Hàng điểm điều hòa - vẻ đẹp quyến rũ trong hình học

Kim Luân

Bài viết này xin giới thiệu đôi chút về *"hàng điểm điều hòa"*- một công cụ tương đối mạnh và hấp dẫn trong giải toán hình học phẳng .Để các bạn dễ theo dõi tôi xin trình bày lại một số lí thuyết cơ bản nhất của công cụ này:

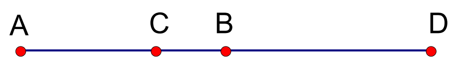
I.Căn cơ nội công :

a. Hàng điểm điều hoà:

Định nghĩa:

Trên một đường thẳng ta lấy bốn điểm A,B,C,D. Khi đó ta gọi A,B,C,D là một hàng điểm điều hòa nếu nó thỏa mãn hệ thức sau: $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=-\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ (1)

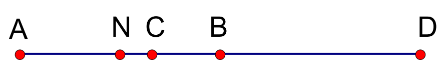
Kí hiệu: $(A,B,C,D)=-1$



Sau đây là một số định định lí quan trọng cần biết trong bài viết này(được suy trực tiếp từ định nghĩa):

***Định lí 1:**(Hệ thức Niutơn)

Cho $(A,B,C,D)=-1$. Gọi N là trung điểm của AB. Khi đó $NA^2=NB^2=\overline{NC}.\overline{ND}$ (2)

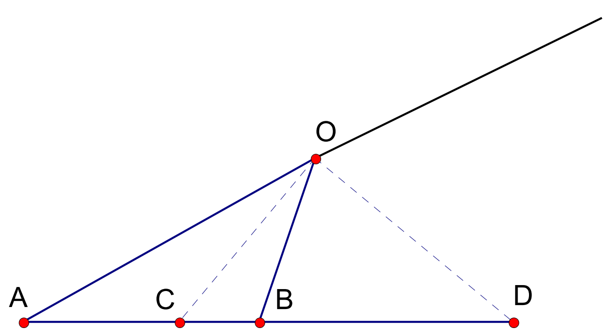


*<u>*Nhận xét:</u> Thực ra (1) và (2) là tương đương nên nếu 4 điểm A,B,C,D thỏa mãn (2) thì ta cũng có điều ngược lại là $(A,B,C,D)=-1$. Định lí này và định nghĩa là hai dấu hiệu phổ biến nhất để chứng minh 4 điểm là một hàng điểm điều hòa.*

Vấn đề để chứng tỏ một hàng điểm là điều hòa xem như đã được giải quyết, vậy khi đã có một hàng điểm điều hòa rồi thì ta thu được gì? Câu hỏi này sẽ được giải đáp qua hai định lí quan trọng sau:

***Định lí 2:**

Cho $(A,B,C,D)=-1$. Lấy O sao cho OC là phân giác trong của $\angle AOB$ thì OD là phân giác ngoài của $\angle AOB$.



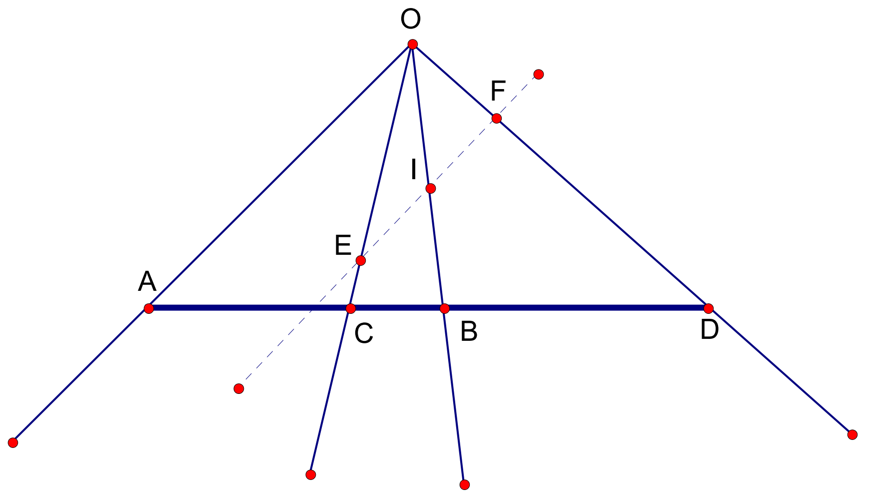
*<u>*Nhận xét:</u>*

Từ đó suy ra $\angle COD = 90^0$ do đó định lí này có ý nghĩa thực sự quan trọng trong những bài chứng minh vuông góc.

Mặt khác cũng có điều ngược lại tức nếu $\angle COD = 90^0$ thì OC là phân giác trong và OD là phân giác ngoài của $\angle AOB$ điều này có ý nghĩa quan trọng cho những bài chứng minh yếu tố phân giác.

Định lí 3:

Cho $(A, B, C, D) = -1$ và điểm O nằm ngoài hàng điểm điều hòa trên. Một đường thẳng d cắt ba tia OC,OB, OD lần lượt tại E,I và F. Khi đó I là trung điểm của EF khi và chỉ khi d song song với OA.

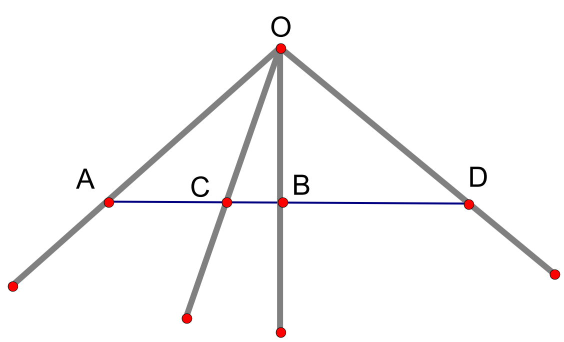


*<u>*Nhận xét:</u>*

Định lí này rất có ý nghĩa đối với các bài toán chứng minh trung điểm và song song.

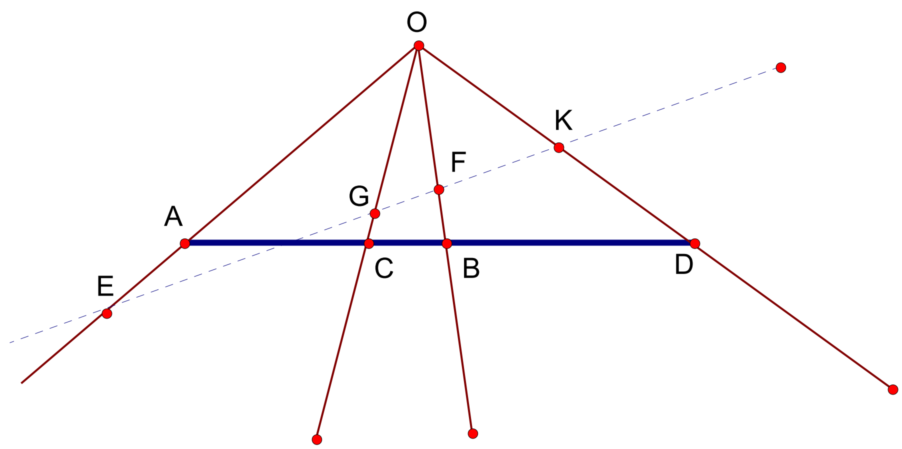
Một câu hỏi nhỏ là phải chăng các hàng điểm điều hòa này là rất hiếm, thật ra không phải như vậy, chỉ cần có một hàng điểm điều hòa thì ta có thể "sinh sôi nảy nở" ra hàng loạt nhưng hàng điểm điều hòa con con, các bạn sẽ hiểu rõ điều trên qua định lí về "chùm điều hòa" sau đây :

<u>b.Chùm điều hòa:</u>



Định nghĩa:
Cho hàng điểm điều hòa $(A,B,C,D)=-1$ và O nằm ngoài hàng điểm điều hòa trên. Khi đó ta gọi 4 tia OA,OB,OC,OD là một chùm điều hòa và kí hiệu $(OA,OB,OC,OD)=-1$.

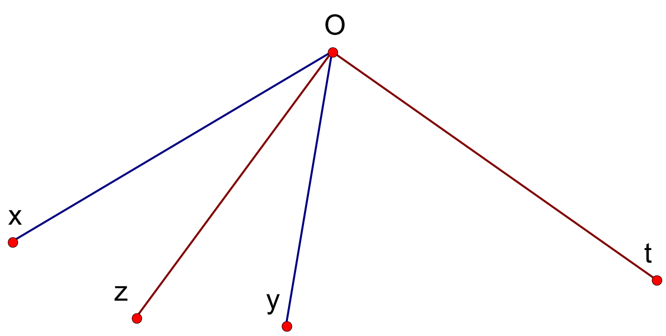
Định lí chùm điều hòa:
Cho $(OA,OB,OC,OD)=-1$.Một đường thẳng d bất kì cắt các cạnh OA,OB,OC,OD lần lượt tại E,F,G,K khi đó ta có $(E,F,G,K)=-1$



*<u>*Nhận xét:</u>*
Qua định lí trên chúng ta có thể thấy từ một hàng điểm điều hòa ban đầu sẽ "sinh sôi" vô số chùm điều hòa xung quanh(cứ một điểm ngoài hàng điểm điều hòa nói trên sẽ cho ta một chùm điều hòa tương ứng). Và cứ mỗi chùm điều hòa như vậy lại cho ta vô số hàng điểm điều hòa nữa. Mà chỉ cần một trong số chúng kết hợp khéo léo với các định lí hai và ba sẽ cho ra rất nhiều bài hình học hiểm ác với sự biến ảo khôn lường…

Từ định lí này kết hợp với các định lí 2 và 3 cho ta một số hệ quả sau:

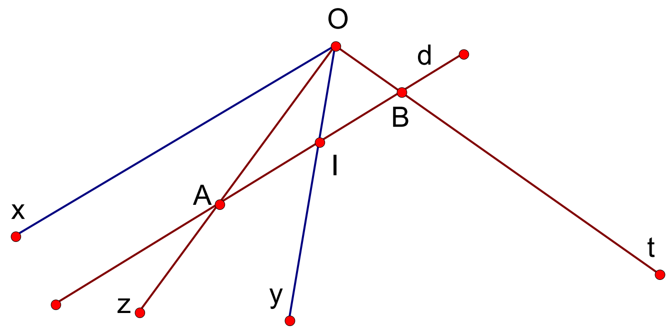
Hệ quả 1:
Cho chùm điều hòa $(Ox,Oy,Oz,Ot)=-1$ khi đó nếu góc $zOt=90^0$ thì Oz là phân giác trong của góc xOy và Ot là phân giác ngoài xOy



*<u>*Nhận xét:</u>*
Tất nhiên cũng có điều ngược lại tức nếu có Oz là phân giác trong hoặc Ot là phân giác ngoài thì góc zOt=90 độ

Mặt khác nếu 4 tia Ox,Oy,Oz,Ot bất kì mà có góc zOt=90 độ và Oz,Ot lần lượt là phân giác trong và phân giác ngoài của xOy thì $(Ox,Oy,Oz,Ot)=-1$. Đây là một dấu hiệu quan trọng để chứng minh 4 tia xuất phát từ một đỉnh là một chùm điều hòa.

Hệ quả 2:
Cho chùm điều hòa $(Ox,Oy,Oz,Ot)=-1$ một đường thẳng d bất kì cắt Oz,Ot,Oy lần lượt tại A,B,I khi đó d song song Ox khi và chỉ khi I là trung điểm của AB.



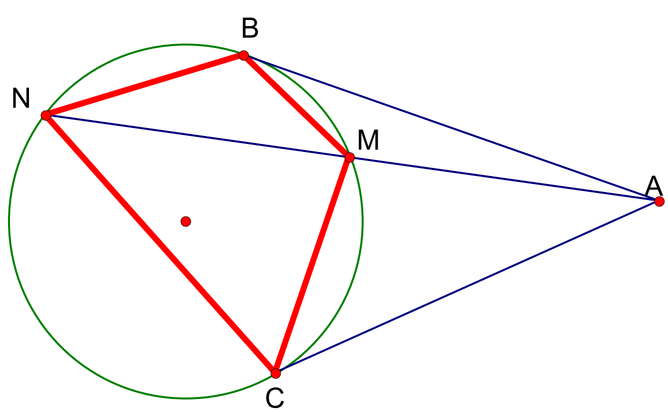
*<u>*Nhận xét:</u>*
Cũng có điều ngược lại tức nếu d song song Ox và I là trung điểm của AB thì $(Ox,Oy,Oz,Ot)=-1$. Đây cũng là một dấu hiệu quan trọng để chứng minh 4 tia xuất phát từ một đỉnh là một chùm điều hòa.

Nhân đây tôi xin trình bày thêm một cái nữa cũng…điều hòa

<u>c.Tứ giác điều hòa:</u>

Định nghĩa:
Tứ giác ABCD được gọi là một "tứ giác điều hòa" nếu nó thỏa mãn hệ thức sau:
$$\frac{AB}{AD}=\frac{CB}{CD}$$

Định lí về tứ giác điều hòa:
Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A ta kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và kẻ một cát tuyến AMN bất kì. Chứng minh rằng BMCN là một tứ giác điều hòa(hình vẽ)



(gợi ý: sử dụng tam giác đồng dạng để suy ra điều phải chứng minh từ đ/n)

<u>Nhận xét:</u>
+Cũng có điều ngược lại tức nếu MBNC là tứ giác điều hòa thì tiếp tuyến tại B,tiếp tuyến tại C và MN đồng quy tại một điểm
+Tứ giác điều hòa có một mối quan hệ tuyệt vời với chùm điều hòa mà các bạn sẽ hiểu rõ sau khi đọc hết phần cuối của bài viết này.

Việc chứng minh các định lí trên là rất đơn giản nên xin dành lại cho bạn đọc(nếu có thắc mắc gì sẽ trao đổi thêm).
Sau đây chúng ta sẽ khảo sát một vài bài toán để thấy được phần nào về vẻ đẹp và sức mạnh của công cụ vừa dẫn.

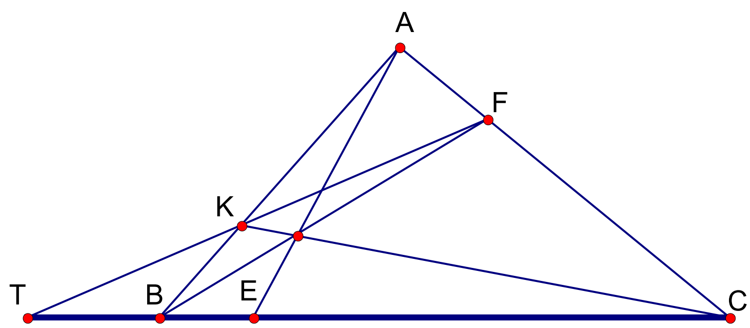
II.Một số bài toán minh họa:

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một bài toán cơ bản nhưng rất quan trọng sau:

Bài toán 1:

Cho tam giác ABC. Lấy E trên BC, F trên AC và K trên AB sao cho AE,BF,CK đồng quy tại một điểm. Khi đó nếu T là giao điểm của FK với BC thì $(T,E,B,C)=-1$

Lời giải:



Trong tam giác ABC:
+Áp dụng định lí Xêva với ba đường đồng quy AE,BF,CK ta có:

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{KA}}{\overline{KB}}=-1 \quad (1)$$

+Mặt khác áp định lí Mênêlaúyt với ba điểm thẳng hàng T,K,F lại cho ta:

$$\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FC}}=1 \quad (2)$$

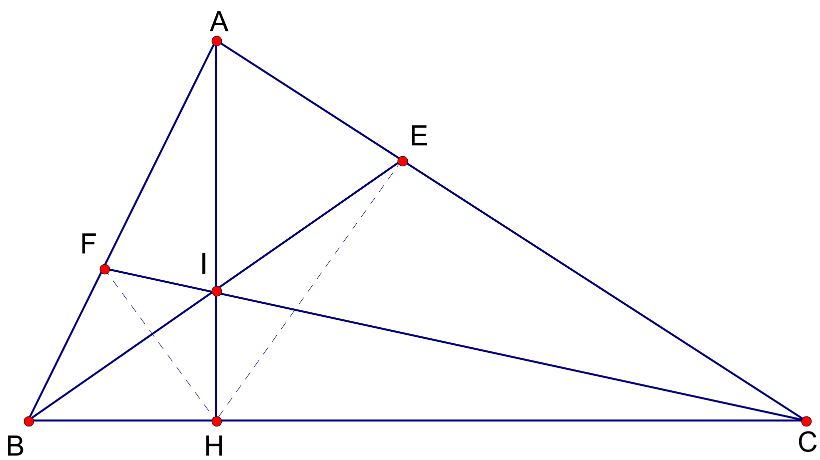
Nhân (1) và (2) vế theo vế suy ra:

$$\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}}=-\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$$

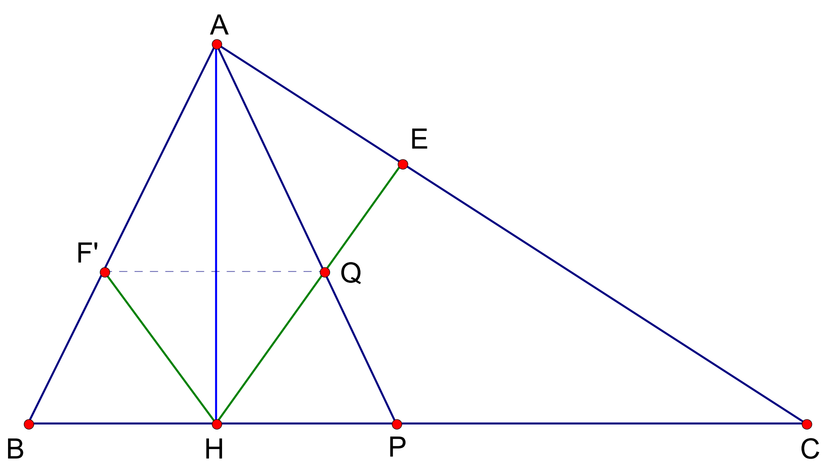
Theo định nghĩa thì $(T,E,B,C)=-1$,đây chính là *đpcm*.

Bài toán 1.1:

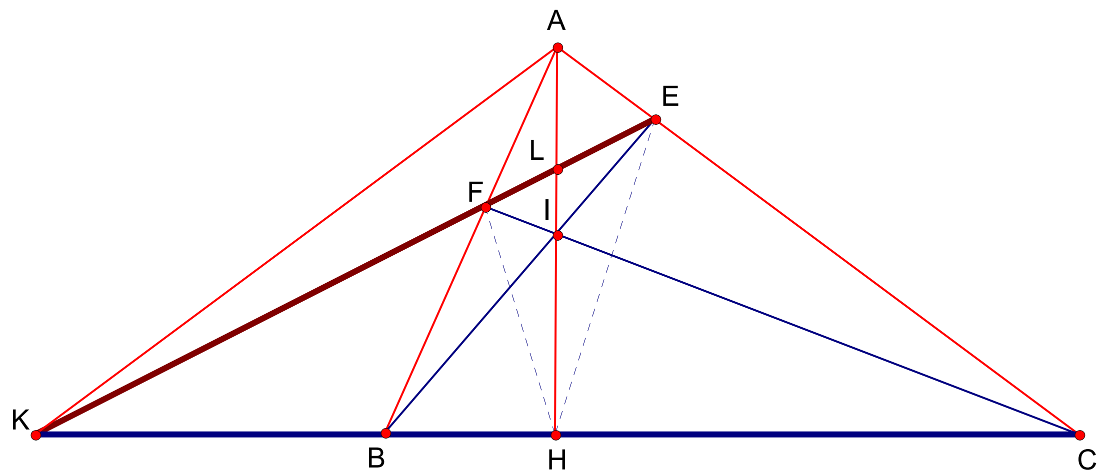
Cho tam giác ABC và H là chân đường cao kẻ từ A. Trên đoạn thẳng AH ta lấy một điểm I bất kì rồi kẻ BI cắt AC tại E và CI cắt AB tại F.Chứng minh rằng AH là phân giác của $\angle EHF$



Lời giải:
Một bài toán đơn giản nhưng…khó đến kinh ngạc, bạn phải làm gì khi đối mặt với một bài như vậy? …???
Khi nhắc đến bài toán này tôi chợt nhớ đến lời giải rất độc đáo của anh Hatucdao, một lời giải thực sự ấn tượng mạnh với tôi, nên xin được trích dẫn ngay sau đây để các bạn được chiêm ngưỡng:
"Kết quả là hiển nhiên khi tam giác ABC cân. Giả sử ABC không cân ta có thể giả sử AC>AB .Dựng tam giác ABP cân tại A và AP cắt HE tại Q. Gọi F' là điểm đối xứng của Q qua AH. Khi đó AH là phân giác của $\angle EHF'$ *và* $\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = \dfrac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}}$
Áp dụng định lí Mênêlaúyt cho tam giác ACP với ba điểm thẳng hàng H,Q,E ta có:
$$\frac{\overline{HP}}{\overline{HC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}} = -1$$
Theo định lí ceva đảo ta có AH, BE, CF' *đồng quy từ đó suy ra đpcm"*



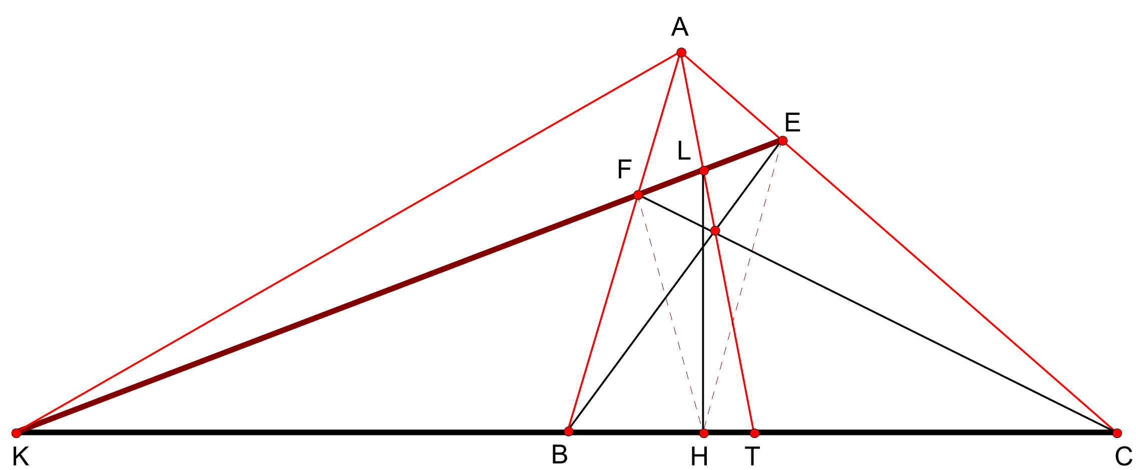
Một viên ngọc không dấu vết nhưng phải công nhận là rất khó nghĩ ra.
Dẫu sao đi nữa thì việc cảm nhận vẻ đẹp tinh túy của lời giải trên cũng giúp chúng ta thấm thía và quý trọng hơn đối với cách làm dưới đây, bởi điều quan trọng hơn một lời giải, là nó cho ta thấy được gốc rễ của vấn đề:



<u>C2:</u> Kẻ EF cắt BC tại K theo bài toán 1 ta có $(K, H, B, C) = -1$ (1)
Gọi L là giao điểm của EF với AH.
Từ (1) suy ra $(AK, AH, AB, AC) = -1$ suy ra $(K, L, F, E) = -1$ (định lí chùm điều hòa)
Vì $LHK = 90^0$ nên theo nhận xét trong định lí 2 ta có đpcm.

*<u>*Nhận xét:</u> Quá ngắn gọn phải không, tôi nghĩ rất có thể bài toán trên đã được đặt ra như vậy. Các bạn có thể thấy chỉ vài biến đổi nhỏ và một kĩ xảo để che dấu điểm K đã khiến cho bài toán 1.1 trở nên cực khó. Tất nhiên từ lời giải này chúng ta có thể phát biểu bài toán tổng quát hơn như sau:*

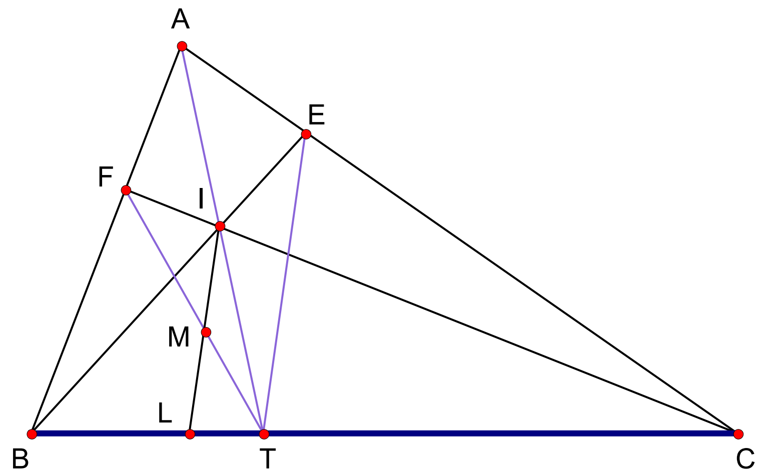
Bài toán 1.2:(đề thi Iran)
Cho tam giác ABC, lấy T,E,F lần lượt thuộc các đoạn BC,CA,AB sao cho 3 đường thẳng AT,BE,CF đồng quy tại một điểm.Gọi L là giao điểm của AT và EF.Gọi H là hình chiếu của L xuống BC. Chứng minh rằng LH là phân giác của $\angle EHF$.



(chứng minh tương tự bài 1.1)

*<u>*Nhận xét:</u>*
Nói chung từ 1 hàng điểm điều hòa ban đầu ta có thể "sinh sôi nảy nở" ra rất nhiều hàng điểm điều hòa khác mà một trong chúng nếu kết hợp với các định lí 2 và 3 sẽ cho ta rất nhiều tính chất thú vị. Thí dụ các bài 1.1 và 1.2 là "sản phẩm" của định lí 2. Nếu bạn thích có thể sử dụng định lí 3 để "xuất khẩu" những sản phẩm mới, chẳng hạn bài toán sau đây:

Bài toán 1.3:
Cho tam giác ABC, lấy T,E,F lần lượt thuộc các đoạn BC,CA,AB sao cho 3 đường thẳng AT,BE,CF đồng quy tại điểm I. Kẻ đường thẳng qua I song song với TE và cắt TF,TB lần lượt tại M và L. Chứng minh rằng M là trung điểm của LI



(chứng minh: sử dụng tính chất chùm điều hòa như bài 1.1 rồi áp dụng định lí 3)

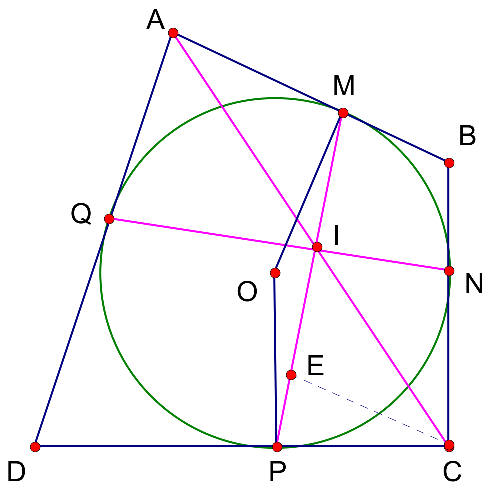
Qua các thí dụ trên các bạn có thể thấy từ một vấn đề người ta có thể phát biểu dưới những cách khác nhau, những cách mà khi đọc đề chúng ta không hề thấy bất kì một liên hệ gì từ chúng, nhưng thực ra tất cả chúng đều xuất phát từ một gốc rễ. Nắm được gốc rễ tức là ta đã nắm được bài toán vậy.
Tất nhiên từ bài toán 1 sẽ sản sinh ra cả một lớp các bài toán rộng lớn, tôi không có thời gian nêu thêm ra đây mà chỉ hi vọng các bạn nếu gặp một trong số đó sẽ nhanh chóng cho nó… "lộ rõ nguyên hình".

Bây giờ tôi xin đi vào một không gian mới hơi khác một chút với các cách khai thác đã nêu ở trên nhằm giúp các bạn có một cái nhìn sâu sắc hơn cho bài toán 1. Nhưng trước hết tôi sẽ trang bị cho các bạn một số tính chất cần thiết, rồi sau đó chúng ta sẽ tìm cách liên hệ với bài toán 1 sau.

Tính chất 1:
Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn; khi đó ta có MP,NQ,AC,BD đồng quy tại một điểm.
Lời giải:
Hạ $CE // AB$
Chú ý $\angle OMP = \angle OPM \Rightarrow \angle BMP = \angle CPM \Rightarrow CE = CP$

Do đó nếu gọi I là giao điểm của AC với MP thì ta có: $\frac{IA}{IC}=\frac{AM}{EC}=\frac{AM}{PC}$ (1)

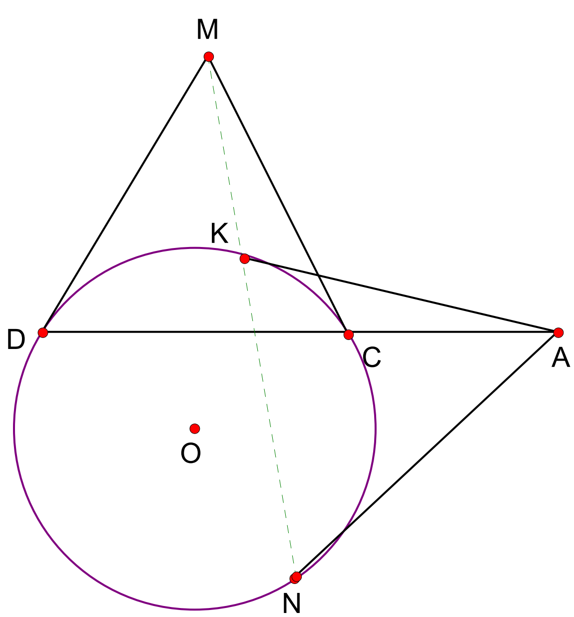
Tương tự gọi I' là giao điểm của AC với NQ thì ta cũng có: $\frac{I'A}{I'C}=\frac{AQ}{NC}$ (2)



Chú ý AM=AQ và PC=NC nên từ (1) và (2) suy ra $I\equiv I'$
suy ra MP,NQ,AC đồng quy (3)
Lập luận tương tự ta có MP,NQ,BD đồng quy (4)
Kết hợp (3) và (4) ta được đpcm.

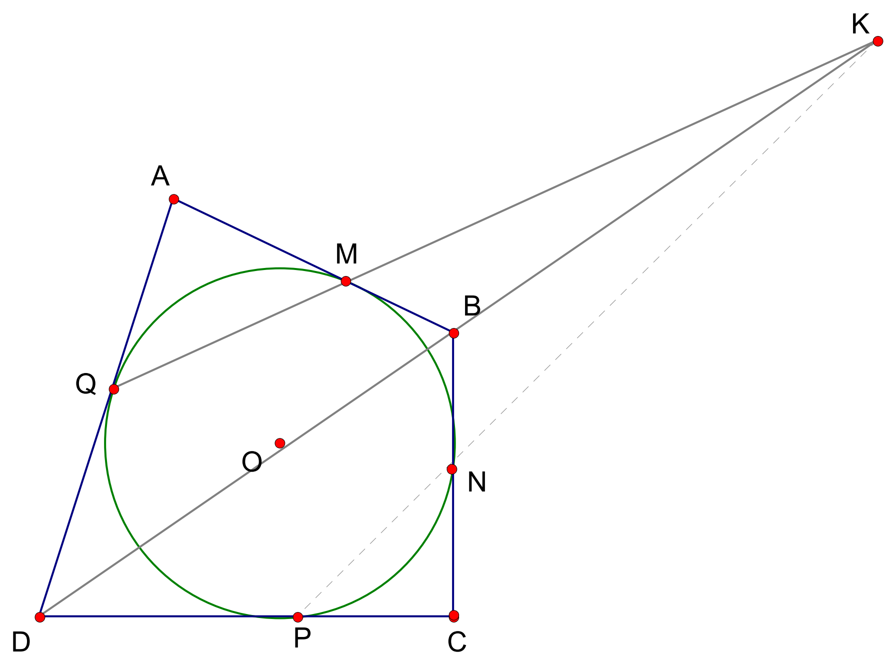
Tính Chất 2:
Cho đường tròn (O). Lấy một điểm A ngoài đường tròn (O), từ A ta kẻ hai tiếp tuyến AK,AN và một cát tuyến ACD bất kì đối với đường tròn trên. Hai tiếp tuyến qua C và D cắt nhau tại M. Khi đó ta có K,M,N thẳng hàng.

Lời giải:



Áp dụng "định lí về tứ giác điều hòa" cho điểm A với hai tiếp tuyến AK,AN và cát tuyến ACD suy ra KCND là tứ giác điều hòa.
Lại theo *nhận xét* trong "định lí về tứ giác điều hòa" suy ra NK,MD,MC đồng quy tại một điểm suy ra *đpcm*

Tính chất 3:
Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn. Chứng minh rằng MQ,NP và DB đồng quy tại một điểm.



Lời giải:
Gọi K là giao điểm của QM với DB
Áp dụng định lí Mênêlaúyt cho tam giác ABD với ba điểm thẳng hàng Q,M,K ta có:
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=1 \quad (1)$$
Chú ý $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}$ và $\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$
Do đó từ (1) suy ra
$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NB}}.\frac{\overline{KB}}{\overline{KD}}.\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}=1$$
Theo định lí Mênêlaúyt đảo suy ra K,N,P thẳng hàng suy ra *đpcm*

Tính chất 4:

Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn. Gọi K là giao điểm của MQ với NP. Gọi E và F là hai tiếp tuyến của K với (O).Chứng minh rằng:

a)A,E,F,C thẳng hàng

b)OK vuông góc AC.

Lời giải:

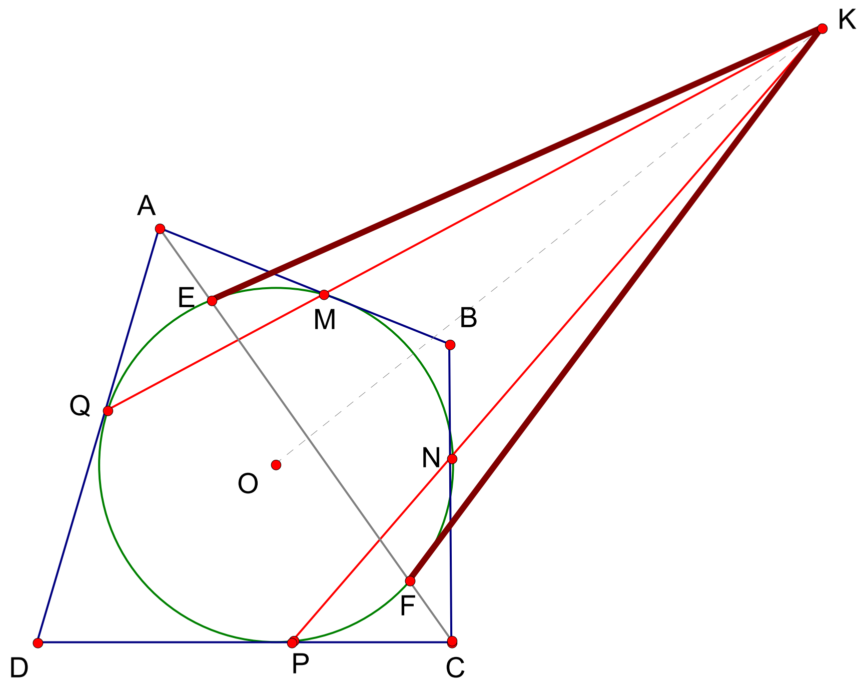
Gọi E' và F' là hai giao điểm của AC với (O).

Hai tiếp tuyến qua E' và F' cắt nhau tại K'

Áp dụng tính chất 2 với hai tiếp tuyên CN,NP và cát tuyến CF'E' suy ra K',N,P thẳng hàng. Tương tự K',M,Q thẳng hàng hay K' là giao điểm của MQ với NP hay $K' \equiv K$.

Suy ra $E' \equiv E, F' \equiv F$

Vậy A,E,F,C thẳng hàng. Mặt khác vì KE,KF là hai tiếp tuyến của K với O nên KO vuông góc EF hay KO vuông góc AC.



Và cuối cùng là tính chất quan trọng nhất có ý nghĩa là cầu nối giữa các tính chất nêu trên với bài toán 1 của chúng ta.

Tính chất 5:

Cho tam giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm (O). M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với đường tròn. Gọi K là giao điểm của MQ với NP và I là giao điểm của MP với QN. Chứng minh rằng $(D,B,I,K) = -1$.

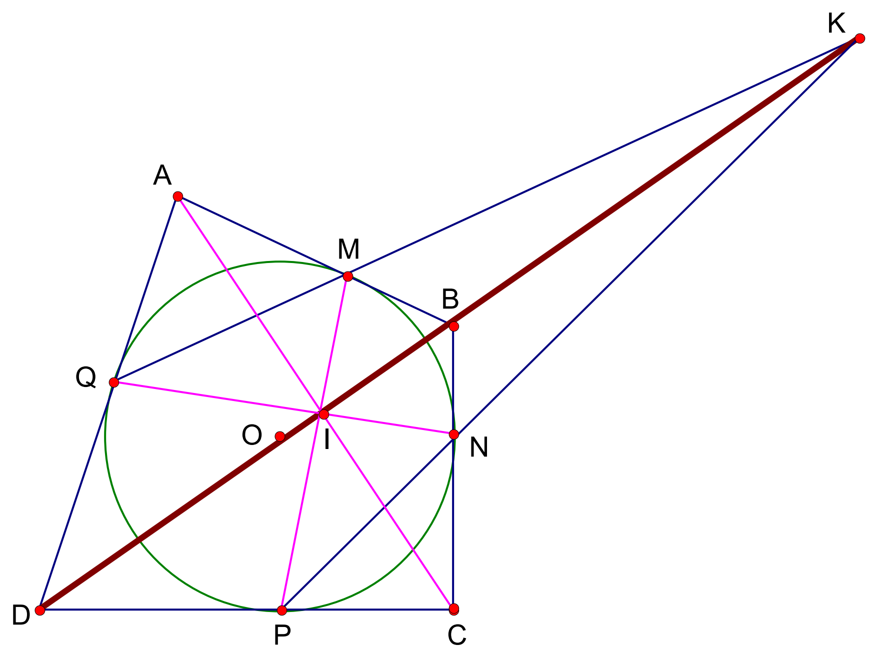
Lời giải:

*Áp dụng định lí Mênêlaúyt cho tam giác ABD với 3 điểm thẳng hàng K,M,Q ta có:

$\frac{KB}{KD}.\frac{QD}{QA}.\frac{MA}{MB} = 1$ hay $\frac{KB}{KD} = \frac{MB}{QD}$ (vì QA=MA) (1)

*Mặt khác theo lời giải trong tính chất 1 thì ta đã biết: $\dfrac{MB}{QD}=\dfrac{IB}{ID}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{KB}{KD}=\dfrac{IB}{ID}$



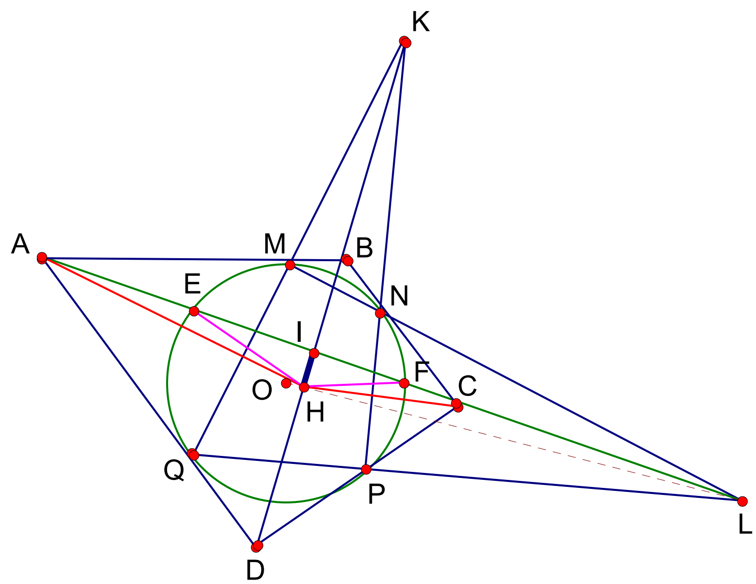
Vì I nằm trong đoạn BD và K nằm ngoài đoạn BD nên: $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KD}}=-\dfrac{\overline{IB}}{\overline{ID}}$

Vậy $(D,B,I,K)=-1$ $(đpcm)$

<u>*Nhận xét:</u> *Việc xuất hiện hàng điểm điều hòa (tính chất 5) ở đây đóng một vai trò vô cùng quan trọng, để dễ hiểu các bạn hãy tưởng tượng bốn tính chất 1,2,3,4 như một kho thuốc súng có sức tàn phá khủng khiếp nhưng đang bị đè nén trong bao, và tính chất 5 chính là mồi kích hoạt kho thuốc súng ấy để tạo nên một sự bùng nổ vô cùng ghê gớm, đến mức, hàng loạt các tính chất mới được sinh ra dồn dập đến chóng mặt…*

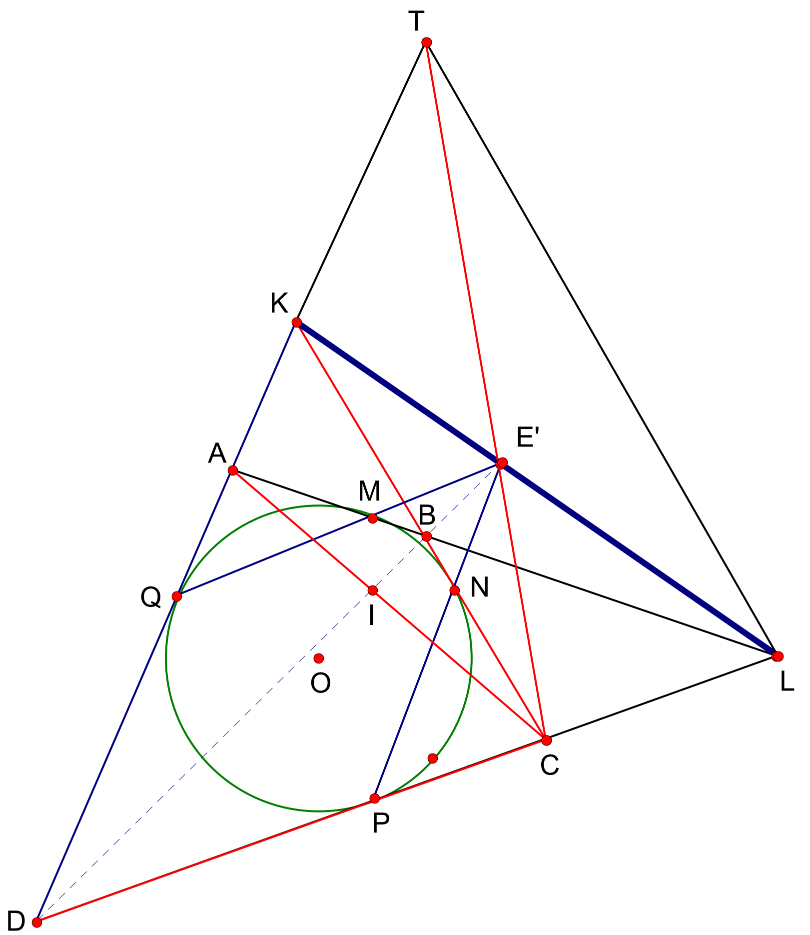
Do khuôn khổ bài viết có hạn nên tôi chỉ xin trình bày một số kết quả tương đối quen thuộc(được rút ra từ 5 tính chất trên) với hi vọng sẽ đưa đến cho các bạn một cái nhìn mới mẽ về những vấn đề không mới mẽ chút nào.
Xin bắt đầu chiến dịch bằng một bài trên "tạp chí Toán học và tuổi trẻ":

Bài toán 1.4:
Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) . Gọi E,F lần lượt là giao điểm AC với (O). Hạ $OH\perp DB$. Chứng minh rằng $\angle AHE=\angle CHF$ (*)



Lời giải:
Gọi M,N,P,Q lần lượt là tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với (O). Đặt $L = MN \cap QP$, $K = QM \cap PN$ và $I = DK \cap AL$. Vì hai tứ giác KEOH và KFOH nội tiếp suy ra 5 điểm K,E,O,H,F cùng thuộc một đường tròn suy ra $\angle EHK = \angle FHK$ do vậy để chứng minh (*) ta cần chứng minh HI là phân giác $\angle AHC$.
Thật vậy theo tính chất 4 suy ra OL vuông góc BD hay HI vuông góc HL do đó theo kết quả tính chất 5 thì ta đã có:
$(A,C,I,L) = -1$ do vậy áp dụng định lí 2 suy ra HI là phân giác $\angle AHC$ (*đpcm*)

Bài toán 1.5:
Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O) và M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của AB,BC,CD,DA. Đặt $K = AD \cap BC$, $L = AB \cap DC$, $E = QM \cap PN$, $F = QP \cap MN$.
Chứng minh rằng 4 điểm K,L,E,F cùng nằm trên một đường thẳng.
Lời giải:
Gọi I là giao điểm giữa BD với AC, E' là giao điểm DB với KL, T là giao điểm CE' với DK, theo bài toán 1 thì $(T,A,K,D) = -1$(tam giác DKL với ba đường đồng quy LA,KC,DE') suy ra $(CT,CA,CK,CD) = -1$ theo định lí chùm điều hòa suy ra $(E',I,B,D) = -1$ tuy nhiên theo tính chất 5 thì đã có $(E,I,B,D) = -1$
Do vậy $E' \equiv E$ suy ra E,K,L thẳng hàng (1).
Lập luận tương tự cũng có F,K,L thẳng hàng (2).
Kết hợp (1) và (2) suy ra *đpcm*



Nhận xét:

Quá bất ngờ phải không? Những bài toán tưởng chừng hoàn toàn xa lạ nhưng tìm ẩn bên trong lại là những mối quan hệ vô cùng khăn khít. Tất cả chúng tạo nên cả một hệ thống với sự biến ảo khôn lường.

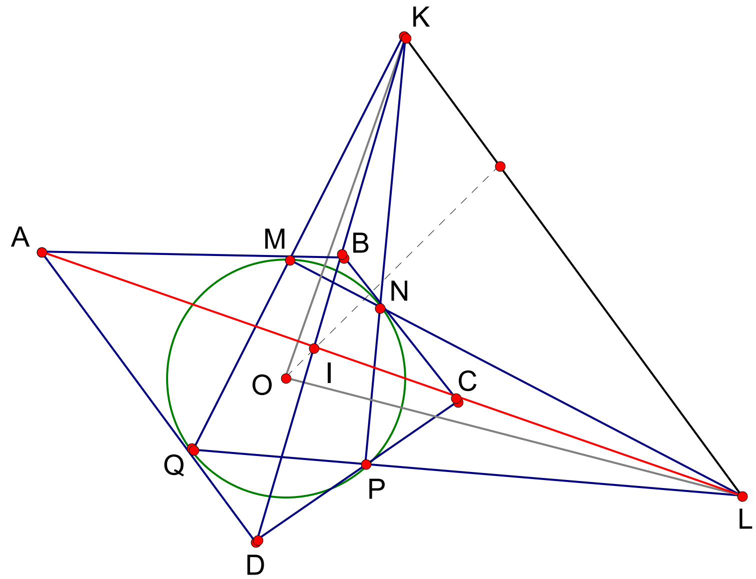
Vấn đề đến đây lại mở ra rất nhiều vấn đề hấp dẫn mới, chúng ta khai thác chút xíu xem thử có thu được điều gì thú vị không nhá.

Bài toán 1.6:

Cho tứ giác MNPQ nội tiếp đường tròn (O) có $QM \cap PN = K$, $MN \cap QP = L$, $MP \cap QN = I$ .Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KOL

Lời giải:

Kẻ 4 tiếp tuyến qua M,N,P,Q chúng cắt nhau tại 4 điểm là A,B,C,D (hình vẽ)
Theo tính chất 1 thì I cũng là giao điểm của AC với BD
Theo tính chất 4 thì $BD \perp OL$
Theo tính chất 3 thì D,B,K thẳng hàng
Suy ra $KI \perp OL$
Tương tự $LI \perp OK$
Vậy ta có *đpcm*



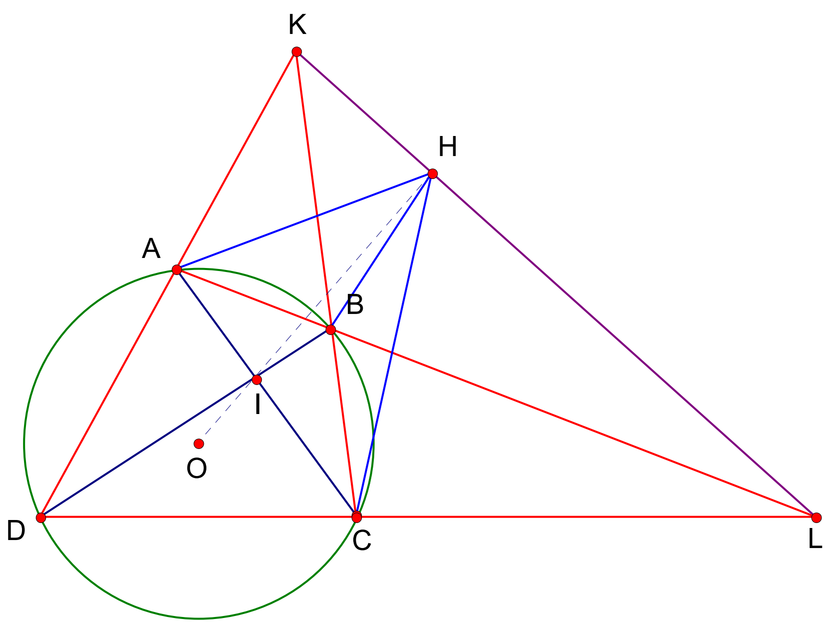
*<u>*Nhận xét:</u>*

Kết quả của bài 1.6 giúp ta có mối liên hệ tuyệt vời với bài 1.2 để được bài toán sau:

Bài toán 1.7:

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Đặt $K = DA \cap CB$, $L = AB \cap DC$, $I = AC \cap BD$. OI cắt KL tại H .Chứng minh rằng OH là phân giác của $\angle AHC$

Lời giải:



Theo bài 1.6 thì I là trực tâm của tam giác KOL suy ra $OI \perp KL$ hay $IH \perp KL$

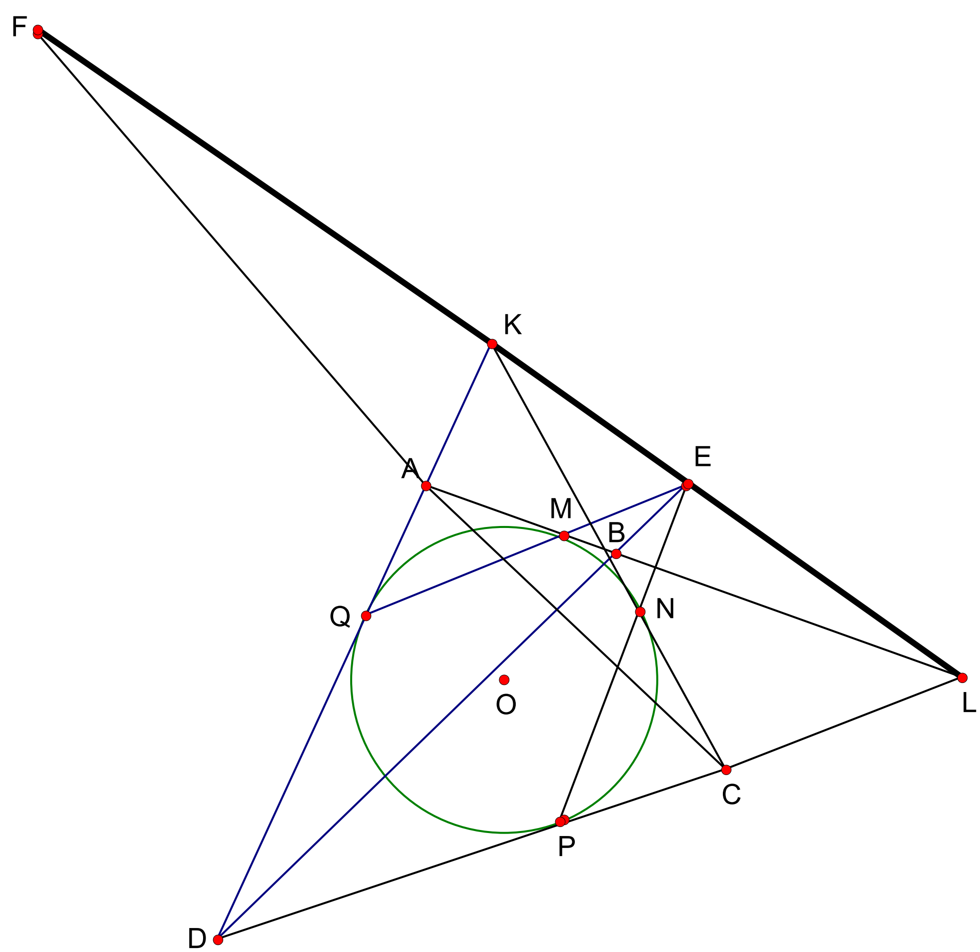
Đến đây bài toán này đã trở thành bài toán 1.2 và vấn đề được giải quyết.

Còn rất nhiều hướng khai thác xung quanh vấn đề này nhưng việc trình bày quá tốn thời gian nên để các bạn tự tìm tòi thêm vậy. Cuối cùng xin nêu lên một vấn đề có tính gợi mở để các bạn xem chơi:

Bài toán 1.8:

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Đặt $K = DA \cap CB$, $L = AB \cap DC$,
Gọi M,N,P,Q lần lượt là tiếp điểm của AB,BC,CD,DA với (O). Đặt $F = PQ \cap MN$, $E = QM \cap PN$. Chứng minh rằng $(F, E, K, L) = -1$

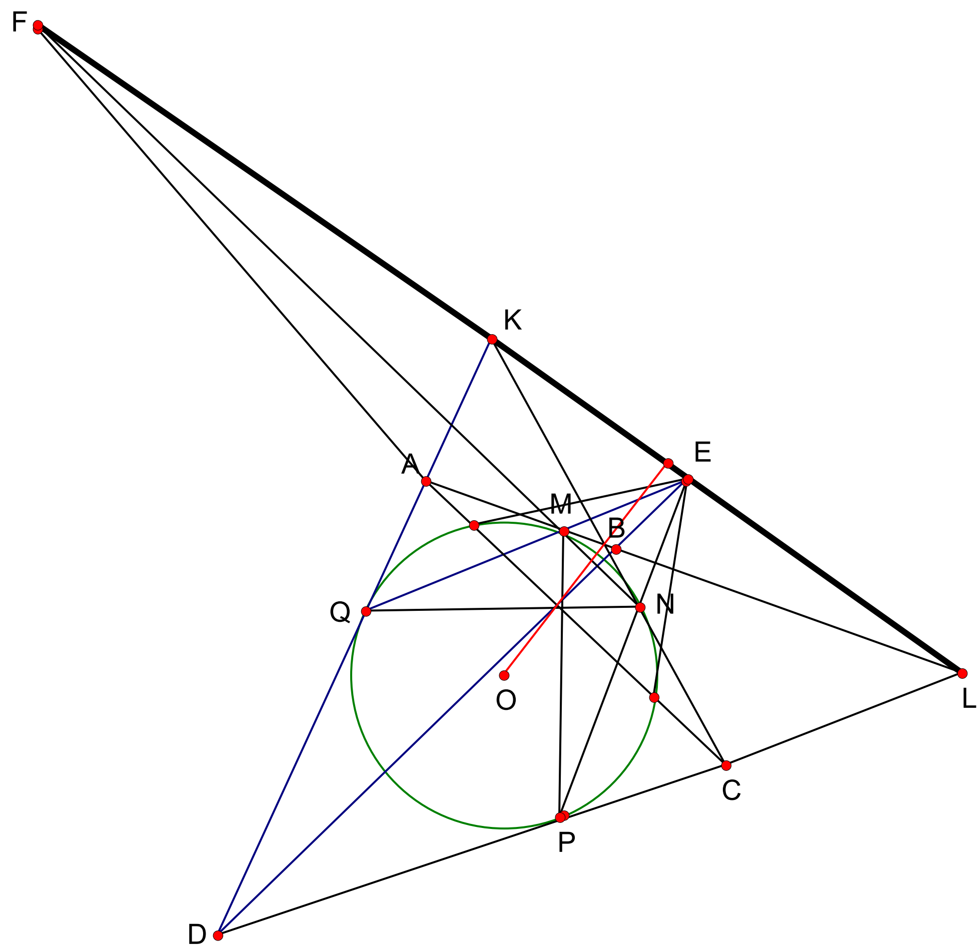
Lời giải:



+Theo bài toán 1.5 thì F,K,E,L thẳng hàng
+Theo tính chất 3 thì CA,MN,PQ đồng quy suy ra $F \in AC$
Do vậy theo bài toán 1(cho tam giác KDL với ba đường đồng quy DE,AL,KC) ta có $(F, E, K, L) = -1$

*Hẳn qua các thí dụ trên các bạn đã thấy thích thú hơn khi nhìn một bài toán hình học dưới con mắt của "hàng điểm điều hòa". Nhờ nó mà ta có thể thông suốt được nhiều vấn đề để cuối cùng ngộ ra…tất cả đều quá rõ ràng và hiển nhiên.

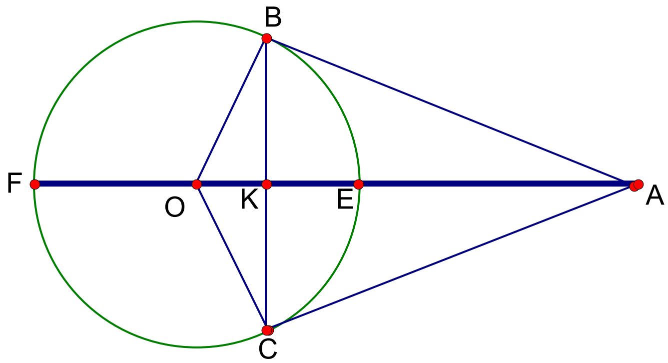
Tất nhiên còn rất nhiều bài toán được sản sinh từ các điều đã nêu ở trên, nhưng chỉ cần một "chùm điều hòa" soi vào là "lộ rõ nguyên hình" nên chúng ta cũng không cần nêu thêm ra đây cho tốn giấy mực làm gì.
Xin mời các bạn nhìn lại hình vẽ dưới đây để tưởng nhớ lại toàn bộ các điều đã học được ở trên, trước khi bước vào một lớp các bài toán khác:



Tiếp theo chương trình chúng ta sẽ khảo sát một dạng toán khác:

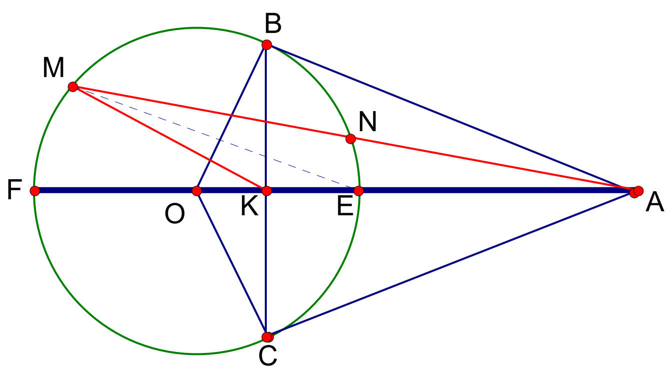
Bài toán 2:
Cho A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC trong đó B,C là hai tiếp điểm . AO cắt cắt đường tròn tại hai điểm E,F và cắt đường thẳng BC tại K. Chứng minh rằng $(A,K,E,F)=-1$

Lời giải:
Ta có $OB^2 = OK.OA$ (hệ thức lượng tam giác vuông) (1)
Mặt khác: $OB^2 = OE^2 = OF^2$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $OE^2 = OF^2 = OK.OA$
Theo nhận xét của định lí 1 suy ra *đpcm*



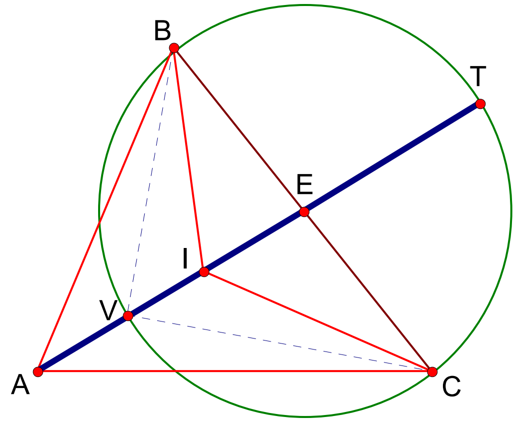
*Một hệ quả thấy ngay từ bài toán này là:

Bài toán 2.1:
Cho A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và cát tuyến AMN bất kì trong đó N nằm giữa A và M. AO cắt đoạn BC và cung nhỏ BC lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng ME là phân giác của $\angle KMA$



Lời giải :
Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với (O) theo bài toán 2 ta có $(A,K,E,F)=-1$
Vì $\angle FME = 90^0$ nên theo nhận xét của định lí 2 ta có *đpcm.*

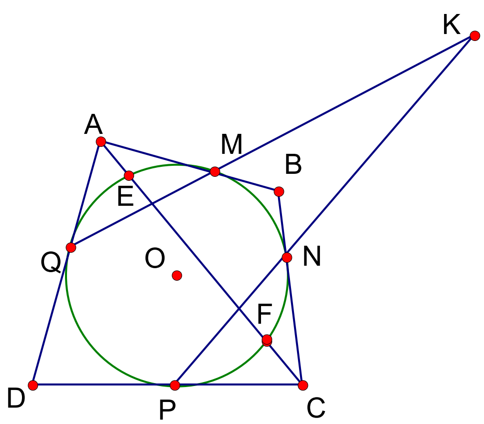
*Tinh tế hơn một chút ta thu được bài toán rất khó sau:
Bài toán 2.2: *(kimluan)*
Cho tam giác ABC bất kì. Lấy một điểm I trong ta giác sao cho $\angle IAB = \angle IBC$ và $\angle IAC = \angle ICB$. Lấy V là một điểm trên AI sao cho $\angle BVC = 90^0$. Chứng minh rằng BV là phân giác của $\angle ABI$ và CV là phân giác của $\angle ACI$.
Lời giải:
Gọi E là giao điểm của AI với BC.
Vì tam giác IBE đồng dạng tam giác EAB(g.g)
Suy ra $EB^2 = EI.EA$ (1)
Tương tự: $EC^2 = EI.EA$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra E là trung điểm của BC
Vẽ đường tròn đường kính BC đường tròn này đi qua V và nhận E làm tâm do đó
$EV^2 = ET^2 = EB^2$ (3)



Từ (1) và (3) suy ra $EV^2 = ET^2 = EI.EA$
Theo nhận xét trong định lí 1 ta có $(A,E,I,T) = -1$
Mà $\angle VBT = 90^0$
Nên theo định lí 2 suy ra BV là phân giác của $\angle ABI$
Lập luận tương tự suy ra CV là phân giác của $\angle ACI$.
Vậy bài toán được giải quyết trọn vẹn.

*<u>*Nhận xét:*</u>*
+Điểm I *được xác định như trên có rất nhiều tính chất kì lạ nhưng nếu sa vào vấn đề này thì e rằng không đi đến mục tiêu của bài viết nên ta tạm gác lại vấn đề này ở đây và hẹn sẽ bàn lại vào một dịp khác,một chương đề khác.*

Bài toán 2.3:
Cho (O) và một điểm K bất kì nằm ngoài (O). Từ K ta kẻ hai tiếp tuyến OE,OF và hai cát tuyến KMQ và KNP bất kì .Chứng minh rằng EF,MN,PQ đồng quy tại một điểm.
Lời giải:

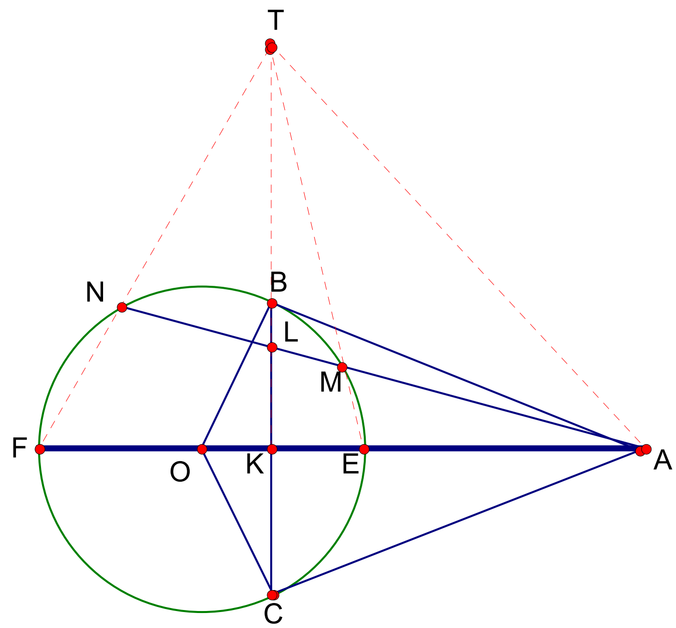


Ta lần lượt kẻ tiếp tuyến qua M,N,P,Q .Các tiếp tuyến này cắt nhau tại 4 điểm A,B,C,D (hình vẽ). Theo tính chất 4 thì A,E,F,C thẳng hàng và theo tính chất 3 thì AC,MN,PQ đồng quy tại một điểm từ đó suy ra EF,MN,PQ đồng quy tại một điểm *(đpcm)*

*Từ bài toán này ta suy được bài toán tổng quát của bài toán 2 như sau:

Bài toán 2.4:

Cho A nằm ngoài đường tròn (O), từ A kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và cát tuyến AMN bất kì trong đó N nằm giữa A và M. Gọi L là giao đểm của MN với BC. Chứng minh rằng $(A,L,M,N)=-1$



Lời giải:

Gọi E,F là giao điểm của AO với (O) trong đó E nằm giữa F và A. Gọi K là giao điểm của EF với BC khi đó theo bài toán 2 thì $(A,K,E,F)=-1$ (1)

Mặt khác theo bài toán 2.3 thì NF,BK,ME đồng quy và gọi điểm đồng quy là T (2)

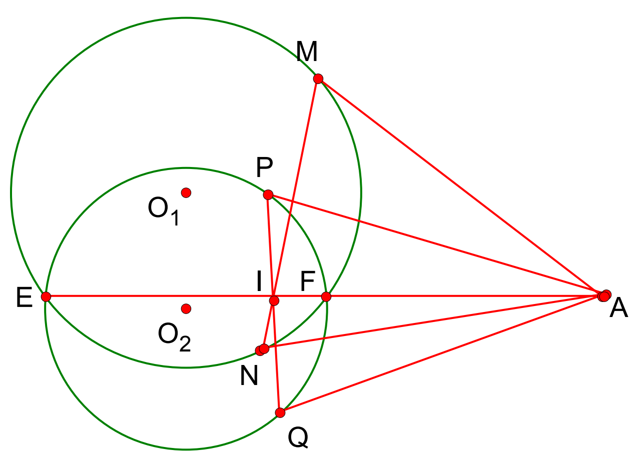
Từ (1) và (2) suy ra $(TA,TK,TE,TF)=-1$

Theo định lí chùm điều hòa suy ra $(A,L,M,N)=-1$ (đpcm)

*<u>*Nhận xét:</u>*

Từ bài toán trên ta suy được bài toán khá hay sau đây:

"Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) có cắt nhau tại hai điểm E và F. Lấy một điểm A bất kì trên tia EF kéo dài. Kẻ hai tiếp tuyến AM,AN với (O_1) và hai tiếp tuyến AP,AQ với (O_2). Chứng minh rằng ba đường thẳng MN,PQ,EF đồng quy tại một điểm."

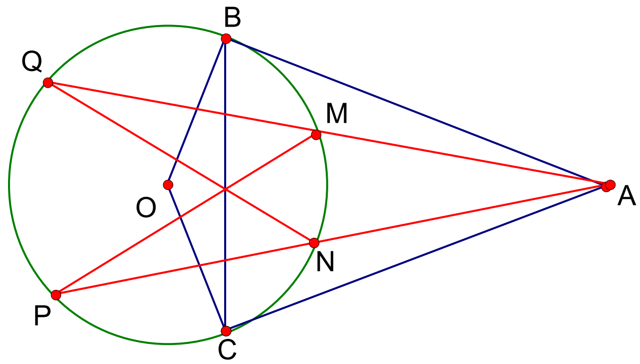


(chứng minh: Gọi I là giao điểm của EF với MN, trong tam giác O_1 ta có $(A,I,F,E)=-1$ tương tự gọi I' là giao điểm của EF với PQ cũng có $(A,I',F,E)=-1$ suy ra I trùng I' suy ra đpcm)

*Chú ý sử dụng tính chất 1 và tính chất 4 cho ta bài toán sau đây:

Bài toán 2.5:

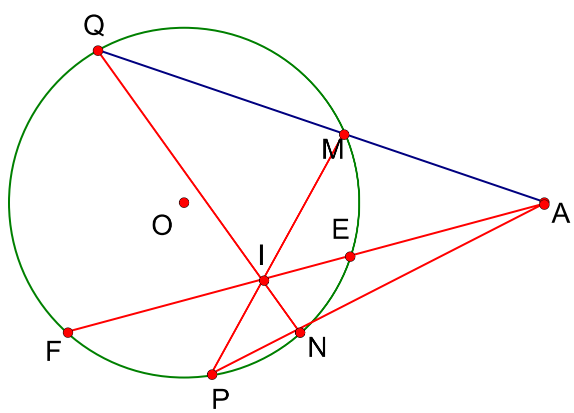
Cho (O) và một điểm A bất kì nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AB,AC và hai cát tuyến AMQ và ANP.Chứng minh rằng BC, QN và PM đồng quy tại một điểm.



Từ bài toán này ta có một cách phát biểu khác cho bài toán 2.4:

Bài toán 2.6:

Cho (O) và một điểm A bất kì nằm ngoài (O). Kẻ hai cát tuyến AMQ và ANP. Gọi I là giao điểm của PM với QM và E,F là giao điểm của AI với (O)
(E nằm giữa A và F). Chứng minh rằng $(A,I,E,F)=-1$

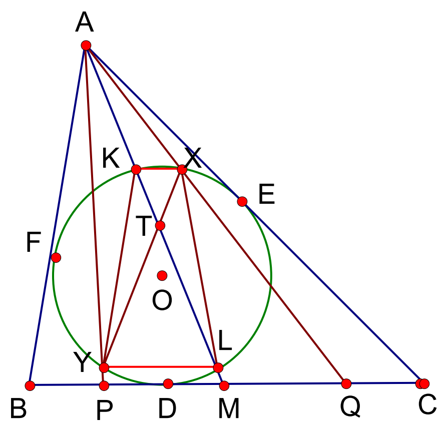


Đây là một mảnh đất khá tươi tốt nên tôi để dành cho các bạn tự cày xới, chúc các bạn sẽ tìm được những viên ngọc "lấp lánh" trong mảnh đất này.

Xét theo một khía cạnh khác!!!
Các vấn đề ở trên chúng ta chỉ thực hiện theo tư tưởng phát triển và tìm kiếm nên có vẻ hơi tài tử. Nếu như ta gặp một bài toán nào đó hoàn toàn xa lạ thì ta phải tiếp cận như thế nào ? Và "hàng điểm điều hòa" liệu trong những trường hợp này có còn là một công cụ hiệu lực ? Đây là một câu hỏi lớn thể hiện một công cụ là mạnh hay yếu!

Để thể hiện "sức mạnh" của công cụ vừa dẫn sau đây tôi sẽ trình bày ba thí dụ khá điển hình cùng cách tấn công vô cùng dũng mãnh do bạn Hophu cung cấp.

Thí dụ 1: *(đề Iran)*
Cho đường tròn nội tiếp (O) của tam giác ABC.Gọi M là trung điểm BC, AM cắt (O) tại hai điểm K và L(K nằm giữa A và L).Qua K kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là X, Qua L kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là Y, AX và AY cắt BC lần lượt tại Q và P. Chứng minh rằng M là trung điểm của PQ.



Lời giải: (Hophu)
**Tư tưởng: Ta thấy các yếu tố trong bài có vẻ quá lượm thượm, nên nếu hấp tấp lao vào "búa" ngay thì lập tức sẽ gặp nhiều khó khăn cũng rất lượm thượm. Do đó trước hết cần xem thử đâu là những yếu tố chính đâu là yếu tố chỉ để làm rối, gạn hết những thằng "giấy dá" làm rối đi , đưa về một bài toán đơn giản hơn rồi mới động thủ.*
Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O)

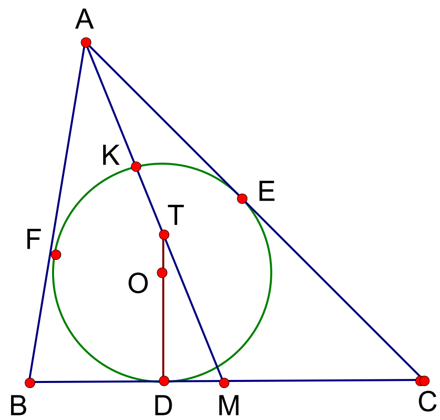
Ta có: $\frac{LY}{MP}=\frac{AL}{AM}$ và $\frac{MQ}{KX}=\frac{AM}{AK}$ Suy ra $\frac{LY}{MP}.\frac{MQ}{KX}=\frac{AL}{AK}$

Do đó để chứng minh M là trung điểm PQ ta cần chứng minh $\frac{LY}{KX}=\frac{AL}{AK}$ (1)

Gọi T là giao điểm của KL với YX ta có $\frac{LY}{KX}=\frac{TL}{TK}$ (2)

Từ (2) suy ra để chứng minh (1) ta cần chứng minh $\frac{TL}{TK}=\frac{AL}{AK}$

Hay cần chứng minh $(A,T,K,L)=-1$
Chú ý KXLY là hình thang cân nên dễ thấy T nằm trên OD đến đây vấn đề lộ ra rất rõ:
**Bình luận: các điểm P,Q,X,Y chỉ là các điểm để làm rối, thực chất cái lõi của bài toán là bài toán sau:*
" Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O). Gọi M là trung điểm BC, AM cắt (O) tại K và L (K nằm giữa A và L). OD cắt AM tại T. Chứng minh rằng $(A,T,K,L)=-1$ " (*)



Vấn đề đến đây lại mở ra một tương lai mới vì theo bài toán 2.4 nếu ta gọi T' là giao điểm giữa EF với AM thì $(A,T',K,M) = -1$

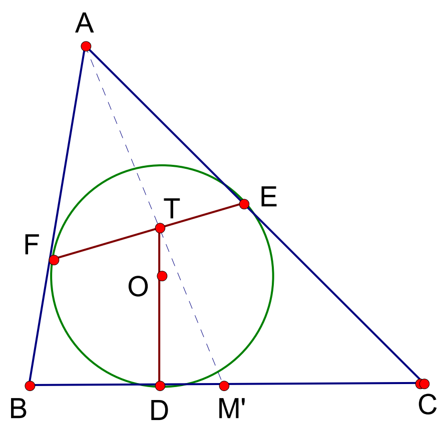
Vậy để chứng minh bài toán (*) ta chỉ cần chứng minh $T \equiv T'$ hay cần chứng minh T nằm trên EF hay cần chứng minh 3 đường thẳng AM,EF,OD đồng quy (3)

Gọi L là giao điểm của OD với EF và M' là giao điểm của AL với BC.

Để chứng minh (3) ta cần chứng minh $L \equiv T$ hay cần chứng minh $M' \equiv M$

Vậy ta quy về chứng minh bài toán sau:

" Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O). OD cắt EF tại L.AL cắt BC tại M'. Chứng minh rằng M' là trung điểm của BC" (**)



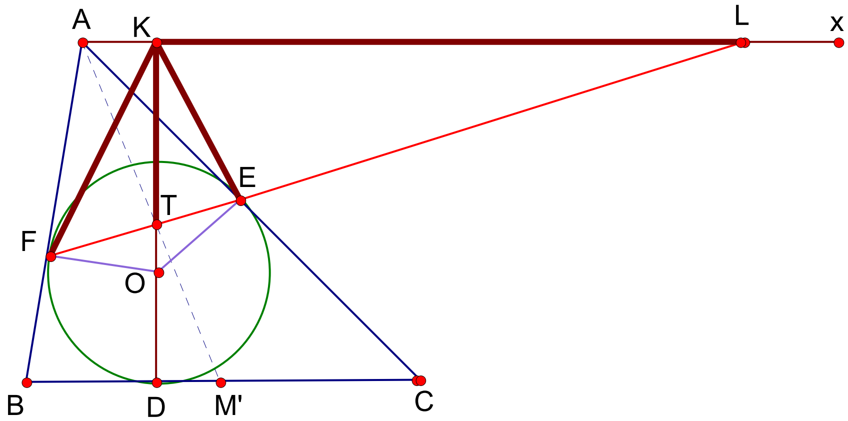
**Bình luận: Bước quy từ bài toán (*) thành bài toán (**) gọi là bước "đảo giả thiết" nghĩa là thay vì ta phải chứng minh một yếu tố nào đó mà ta cảm thấy khó chịu như chứng minh thẳng hàng chẳng hạn thì ta có thể cho nó thẳng hàng luôn, bù lại ta phải hi sinh một giả thiết đã có từ trước và nhiệm vụ phải chứng minh giả thiết mới hi sinh có thể được suy ra từ những điều đã có (các bạn có thể so sánh bài toán (*) với bài toán(**) để thấy rõ điều này) Việc đảo giả thiết này tuy đơn giản nhưng đôi khi lại đem đến những hiệu quả bất ngờ vì có những bài mà bài toán gốc rất khó chứng minh trong khi chỉ cần đảo lại một phát thì vấn đề lại rõ như ban ngày!!!*

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán (**)

Kẻ tia Ax song song với BC (về phía C), FE cắt Ax tại L

Theo hệ quả 2 (phần lí thuyết chùm điều hòa) suy ra để chứng minh M' là trung điểm BC ta cần chứng minh $(AB,AC,AM',AL) = -1$ hay cần chứng minh $(AF,AE,AT,AL) = -1$

Hay cần chứng minh $(F,E,T,L) = -1$ (4)

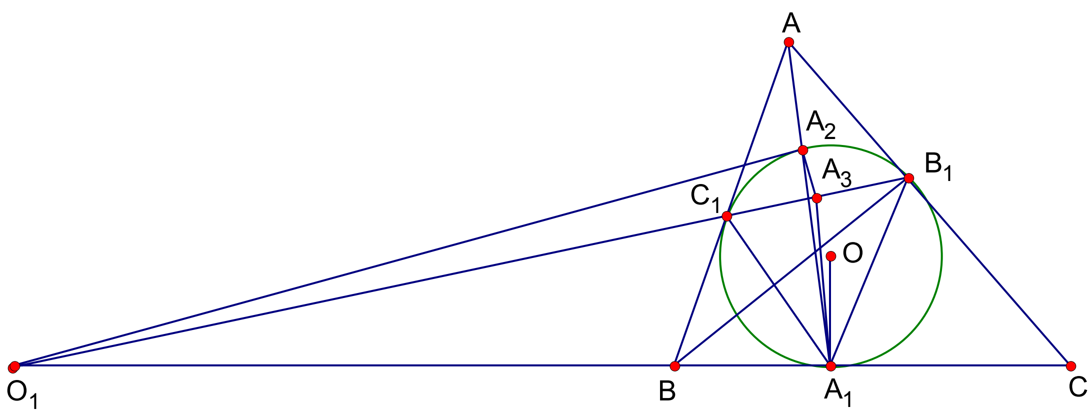


Kẻ DT vuông góc AL và cắt AL tại K dễ chứng tỏ 5 điểm A,K,E,O,F cùng nằm trên một đường tròn mà OF=OE nên suy ra $\angle OKF = \angle OKE$ (5)
Theo cách vẽ điểm K thì ta có $\angle TKL = 90^0$ (6)
Kết hợp (5),(6) và theo hệ quả 1 (phần lí thuyết chùm điều hòa) suy ra
$(KF, KE, KT, KL) = -1$
Suy ra (4) đúng suy ra *đpcm*

Thí dụ 2:

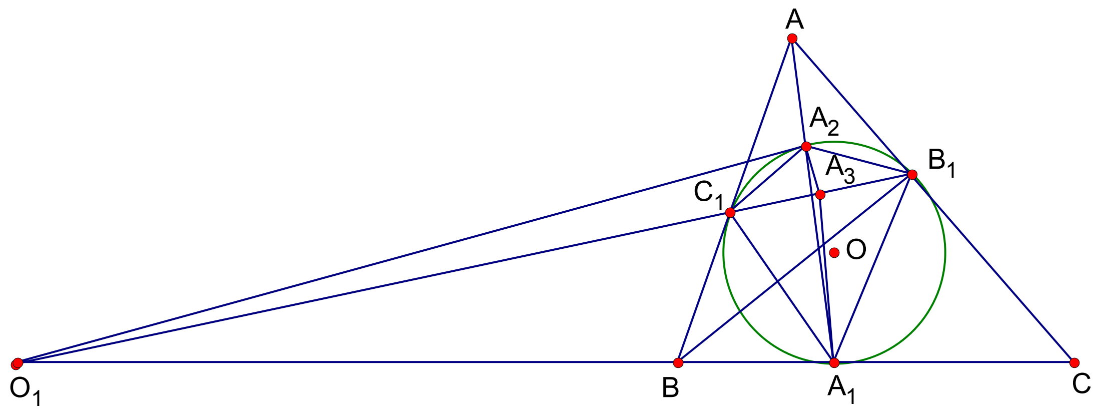
Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O), A_2 là giao điểm thứ hai của AA_1 với (O) và B_2 là giao điểm thứ hai của BB_1 với (O) . Phân giác của $\angle B_1A_1C_1$ cắt B_1C_1 tại A_3 , phân giác của $\angle A_1B_1C_1$ cắt C_1A_1 tại B_3. Chứng minh rằng $P\_\{O/(A_1A_2A_3)\} = P\_\{O/(B_1B_2B_3)\}$

Lời gải: (Hophu)



Kẻ B_1C_1 cắt BC tại O_1. Vẽ hình chính xác ta thấy có vẻ như O_1 là tâm của $A_1A_2A_3$. Ta chưa biết điều này đúng hay sai nhưng cứ cho là nó đúng xem sao. Khi đó OA_1 là tiếp tuyến của $(A_1A_2A_3)$ (vì $OA_1 \perp O_1A_1$) nên $P\_\{O/(A_1A_2A_3)\} = OA_1^2$ .Lập luận tương tự ta có $P\_\{O/(B_1B_2B_3)\} = OB_1^2$ chú ý $OA_1 = OB_1$ nên ta có đpcm.

Vậy dự đoán phía trên của ta là đúng và bây giờ ta chỉ cần chứng minh O_1 là tâm của $A_1A_2A_3$ nữa là xong. Vậy ta quy về chứng minh bài toán đơn giản hơn như sau:
"Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tiếp điểm của BC,CA,AB với (O), A_2 là giao điểm thứ hai của AA_1 với (O). Phân giác của $\angle B_1A_1C_1$ cắt B_1C_1 tại A_3 gọi O_1 là giao điểm của B_1C_1 với BC. Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$".



Theo "định lí về tứ giác điều hòa" ta có $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A_2B_1}{A_2C_1}$ (1)

Mà A_1A_3 là phân giác của $\angle B_1A_1C_1$ suy ra $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A_3B_1}{A_3C_1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{A_2B_1}{A_2C_1} = \dfrac{A_3B_1}{A_3C_1}$ suy ra A_2A_3 là phân giác của $\angle B_1A_2C_1$

Tất nhiên để chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ ta chỉ cần chứng minh $OA_2 = OA_3$ tức cần chứng minh $\angle O_1A_2A_3 = \angle O_1A_3A_2$

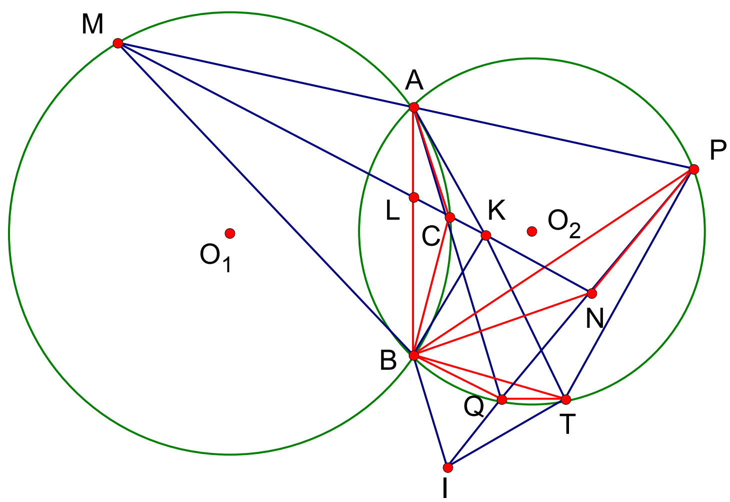
Thật vậy: $\angle O_1A_2A_3 = \angle O_1A_2C_1 + \angle C_1A_2A_3 = \angle A_2B_1C_1 + \angle B_1A_2A_3 = \angle A_2A_3C_1$ *(đpcm)*

Thí dụ 3: *(chọn đội tuyển Việt Nam)*
Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A và B. Hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại K. Lấy M bất kì trên (O_1). MK cắt (O_1) tại điểm thứ hai là C. Gọi P và Q lần lượt là MA,MB với (O_2)
a)Chứng minh rằng MC chia đôi đoạn thẳng PQ
b)Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải: (Hophu)
a) Gọi N là giao điểm của MK với PQ ta cần chứng minh NP=NQ (1)
Gọi C và L lần lượt là giao điểm của MK với (O_1) và MK với đoạn thẳng AB.
Ta có ACBM là tứ giác điều hòa (định lí tứ giác điều hòa) do đó: $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{MA}{MB}$ (2)
Mặt khác $\angle BPQ = \angle BAQ = \angle BAC = \angle BMC$ suy ra MPNB là tứ giác nội tiếp

suy ra tam giác ACB và tam giác PNB đồng dạng (g.g) suy ra $\frac{NP}{NB} = \frac{CA}{CB}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{NP}{NB} = \frac{MA}{MB}$



Do vậy để chứng minh (1) ta cần chứng minh $\frac{NQ}{NB} = \frac{MA}{MB}$

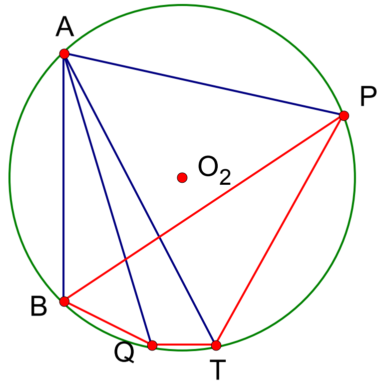
Điều này đúng vì hai tam giác MAB và tam giác NQB đồng dạng (g.g)
Vậy câu a) được giải quyết.

b) Gọi T là giao điểm của AK với (O_2),hai tiếp tuyến tại T và B của (O_2) cắt nhau tại I rõ ràng I là điểm cố định. Sau nhiều lần vẽ hình chính xác ta thấy PQ luôn đi qua điểm I nên dự đoán I chính là điểm cố định mà PQ luôn đi qua và ta sẽ chứng minh điều này.
Để chứng minh PQ luôn đi qua I ta chỉ cần chứng minh PBQT là tứ giác điều hòa là xong (theo nhận xét trong định lí về tứ giác điều hòa) (*)

*Để chứng minh (*) bạn Hophu cho biết ban đầu đã suy nghĩ như sau:
Theo bài toán 2.4 ta có (K,L,C,M) $= -1$ suy ra $(AK, AL, AC, AM) = -1$ hay $(AK, AL, AC, AP) = -1$ hay $(AB, AT, AQ, AP) = -1$
Ta thấy các điểm B,Q,T,P gần như chỉ có ý nghĩa để $(AB, AT, AQ, AP) = -1$ và nhiệm vụ của ta là cần chứng minh BQTB là tứ giác điều hòa. Vậy phải chăng có bài toán sau:

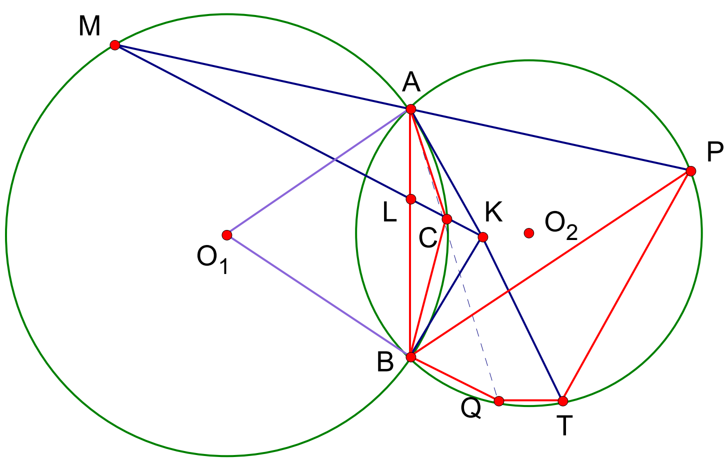
Bài toán lạ:
"Cho đường tròn (O_2) và một điểm A nằm trên đường tròn. Chùm điều hòa (Ax,Ay,Az,At) $= -1$ *cắt (O_2) tại 4 điểm lần lượt là B,T,Q,P. Cmr:* $(B, T, Q, P) = -1$ *"*

Một bài toán cực hay (là cầu nối tuyệt vời giữa chùm điều hòa và tứ giác điều hòa) và nếu nó đúng thì xem như thí dụ 3 được giải quyết.
Theo kiến thức của chúng tôi thì đây là một bài toán lạ (nhưng lạ thật (đối với các bạn) hay không thì chưa biết) do đó trong thâm tâm chúng tôi vẫn nảy mối nghi ngờ là bài toán này đúng hay là sai ?



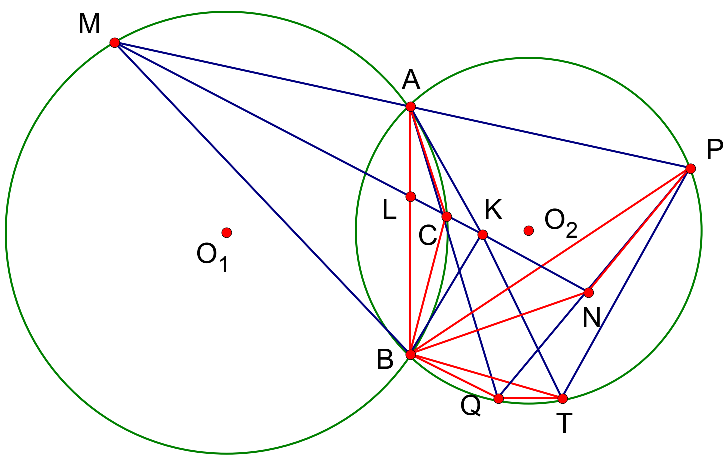
(hình vẽ bài toán lạ)

Tuy nhiên việc chứng minh trực tiếp cho "bài toán lạ" là tương đối rợn (sợ còn khó hơn cả thí dụ 3) do chỉ để kiểm tra "bài toán lạ " này là đúng hay sai thì tạm thời ta chấp nhận ví dụ 3 đã được giải quyết bằng một cách nào đó (vì đây là đề của một bài toán đã có lời giải nên không thể sai được!) . Việc cho ví dụ 3 đúng là một công cụ đắc lực để chứng tỏ bài toán lạ là đúng hay là sai.
Giả sử ví dụ 3 đã được chứng minh, ta sẽ chứng minh bài toán lạ là đúng (sử dụng "hình vẽ bài toán lạ" ở trên).
Gọi K là giao điểm của đường trung trực AB với AT
Đường thẳng vuông góc với AK(tại A) và đường thẳng vuông góc với BK(tại B) cắt nhau tại O_1. Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính O_1A ta kí hiệu đường tròn này là (O_1)
Dễ thấy (O_1) đi qua B và KA,KB là hai tiếp tuyến của K tới (O_1). Giả sử AP cắt (O_1) tai M.
MK cắt AB tại L và cắt (O_1) tại C (khác M)
Như vậy ta được hình vẽ sau khi mới được phát họa lại từ "bài toán lạ" là:



Vì $(K,L,C,M)=-1$ suy ra $(AK,AL,AC,AM)=-1$ hay $(AK,AL,AC,AP)=-1$
Hay $(AB,AT,AC,AP)=-1$ mà theo giả thiết ta có $(AB,AT,AQ,AP)=-1$
Suy ra A,C,Q thẳng hàng.
Đến đây ta được các yếu tố y chang ví dụ 3 do đó nếu thí dụ 3 đúng thì BQTP là tứ giác điều hòa và bài toán được chứng minh.

*<u>*Nhận xét:</u> Qua cách xây dựng trên các bạn có thể dễ dàng nhận ra kết quả ở thí dụ 3(câu b) với bài toán lạ là tương đương với nhau. Do đó nếu ta chứng minh được thẳng cho" bài toán lạ" thì câu b) thí dụ 3 xem như được giải quyết ngược lại nếu bằng một cách nào đó ta chứng minh được thí dụ 3 là đúng thì bài toán lạ cũng đúng luôn. Rất may mắn ta có một cách rất đơn giản để giải quyết thí dụ 3 (câu b) như sau:*



Để chứng minh BQTP là tứ giác điều hòa tức là ta cần chứng minh

$$\frac{QB}{QT} = \frac{PB}{PT} \quad (4)$$

Từ các kết quả đã có ở câu a) các ban có thể dễ dàng chứng minh:

Tam giác BPT đồng dạng tam giác BMA (g.g) suy ra $\frac{PB}{PT} = \frac{MB}{MA}$(5)

Tam giác BQT đồng dạng tam giác BCA (g.g) suy ra $\frac{QB}{QT} = \frac{CB}{CA}$(6)

Mặt khác vì CAMB là tứ giác điều hòa nên $\frac{CB}{CA} = \frac{MB}{MA}$(7)

Từ (5),(6) và (7) suy ra (4) đúng.

Vậy câu b được chứng minh dẫn đến bài toán lạ cũng được giải quyết.

*<u>*Nhận xét:</u>*

Thực ra mà nói thí dụ 3 có được chứng minh hay không thì cũng không có gì quá quan trọng vì nó chỉ thể hiện một tính chất hình học tầm thường. Tuy nhiên kết quả từ việc giải nó đã cho ta một viên ngọc vô giá là" bài toán lạ". Nếu bạn nào tìm được một cách chứng minh nào khác cho "bài toán lạ" thì xin post lời giải đầy đủ trong forum để mọi người cùng tham khảo.

**Chú thích: bây giờ gọi đây là "bài toán lạ" cũng không còn đúng nữa bởi vấn đề này hiện nay đối với ta cũng đâu còn gì là lạ!!!*

Chương đề này xin khép lại ở đây.

……

Các bạn thân mến hẳn qua các thí dụ trên các bạn đã phần nào thấy được vẻ đẹp của sự *điều hòa* trong hình học. Trong cuộc sống cũng vậy mỗi chúng ta cũng cần tạo cho mình một sự *điều hòa* cần thiết bởi nó giúp ta khỏe mạnh hơn và yêu đời hơn…

Chúc tất cả mọi người đều được một cuộc sống *điều hòa* như vậy.