

Bài 1: (2,0 điểm):

1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ và $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$.

2) Với mỗi số nguyên dương n ; chứng minh $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.

Bài 2: (2,5 điểm):

1) Giải phương trình $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}) = 8$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \\ 2\sqrt{y^4 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 3 - 4x^3 \end{cases}$ *bài này hôm qua tôi đánh nhầm*

Bài 3: (3,0 điểm): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AA_1 ; BB_1 ; CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng AA_1 cắt đường tròn (O) tại K khác A .

1) Chứng minh A_1 là trung điểm của HK .

2) Hãy tính $\frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1}$.

3) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên BC . Đường thẳng BB_1 cắt (O) tại giao điểm thứ hai là E , kéo dài MB_1 cắt AE tại N . Chứng minh rằng $\frac{AN}{NE} = \left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2$

Bài 4: (1,0 điểm): Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3xy = 1$

Bài 5: (1,5 điểm):

1) Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng ghi số 6^{100} . Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không? Tại sao?

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}.$$

————— Hết —————

Hướng dẫn giải:

Bài 1: (2,0 điểm):

1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ và $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$.

Từ GT ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0 \Rightarrow (a+b)[c(a+b+c) + ab] = 0 \Rightarrow (a+b)[ca + cb + c^2 + ab] = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(c+b)(a+c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c+b=0 \\ c+a=0 \end{cases}$$

Nếu $a + b = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow c - 1 = 0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = 0$

Nếu $c + b = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = 0$

Nếu $a + c = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = 0$

Vậy ta có đpcm.

2) Với mỗi số nguyên dương n ; chứng minh $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.

Bài 2: (2,5 điểm):

1) Giải phương trình $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}) = 8$.

ĐKXĐ $x \geq 2$, đặt $\sqrt{x+6} = a \geq 0$; $\sqrt{x-2} = b \geq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 8$ PTTT:

$$(a-b)(1+ab) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a-b)(1+ab-a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 1+ab-a-b=0 \end{cases}$$

+) với $a = b$ ta có: $\sqrt{x+6} = \sqrt{x-2}$ vô nghiệm

$$+) \text{ với } 1+ab-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}=1 \\ b=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6}=1 \text{ vô nghiệm} \\ \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3(TM) \end{cases}$$

PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 & (1) \\ 2\sqrt{y^4+1} + \frac{1}{x^2+1} = 3 - 4x^3 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - y^6) + xy^2 - y^4 \Leftrightarrow (x - y^2)(x^2 + xy^2 + y^4 + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y^2 \\ x^2 + xy^2 + y^4 + y^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y^2\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ Thỏa mãn (2)}$$

Với $x = y^2$

Bài 4: (1,0 điểm): Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3xy = 1$

$x^3 + y^3 - 3xy = 1 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xy = 1$, đặt $x + y = a$ và $xy = b$ (a, b nguyên) ta có:

$$a^3 - 3ab - 3b = 1 \Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) - 3b(a+1) = 2 \Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a + 1 - 3b) = 2$$

Vì a, b nguyên nên có các TH sau :

$$1) \begin{cases} a+1=1 \\ a^2-a+1-3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$2) \begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \text{ (nhận)} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0;1), (1;0)\}$$

$$3) \begin{cases} a+1=-1 \\ a^2-a+1-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \text{ (nhận)} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \emptyset$$

$$4) \begin{cases} a+1=-2 \\ a^2-a+1-3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \text{ (nhận)} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=4 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \emptyset$$

Vậy $(x,y) \in \{(0;1), (1;0)\}$

Bài 3: (3,0 điểm): Cho tam giác ABC

a) góc A₁ = góc C₂ = góc C₁

=> ΔCHK cân C, CA₁ là đ/cao + đ trung trực => đpcm

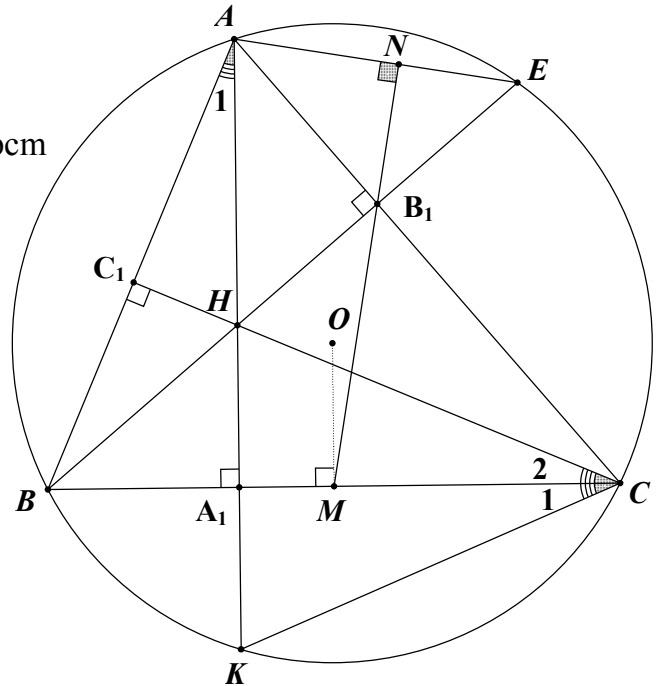
b) Có:

$$\begin{aligned} \frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1} &= \left(1 - \frac{HA_1}{AA_1}\right) + \left(1 - \frac{HB_1}{BB_1}\right) + \left(1 - \frac{HC_1}{CC_1}\right) \\ &= 3 - \left(\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1}\right) \\ &= 3 - \left(\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HBA}}{S_{ABC}}\right) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

c) Từ GT => M trung điểm BC => => ΔB₁MC cân tại M => góc MB₁C = góc MCB₁ = góc AB₁N
=> ΔCBB₁ đồng dạng ΔB₁AN (g-g) => B₁N ⊥ AE

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2 = \frac{AN \cdot AE}{EN \cdot EA} = \frac{AN}{EN} \text{ (đpcm)}$$



Bài 5: (1,5 điểm):

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}.$$

Vì x, y, z dương, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$+) 2x^2\sqrt{yz} \leq x^4 + yz \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \geq \frac{1}{x^4 + yz} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}} \quad (1)$$

$$+) \frac{2}{\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow : \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right). \text{ Tương tự: } \frac{y^2}{y^4 + xz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{xyz} \quad (3)$$

$$\text{Lại có } xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) có : $\Rightarrow A \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3xyz}{xyz} = \frac{3}{2}$ đpcm

Dấu « = » xảy ra khi $x = y = z = 1$

Bài 1 phần 2) và bài 5 phần 1). Bác nào có lời giải hay thì post lên để các ace và đồng nghiệp tham khảo nhé !