

Bài 1: (1,5 điểm):

- 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x-2}$
- 2) Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có độ dài cạnh huyền là 10cm.
- 3) Cho biểu thức $P = x^2 + |x-4| + \sqrt{2}$. Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{2}$.
- 4) Tìm tọa độ của điểm thuộc parabol $y = 2x^2$ biết điểm đó có hoành độ $x = 1$.

Bài 2: (1,5 điểm):

Cho biểu thức $Q = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a+\sqrt{a}-1} \right)$ với $a \geq 0; a \neq 1$.

- 1) Rút gọn biểu thức Q .
- 2) Chứng minh rằng khi $a > 1$ thì giá trị biểu thức Q nhỏ hơn 1.

Bài 3: (2,5 điểm):

- 1) Cho phương trình $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ (*) (m là tham số).
 - a) Tìm m để phương trình (*) có nghiệm.
 - b) Giả sử $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x_1^2 x_2^2 + 3(x_1^2 + x_2^2) - 4$$

- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 - 1 = 5y - 5x \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Bài 4: (3,0 điểm): Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ với $R_1 > R_2$ tiếp xúc trong với nhau tại A . Đường thẳng O_1O_2 cắt $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ lần lượt tại B và C khác A . Đường thẳng đi qua trung điểm D của BC vuông góc với BC cắt $(O_1; R_1)$ tại P và Q .

- 1) Chứng minh C là trực tâm tam giác APQ .
- 2) Chứng minh $DP^2 = R_1^2 - R_2^2$.
- 3) Giả sử $D_1; D_2; D_3; D_4$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của D xuống các đường thẳng

$BP; PA; AQ; QB$. Chứng minh $DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \leq \frac{1}{2}(BP + PA + AQ + QB)$

Bài 5: (1,5 điểm):

- 1) Giải phương trình $(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})(\sqrt{2-x} + 1) = 1$.
- 2) Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $2(y^2 + yz + z^2) + 3x^2 = 36$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x + y + z$.

HD một số câu:

Bài 3:

$$2) \begin{cases} 2x^3 - 1 = 5y - 5x(1) \\ x^3 + y^3 = 1(2) \end{cases} \text{ trừ từng vế tương ứng của (1) và (2) ta được}$$

$$x^3 - y^3 + 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 5 = 0(3) \end{cases}$$

$$\text{PT (3)} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 5 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$$\text{Với } x = y \Rightarrow 2x^3 = 2y^3 = 1 \Rightarrow x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

$$\text{Vậy hpt có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$$

Bài 4:

1) PBQC là hình thoi $\Rightarrow QC \parallel BP$

CM $\parallel BP$ (cùng vuông góc với PA)

$\Rightarrow Q, C, M$ thẳng hàng

Tam giác APQ có 2 đường cao AD và QM cắt nhau tại C

$\Rightarrow C$ là trực tâm tam giác APQ

2) c/mình DM là tiếp tuyến tại M của (O_2)

$$\text{Cmnh được } PD^2 = DB \cdot DA = DC \cdot DA = DM^2 = O_2D^2 - O_2M^2 = O_2D^2 - R_2^2$$

Ta đi cmnh $O_2D = R_1$

$$\text{Ta có } O_2D = O_2A + CD = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{2R_1}{2} = R_1$$

Vậy ta có đpcm.

$$c) DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \leq \frac{1}{2}(BP + PA + AQ + QB)$$

Để dàng cmnh được $DD_1 = DD_4; DD_2 + DD_3; BP = QB; PA + AQ$

$$\text{Nên } DD_1 + DD_2 + DD_3 + DD_4 \leq \frac{1}{2}(BP + PA + AQ + QB) \Leftrightarrow 2(DD_1 + DD_2) \leq PB + PA$$

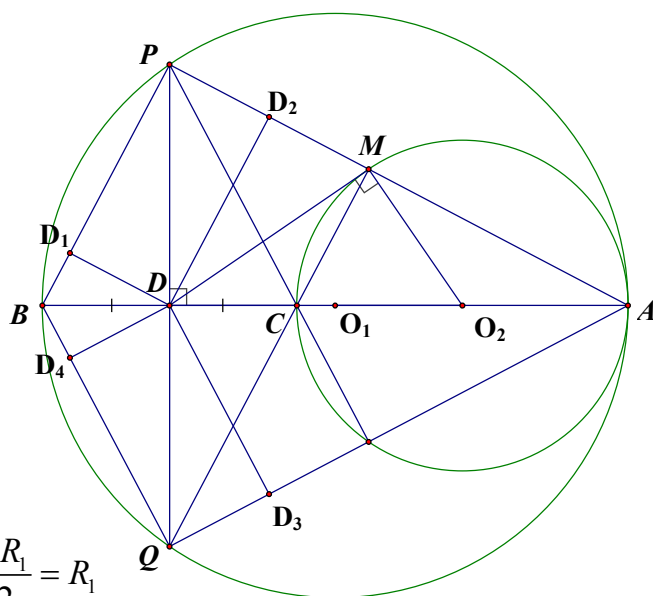
Ap dụng BĐT Cô-si ta có

$$DB^2 + DP^2 \geq 2DB \cdot DP \Leftrightarrow BP^2 \geq 2DB \cdot DP \text{ (Pi-ta-go } DB^2 + DP^2 = BP^2)$$

$$\Rightarrow BP \geq \frac{2DB \cdot DP}{BP} = 2DD_1 \text{ (dấu « = » xảy ra khi } DP = DB) \text{ (1)}$$

$$\text{Cmnh tương tự ta có } AP \geq \frac{2DA \cdot DP}{AP} = 2DD_2 \text{ (dấu « = » xảy ra khi } DP = DA) \text{ (2)}$$

$$\text{TỪ (1) và (2)} \Rightarrow 2(DD_1 + DD_2) \leq PB + PA \text{ (dấu « = » xảy ra khi } DP = DA = DB)$$



Bài 5:1) ĐKXĐ $1 \leq x \leq 2$

$$(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})(\sqrt{2-x} + 1) = 1.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{2-x} + 1} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2-x} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3\sqrt{2-x} + 3 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2} - 2) + (\sqrt{x-1} - 1) = 3\sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = 3\sqrt{2-x} \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right) = 3\sqrt{2-x} (*)$$

Xét PT (*) ta có:

+) $x = 2$ thỏa mãn+) $1 \leq x < 2$ Vế trái âm vế phải dương Vô lí !+) $x > 2$ không thuộc ĐKXĐVậy $x = 2$ là nghiệm PT đã cho

2) Ta có:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$

$$= 2(y^2 + z^2 + yz) + 3x^2 - (x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 2xz + z^2)$$

$$(x+y+z)^2 = 36 - (x-y)^2 - (x-z)^2 \leq 36$$

$$\text{Nên } -6 \leq x+y+z \leq 6$$

$$\Rightarrow \text{Max}(x+y+z) = 6 \text{ khi } x = y = z = 2$$

$$\text{Min}(x+y+z) = -6 \text{ khi } x = y = z = -2$$