

Lời giải: Hiển nhiên M =C_{2n}^{n} . Ta chỉ cần chứng minh M = N.
Với mỗi số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 và số chữ số 1 bằng số chữ số 2, ta "nhân đôi" thành số có 2n chữ số theo quy tắc sau: đầu tiên, hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có hai chữ số, sau đó các chữ số 3 ở n chữ số đầu và các chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1, các chữ số 3 ở n chữ số sau và các chữ số 4 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 2. ví dụ

$$1234142 \to 12341421234142 \to 12121221221112$$

Như thế, ta thu được một số có đúng n chữ số 1 và n chữ số 2. Rõ ràng đây là một đơn ánh từ tập các số n chữ số sang tập các số 2n chữ số. Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau: với mỗi số có n chữ số 1 và n chữ số 2, ta cắt n chữ số đầu và n chữ số cuối rồi cộng chúng theo cột với quy tắc: 1+1=1, 2+2=2, 1+2=3, 2+1=4, và ta thu được một số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 với số chữ số 1 bằng số các số 2.
Ví dụ

$$12121221221112 \to \left|\begin{array}{l} 1212122 \\ 1221112 \\ 1234142 \end{array}\right. \to 1234142$$

Như thế song ánh giữa hai tập hợp đã được thiết lập và ta có M=N. □

Bài toán 4.3.9(VMO 2012).*Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là* G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 *và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn*:
1/ Mỗi ghế có đúng một người ngồi;
2/ Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là G_1,G_2,G_3,G_4,G_5.;
3/ *Giữa* G_1 *và* G_2 *có ít nhất 3 chàng trai*;
4/ Giữa G_4 *và* G_5 *có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai.*
Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? (Hai cách xếp được coi là khác

nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Lời giải: Bài toán này đã được giải trong phần trước bằng cách dùng hàm sinh. Ở đây ta sẽ dùng phương pháp sử dụng ánh xạ để giải bài toán đó.

Đánh số thứ tự các ghế từ trái sang phải là 1,2,... ,17. Gọi g_1,g_2,g_3,g_4,g_5 là vị trí chỗ ngồi của các cô gái G_1,G_2,G_3,G_4,G_5 tương ứng. Khi đó ta có $1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17$.
Ngoài ra ta còn có $3 < g_2 - g_1$ và $1 < g_5 - g_4 < 6$.
Đặt $A = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) | 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 1 < g_5 - g_4 < 6\}$. ta cần tìm $|A|$.
Đặt
$B = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) | 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 1 < g_5 - g_4\}$
$C = \{(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) | 1 \leq g_1 < g_2 < g_3 < g_4 < g_5 \leq 17, 3 < g_2 - g_1, 6 \leq g_5 - g_4\}$.
thì rõ ràng ta có $A = B \backslash C$ với $C \subset B$, suy ra $|A| = |B| = |C|$.
Để tính |B| ta đặt $D = \{(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) | 1 \leq h_1 < h_2 < h_3 < h_4 < h_5 \leq 13\}$ và xét ánh xạ
$f : B \to D, f(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mapsto (g_2, g_2 - 3, g_3 - 3, g_4 - 3, g_5 - 4)$ thì dễ dàng kiểm chứng được f là một song ánh. Nhưng |D| bằng số cách chọn 5 phần tử ra từ 13 phần tử nên ta có $|D| = C_{13}^5$. Vậy $|B| = |D| = C_{13}^5$.
Một cách hoàn toàn tương tự, ta tính được $|C| = C_9^5$. Vậy số cách xếp chỗ cho 15 cô gái bằng $C_{13}^5 - C_9^5 = 1161$. Vì còn có 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí ở 12 chiếc ghế dành cho họ nên số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là 12! 1161. □

4.3.2. Dạng 2: Sử dụng song ánh vào các bài toán chứng minh và tính biểu thức tổ hợp

Ý tưởng áp dụng bài toán đếm để tính biểu thức tổ hợp là biểu diễn biểu thức tổ hợp bằng số cách xây dựng một cấu hình tổ hợp thích hợp mà số cấu hình tổ hợp này dễ dàng tính được thông qua các công thức tổ hợp cơ bản.

Bài toán 4.3.10(Vô địch Trung Quốc - 1994).*Chứng minh* $\sum_{k=0}^{n} 2^k \mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_{n-k}^{[(n-k)/2]} = \mathrm{C}_{2n+1}^n, \forall n \in Z^+$.

Lời giải: C_{2n+1}^n là số cách chọn k số từ 2n+1 số khác nhau. Ta chọn n số từ 2n+1 số theo cách sau. Trước hết, từ 2n+1 số, ta chia ra n cặp và số x.

Bước 1: Chọn ra k cặp rỗi từ mỗi cặp chọn ra một số.

Bước 2: Chọn $\dfrac{n-k}{2}$ cặp trong $n-k$ cặp còn lại, ngoài ra, số x sẽ được chọn nếu $n-k$ lẻ và không được chọn nếu $n-k$ chẵn. Rõ ràng bước 1 có $2^k \mathrm{C}_n^k$ cách chọn và bước 2 có $\mathrm{C}_{n-k}^{[(n-k)/2]}$ cách chọn và ta chọn được tổng cộng n số, trong đó k chạy từ 0 tới n. Lập luận đó cho ta điều phải chứng minh. □

Bài toán 4.3.11 (VMO - 2004).*Cho trước các số nguyên dương m, n. Tính*

$T = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{\mathrm{C}_{n+k}^k}{2^{m+k}} + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\mathrm{C}_{m+k}^k}{2^{n+k}}$

Lời giải: Ta chứng minh tổng cần tính bằng 1, tức là $\sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{n+k}^k 2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{m+k}^k 2^{n-k} = 2^{m+n+1}$ Các luỹ thừa của 2 gợi ta liên tưởng đến số tập con một tập hợp.

Trong các tập con của tập $S = \{1, 2, ..., m+n+1\}$ dễ thấy có $\mathrm{C}_{n+k}^k 2^{m-k}$ tập dạng $\{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_{\mathrm{n+i}}\}$, $(1 < \mathrm{i} \leq \mathrm{m}+1)$ trong đó $\mathrm{a}_1 < \mathrm{a}_2 < ... < \mathrm{a}_{\mathrm{n+i}}$ và $\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{n}+\mathrm{k}+1$ với $0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{m}$ (do có C_{n+k}^n cách chọn n phần tử $(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_\mathrm{n})$ từ tập $\{1, 2, ..., \mathrm{n}+\mathrm{k}\}$,1 cách chọn $\mathrm{a}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{n}+\mathrm{k}+1$, và $2^{\mathrm{m}-\mathrm{k}}$ cách chọn tập con của tập $\{\mathrm{n}+\mathrm{k}+1, ..., \mathrm{n}+\mathrm{m}+1\}$. Như vậy $\sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{n+k}^k 2^{m-k}$ là số tập con của S có nhiều hơn n phần tử.

Tương tự, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{m+k}^k 2^{n-k}$ là số tập con của S có nhiều hơn m phần tử, cũng tức là số tập con của S có không quá n phần tử.

Vậy $\sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_{n+k}^k 2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{m+k}^k 2^{n-k}$ là số tất cả các tập con của S, tức là $2^{\mathrm{m+n+1}}$. Đó chính là điều phải chứng minh. □

Bài toán 4.3.12 *.Hãy tính trung bình cộng tất cả các số N gồm 2002 chữ số thỏa mãn N⋮99 và các chữ số của N thuộc 1,2,3,4,5,6,7,8.*

Lời giải: Gọi M là tập các số N thỏa mãn điều kiện đề bài.
Xây dựng ánh xạ f như sau:
Nếu $N = \overline{a_1 a_2 ... a_{2002}}$ thì $f(N) = \overline{b_1 b_2 ... b_{2002}}$, với $b_i = 9 - a_i$.
Do $N + f(N) = \underbrace{\overline{99...9}}_{2002s9} \vdots 9$ nên f là song ánh $M \to M$.
Từ đó: $2 \sum\limits_{N \in M} N = \sum\limits_{N \in A} (N + f(N)) = |M| \,.\, \underbrace{\overline{99...9}}_{2002so9}$.
Suy ra trung bình cộng các số N là:

$$\underbrace{\overline{99...9/2}}_{2002s9} = \frac{10^{2002} - 1}{2}.$$

□

Kết luận

Phương pháp đại lượng bất biến, Phương pháp hàm sinh, Nguyên tắc cực hạn, Phương pháp sử dụng ánh xạ được dùng nhiều trong các bài toán tổ hợp. Tuy nhiên các tài liệu nhằm tổng kết và phân loại các bài toán với từng phương pháp giải cụ thể chưa có nhiều. Vì thế luận văn đã đặt ra và hoàn thành một số việc như sau:

1. Trình bày được 4 phương pháp giải toán tổ hợp
2. Giới thiệu chung về từng phương pháp trong giải toán tổ hợp
3. Sưu tầm, phân loại một số bài toán (chủ yếu từ các kỳ thi Olympic quốc gia, quốc tế và của một số nước) mà trong đó sử dụng bốn phương pháp đã trình bày.

Hy vọng rằng, luận văn có thể giúp ích cho học sinh và giáo viên trong việc tìm hiểu một phương pháp hiệu quả để giải nhiều bài toán tổ hợp. Việc sưu tầm , phân loại đòi hỏi nhiều công sức và thời gian. Bản luận văn này cũng chỉ mới là kết quả bước đầu và tác giả sẽ cố gắng hoàn chỉnh để có được một chuyên đề với nội dung phong phú.

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu,Trần Nam Dũng,Vũ Đình Hòa,Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng (2008), *Chuyên đề chọn lọc TỔ HỢP VÀ RỜI RẠC*, NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Hữu Điển (2004), *Giải toán bằng đại lượng bất biến*, NXB Giáo Dục.

[3] Kim Đình Sơn, *Hàm sinh*, NXB Giáo Dục.

[4] Vũ Đình Hòa *Lý thuyết tổ hợp và ứng dụng*, NXB Giáo Dục.

[5] Nguyễn Quý Dy, *Tuyển tập 200 bài toán vô dịch (Tập 7 : Tổ hợp)*, NXB Giáo Dục.

[6] Hoàng Minh Quân, Phan Đức Minh *Tuyển tập các chuyên đề tổ hợp*

[7] *Toán rời rạc và một số vấn đề liên quan*, Tài liệu bồ dưỡng giáo viên, Hè 2007.

[8] Hà Huy Khoái, Nguyễn Văn Mậu, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu tập huấn phát triển chuyên môn giáo viên trường THPT chuyên, tháng 7-2012.*

[9] Nguyễn Văn Thông, *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Tổ hợp - Rời rạc*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2012

So hoa bôi trung tam hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/