ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NĂM 2014

MÔN THI: TOÁN (vòng II)
Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu I

1)Giả sử x; y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn

$$\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4$$

Chứng minh rằng $5y=4x$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-3y^2+xy=12\\6x+x^2y=12+6y+y^2x\end{cases}$

Câu II

1) Cho x; y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương .Chứng minh rằng x=y.

2) Giả sử x; y là những số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+xy=x^2+y^2$

Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}+\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$$

Câu III

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O)và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn PB=PC.D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC .Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh bốn điểm A,E,P, F cùng nằm trên một đường tròn .

2).Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L .Chứng minh tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB chứng minh $\angle QKL+\angle PAB=\angle QLK+\angle PAC$

Câu IV .

Cho tập hợp A gồm 31 phần tử và dãy gồm m tập con của A thỏa mãn đồng thời các điều kiện

i)Mỗi tập thuộc dãy có ít nhất 2 phần tử

ii) Nếu hai tập thuộc dãy có chung ít nhất 2 phần tử thì số phần tử của hai tập này khác nhau.

Chứng minh rằng $m\le 900$

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

HƯỚNG DẪN

Câu I

1)Giả sử x; y là những số thực dương phân biệt thỏa mãn

$$\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{x^4+y^4}+\frac{8y^8}{x^8-y^8}=4$$

Chứng minh rằng $5y=4x$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2-3y^2+xy=12\\6x+x^2y=12+6y+y^2x\end{cases}$

Hướng dẫn

1)

$$4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{(x^4+y^4)(x^4-y^4)}=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\frac{4y^4}{(x^4-y^4)}$$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2(x^2-y^2)+4y^3}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}=\frac{y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}=\frac{y(x-y)-2y^2}{(x+y)(x-y)}$$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{y}{x-y}\Leftrightarrow 4x-4y=y\Leftrightarrow 4x=5y$$

2)

$$\begin{cases}2x^2-3y^2+xy=12(1)\\6x+x^2y=12+6y+y^2x(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2y^2-y^2+xy=12\\6x-6y+x^2y-y^2x=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(2x+3y)=12\\(x-y)(6+xy)=12\end{cases}$$

Với x-y=0 ta có x=y thay vào PT (1) Vô nghiệm

Vậy $2x+3y=6+xy\Leftrightarrow 2x-6+3y-xy=0\Leftrightarrow(x-3)(2-y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right.$

Với x=3 thay vào PT(1) ta có

$$18-3y^2+3y=12\Leftrightarrow 3y^2-3y-6=0\Leftrightarrow(y-2)(y+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}y=2\\y=-1\end{array}\right.$$

Với y=2 thay vào PT(1) ta có

$$2x^2-12+2x=12\Leftrightarrow x^2+x-12=0\Leftrightarrow(x-4)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\end{array}\right.$$

Hệ có 4 nghiệm $(x;y)\in\{(3;2);(3;-1);(4;2);(-3;2)\}$

Câu II

1) Cho x; y là những số nguyên lớn hơn 1 sao cho $4x^2y^2-7x+7y$ là số chính phương .Chứng minh rằng x=y.

2) Giả sử x; y là những số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+xy=x^2+y^2$

Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}+\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$$

Hướng dẫn

1)

$4x^2y^2-7x+7y=(2xy-1)^2+4xy-7x+7y-1>(2xy-1)^2$

$4x^2y^2-7x+7y=(2xy+1)^2-4xy-7x+7y-1<(2xy-1)^2$

Đặt $4x^2y^2-7x+7y$=A Nên $(2xy-1)^2<A<(2xy+1)^2$

Suy ra $-4xy+1<-7x+7y<4xy+1$

Nếu $x>y\geq 2$ thì $-7x+7y<0<4xy+1$

$-4xy+1\leq -8x+1<-7x+7y\Leftrightarrow A=4x^2y^2$ vô lí suy ra x=y

Tương tự $y>x\geq 2$ vậy x=y

3) $x^3+y^3+xy=x^2+y^2\Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+xy=(x+y)^2-2xy$

Đặt x+y=a;xy=b ta có

$a^3-3ab+3b-a^2=0\Leftrightarrow a^2(a-1)-3b(a-1)=0\Leftrightarrow (a-1)(a^2-3b)=0$

$\left[\begin{array}{l}a=1\\a^2=3b\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=1\\(x+y)^2=3xy\end{array}\right.$

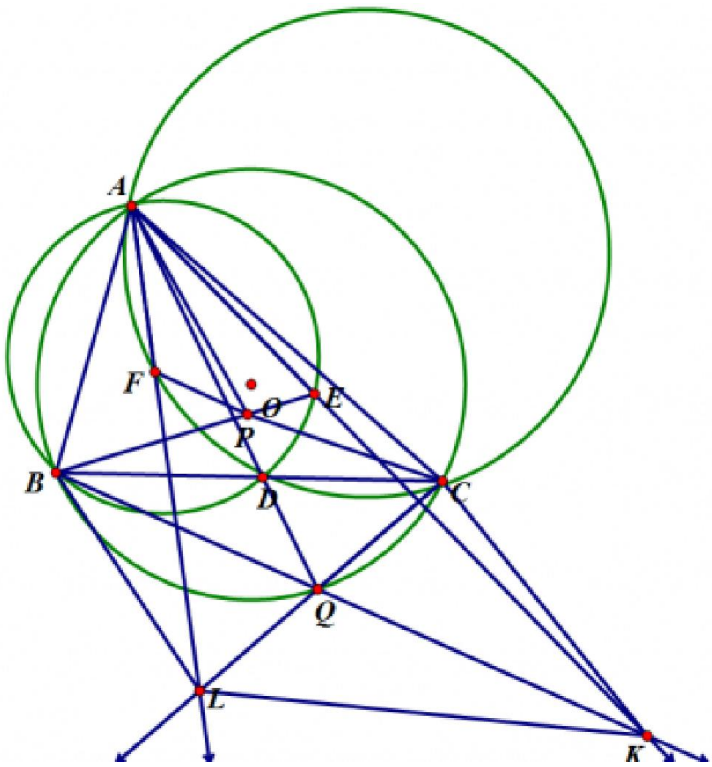
Vì $(x+y)^2\geq 4xy;v\quad\forall x;y\neq 0$ suy ra x=y=0 hoặc x+y=1

Với x=y=0 thì $P=\frac{5}{2}$

Nếu x hoặc y khác 0 ta có $x+y=1\Rightarrow\begin{cases}0\leq x\leq 1\\0\leq y\leq 1\end{cases}$

$P(\max)\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow P=4;P(\min)\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=0\end{cases}\Leftrightarrow P=\frac{4}{3}$

Câu III



1) Chứng minh bốn điểm A,E,P, F cùng nằm trên một đường tròn

Ta co $\angle AEP = \angle ADB$ (chắn cung AB của (ABD)); Ta co $\angle AFP = \angle ADC$ (chắn cung AC của (ADC)); nên $\angle AEP + \angle AFP = \angle ADB + \angle ADC = 180^0$ nên AEFP nội tiếp

2).Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L .Chứng minh tam giác ABE đồng dạng với tam giác CLF

Xét $\Delta ABE; \Delta CLF$ có $\angle AEB = \angle CFL (cùngbù \angle AFP)$ (1) ta lại có

$\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE; \angle FCL = \angle BCL + \angle FCB$ mà $\angle BAD = \angle BCL; \angle DAE = \angle FCB;$

Nên $\angle BAE = \angle FCL$ (2) từ (1) và (2) suy ra ABE đồng dạng với tam giác CLF (g,g)

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB chứng minh

$\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$

Theo 2) ABE đồng dạng với tam giác CLF nên LF.AE=BE.CF ta lại có KE.AF=BE.CF

suy ra $KE.AF = LF.AE \Leftrightarrow \dfrac{LF}{AF} = \dfrac{KE}{AE} \Rightarrow EF // LK$

Nên $\angle AEF = \angle AKL; mà: \angle AEF = \angle APF \Rightarrow \angle APF = \angle AKL$

Nên $\angle PAC + \angle PCA = \angle EKP + \angle QKL; mà: \angle PCA = \angle EKP \Rightarrow \angle PAC = \angle QKL$

Tương tự $\angle PAB = \angle QLK$ suy ra $\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$