BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG
QUA CÁCH GIẢI BẰNG GÓC ĐỊNH HƯỚNG

NGUYỄN LÁI

Cái khó, không thấy được giải nó bằng góc định hướng.
Khi đã thấy , ta thấy toán học sao mà hấp dẫn lạ!

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Góc định hướng của hai vectơ chung gốc.

Kí hiệu **:** $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$**.** $\overrightarrow{OA}$: là vectơ đầu; $\overrightarrow{OB}$: là vectơ cuối.

sd$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\alpha+k2\pi$ **;** hoặc sd$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\alpha\ (\bmod 2\pi)$**.** Trong đó goc AOB = α $\left(0\le\alpha\le 2\pi\right)$ là góc không định hướng.

2. Góc định hướng của hai vectơ không chung gốc.

Cho hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ (đều khác vectơ không). Lấy điểm O dựng $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{CD}$

Ta có $sd\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=sd\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=\alpha+k2\pi$

3. Góc định hướng của hai đường thẳng.

Kí hiệu: (a, b) . a là đường thẳng đầu; b là đường thẳng cuối.

sd(a, b) = $\alpha+k\pi$,hay $sd(a,b)=$ $\alpha\ (\bmod \pi)$. trong đó α là góc không tù của góc hai đường thẳng a và b không hướng.

II. CÁC TÍNH CHẤT.

1.(AB, CD) = $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$; .(AB, CD) $\equiv(AB,DC)\ (\bmod \pi)$;.(AB, CD) $\equiv(BA,CD)\ (\bmod \pi)$

2.Hai đường thẳng a , b trùng nhau hoặc song song khi và chỉ khi $(a,b)\equiv 0\ (\bmod \pi)$

3.Hai đường thẳng a , b vuông góc nhau khi và chỉ khi $(a,b)\equiv\frac{\pi}{2}\ (\bmod \pi)$

4.Góc (a, b) ≡ - (b, a)$(\bmod \pi)$

5.Hệ thức Sale : (a, b) = (a, c) + (c; b).$(\bmod \pi)$.

6. Hiệu (a, b) ≡ (c, b) – (c, a).

III. ỨNG DỤNG

+Ba điểm thẳng hàng.

-Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi (AB,AC) ≡ 0 $(\bmod \pi)$.

-Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi (AB,AM) ≡(AC,AM)$(\bmod \pi)$ (M tùy ý).

+Hai đường thẳng vuông góc.

Hai đường thẳng AB, CD vuông góc khi và chỉ khi (AB,AC) ≡ $\frac{\pi}{2}(\bmod \pi)$.

+ **Hai điểm đối xứng qua trục.**

Hai điểm A,A’ đối xứng qua trục BC khi và chỉ khi (AB, AC) ≡ (A’C, A’B) $(\bmod \pi)$.

+ **Góc nội tiếp và góc ở tâm** : M, A, B ở trên đường tròn (O):

$(MA,MB)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv(BA,BT)\ (\bmod \pi)$, trong đó BT là tiếp tuyến của (O) tại B.

+Bốn điểm cùng nằm trên đường tròn.

:

-Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn khi và chỉ khi (AB, AD) $\equiv (CB,CD)$ (mod π)

-*Hệ quả*: Tập hợp điểm M nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC thỏa mãn:
(MA, MB) $\equiv (CA,CB)$ (mod π) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

+Góc của hai đường thẳng có các cạnh đôi một vuông góc.

Ta có $AB \perp EF; CD \perp HG$ khi và chỉ khi (AB,CD) $\equiv$ (EF; HG)(mod π).

+ **Tập hợp điểm**

- $\{M/(MA,MB) \equiv \alpha(\mathrm{mod}\,\pi)\}$ = cung tròn chứa góc α qua A, B.
- $\{M/(MA,MB) \equiv -\alpha(\mathrm{mod}\,\pi)\}$ = cung tròn không chứa góc α qua A, B.

IV. BÀI TẬP MINH HỌA

A.Phương pháp phứng minh hai đường thẳng song song ,ba điểm thẳng hàng.

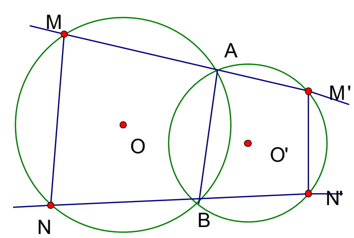
+ Hai đường thẳng a, b cùng phương khi và chỉ khi (a, b) $\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi)$.

+ **H**ai đường thẳng a, b cùng phương khi và chỉ khi (a;c) $\equiv$ (b, c)(mod π), đường thẳng c tùy ý

+ Ba điểm A, B,C thẳng hàng khi và chỉ khi (AB,AC) $\equiv 0$ $(\mathrm{mod}\,\pi)$.

+ Ba điểm A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi (AB,EF) $\equiv$ (AC,EF)(mod π), đường EF tùy ý.

Bài 1. C*ho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Hai cát tuyến bất kì D, D' lần lượt qua A, B cắt (O) và (O') lần lượt tại M, M' và N, N'.Chứng tỏ MN//M'N'.*



HD. Ta có (MN,MA) $\equiv$ (BN,BA) $(\mathrm{mod}\,\pi)$. (1) . vì (AMNB) nội tiếp

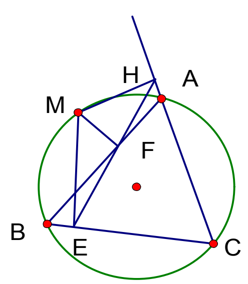
(M'A,M'N',) $\equiv$ (BA,BN') $(\mathrm{mod}\,\pi)$. vì (AM'N'B) nội tiếp

$\Leftrightarrow$ Hay (MA,M'N') $\equiv$ (BA,BN) $(\mathrm{mod}\,\pi)$. (2)

Cộng (1) và (2) theo Sale ta có: (MN,M'N') = 0 $\Rightarrow$ MN//M'N'

Bài 2. *(Đường thẳng Simson)* **.**

Để điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi các hình chiếu của M lần lượt xuống ba cạnh tam giác ABC thẳng hàng .



HD. Giả sử E, F ,H lần lượt là hình chiếu của M xuống cạnh BC, AC, AB. Ta có

E,F,H thẳng hàng $\Leftrightarrow (HE,HM) = (HF,HM)(\mathrm{mod}\,\pi)$

$\Leftrightarrow (CE,CM) = (HF,HM)(\mathrm{mod}(\pi)$. (vì HMEC nội tiếp)

$\Leftrightarrow (CB,CM) = (AB,AM)(\mathrm{mod}\,\pi)$ (HMFA nội tiếp)

$\Leftrightarrow$ AMBC nội tiếp

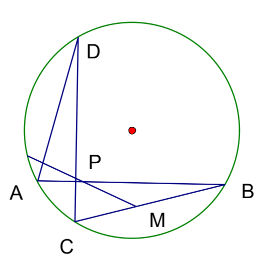
$\Leftrightarrow$ $M \in$ Vòng ngoại tiếp tam giác ABC.

B. Phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

+Hai đường thẳng AB, CD vuông góc khi và chỉ khi (AB,AC) $\equiv$ $\frac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,\pi)$.

$$+\begin{cases} a \perp b \\ (a,c) \equiv (d,c)(\mathrm{mod}\,\pi) \end{cases} \Leftrightarrow d \perp b.$$

Bài 1. *Hai dây cung AB, CD của đường tròn (O) vuông góc nhau tại P. Chứng minh trung tuyến PM của tam giác BPC là đường cao của tam giác PAD.*



HD.Ta có (PM,AD) = (PM, PC)+(PC, AD) = (PM, PC)+(DC, DA).

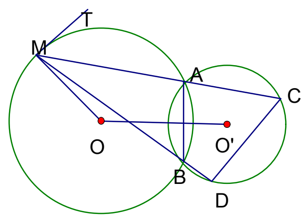
Vì tam giác PMC cân tại M nên (PM, PC) = (CP, CB) = (CD, CB)= (AD, AB).

thay vào (1) ta có (PM, AD) =(AD, AB)+(DC, DA) = (DC, DA) +(DA, AB)

$= (DC,AB) \equiv \dfrac{\pi}{2} (\text{mod } \pi)$

Suy ra $(PM, AB) \equiv \dfrac{\pi}{2} (\text{mod } \pi) \Rightarrow PM \perp AD$.

Bài 2. C*ho hai vòng tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Một điểm M lưu động trên (O) . MA và MB cắt vòng (O') tại C và D. Chứng minh* $MO \perp CD$.



HD. Tại M kẽ tiếp tuyến vòng (O)

Ta có (MA, MT) $\equiv$(BA, BM) $(\text{mod } \pi)$ (1)

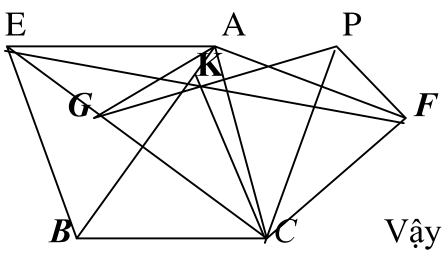
Xét vòng (O') ta có (BA, BD)$\equiv$(CA, CD)$(\text{mod } \pi)$ (2)

hay (BA, BM)$\equiv$ (MA, CD)$(\text{mod } \pi)$ (3)

Từ (1) ,(2) , (3) ta có (MA, MT)$\equiv$(MA, CD)$(\text{mod } \pi) \Rightarrow CD // MT$

Mà $MT \perp MO \Rightarrow MO \perp CD$

Bài 3. *Cho tam giác ABC. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác đều ABE, ACF. Gọi G là tâm tam giác ABE và K là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh rằng tam giác KGC vuông và có một góc* 60^0.



Lời giải .Dựng điểm P sao cho EGFP là hình bình hành

Ta chứng minh tam giác CGP cân tại C.

*X*ét hai tam giác GAC và CPF có EG = PF$\Rightarrow AG = PF$ (1).

CA = CF (2).

Mặt khác (FP,FC) $\equiv$ (GE,FC)$(\text{mod } \pi)$.

Vậy (FP,FC) =(GE,GA)+(GA,CA) +(CA,FC)$(\text{mod } \pi)$

Chọn (AB,AC) là góc dương ,ta có

Ta có (GE,GA)$= -\dfrac{2\pi}{3}$; (CA,FC) $\equiv$(CA,CF)$(\text{mod } \pi) = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy (FP,FC) $\equiv (-\dfrac{2\pi}{3}$ +(GA,CA) $+\dfrac{\pi}{3})(\text{mod } \pi)$=(AG,AC)$(\text{mod } \pi) \Rightarrow \angle GAC = \angle PFC$ (3).

Từ (1) ,(2) , (3) $\Rightarrow \Delta GAC = \Delta CPF \Rightarrow CG = CP$,nên tam giác cân GCP có trung tuyến CK cũng vừa là đường cao ,hay tam giác KGC vuông tại K,

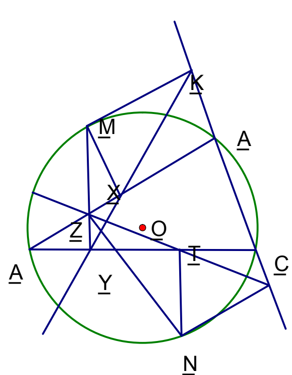
Mặt khác ta có $\widehat{GCA} = \widehat{PCF} \Rightarrow \widehat{GCA} + \widehat{ACP} = \widehat{PCF} + \widehat{ACP}$, hay $\widehat{GCP} = \widehat{ACF} = 60^0$

Do đó $\widehat{KGB} = 60^0$.

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M N là một đường kính của (O). Chứng minh rằng các đường thẳng Símson tam giác ABC ứng với hai điểm M, N thì vuông góc nhau.*

HD. Gọi X, Y là các hình chiếu của M trên AB , BC theo thứ tự và Z, T là các hình chiếu củ N trên AB, BC theo thứ tự . Ta cần chứng minh $XY \perp ZT$.

Thật vậy ta thấy bộ bốn điểm M, B, X,Y và N, B,Z,T đồng viên .



Ta có (XY,ZT) = (XY,MY) + (MY, NT) $(\text{mod } \pi)$.

$\Rightarrow (XY,ZT) = (XB,MB) + 0 + (NB,ZB)(\text{mod } \pi)$

$\Rightarrow (XY,ZT) \equiv (NB,MB)(\text{mod } \pi)$ *(vì XB,ZB trùng nhau)*

$\Rightarrow (XY,ZT) = \dfrac{\pi}{2}(\text{mod } \pi)$ *(Vì MN là đường kính của (O)).*

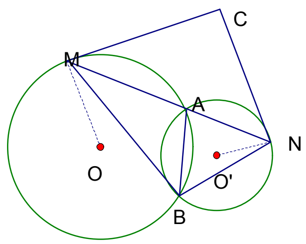
Suy ra $XY \perp ZT$

C. Phương pháp chứng minh các điểm đồng viên(cùng nằm trên một đường tròn).

-Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường tròn khi và chỉ khi (AB, AD) $\equiv (CB,CD)$ (mod π)

-*Hệ quả:* Tập hợp điểm M nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC thỏa mãn (MA, MB) $\equiv (CA,CB)$ (mod π) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 1.*Cho hai đường tròn cắt nhau tại A và B.Kẽ một cát tuyến MAN* **.***Các tiếp tuyến tại M và N với đường tròn cắt nhau tại C, Chứng minh rằng bốn điểm M, N, C, B cùng nằm trên một đường tròn.*



HD.Vì MC là tiếp tuyến nên ta có (BM, BA)$\equiv$(MC, MA)(mod π) (1)

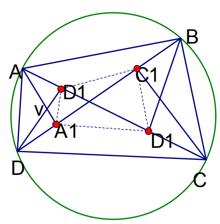
Vì NC là tiếp tuyến nên (BA, BN)$\equiv$(NA, NC)(mod π) (2)

*C*ộng (1) và (2) ta có (BM, BN)=(MC, NC)=(CM, CN))(mod π)

Vậy bốn điểm C, B, M, N cùng nằm trên đường tròn.

Bài 2. C*ho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn .* A_1, C_1, B_1, D_1 *là hình chiếu A, C và B, D xuống BD, AC . Chứng minh* $A_1B_1C_1D_1$ *là tứ giác nội tiếp.*

HD. Vì ABA_1B_1 nội tiếp nên ta có $(B_1A_1, B_1A) \equiv (BA_1, BA)$ (mod π) .(1)



Vì ABCD nội tiếp nên (BD,BA)$\equiv$(CD,CA) (mod π).

Hay $(BA_1, BA) \equiv$(CD,CA)(mod π). (2)

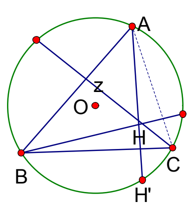
Vì CDD_1C_1 nội tiếp nên $(CD, CD_1) \equiv (C_1D, C_1D_1)$ (mod π).

hay (CD,CA)$\equiv$ (C_1A_1, C_1D_1) (mod π). (3).

Cộng (1) ,(2) ,(3) ta có $(B_1A_1, B_1A) = (C_1A_1, C_1D_1)$ (mod π).

$\Rightarrow A_1B_1C_1D_1$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 3. Đ*iểm đối xứng của trực tâm H qua ba cạnh của một tam giác ABC thì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*



HD. Gọi H’ là điểm đối xứng của H qua BC

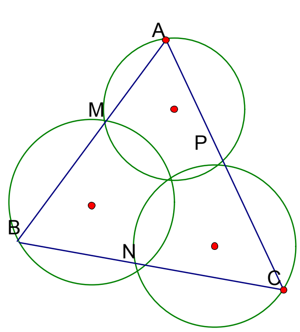
Ta có(AC,AB) $\equiv$ (HB,HC)$(\text{mod}\,\pi)$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc

(HB,HC) $\equiv$ (H’C,H’B) $(\text{mod}\,\pi)$ (Hai góc đối xứng qua BC)

$\Rightarrow$(AC,AB) $\equiv$ (H’C,H’B) $(\text{mod}\,\pi)$ $\Leftrightarrow$ H’ABC nội tiếp hay $H' \in$ vòng ABC

Hệ quả. B*a vòng đối xứng với vòng ngoại tiếp qua ba cạnh tam giác thì qua trực tâm H*

Bài 4. *Cho M, N, P lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC. Chứng tỏ rằng ba đường tròn (AMP), (BMN);(CNP) có một điểm chung.*



HD.Giả sử hai vòng *(BMN)* và *(CNP) cắt nhau tại H*

ta có BMHN nội tiếp nên : (BM;BN) $\equiv$ (HM,HN) $(\text{mod}\,\pi)$ (1)

ta có CNHP nội tiếp nên : (CN,CP) $\equiv$ ((HN,HP)$(\text{mod}\,\pi)$

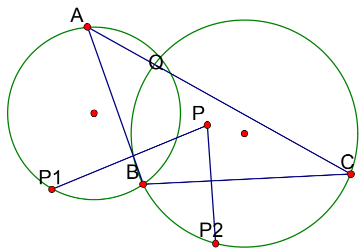
hay (BN,CP) $\equiv$ ((HN,HP)$(\text{mod}\,\pi)$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có (BM,CP) = (HM,HP) $(\text{mod}\,\pi)\Rightarrow$ AMHP nôi tiếp .

Hay vòng (AMP) đi qua H.$\Rightarrow$điều phải chứng minh.

Bài 5. *Cho tam giác ABC và một điểm P bất kỉ trong mặt phẳng của tam giác. Chứng minh rằng các vòng tròn đối xứng của ba vòng tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PBC, PCA qua các cạnh AB, BC, CA có một điểm chung.*

HD. Gọi P_1, P_2, P_3 là điểm đối xứng của P qua AB, BC, CA và Q là giao điểm thứ hai của hai vòng (P_1AB), (P_2BC).



Vì tính chất đối xứng nên ta có $(P_1A, P_1B) \equiv -(PA, PB) (\bmod \pi)$.(1)

$(P_2B, P_2C) \equiv -(PB, PC) (\bmod \pi)$. (2)

$(P_3C, P_3A) \equiv -(PC, PA) (\bmod \pi)$.(3)

Các điểm P_1, A ,B , Q đồng viên ,ta có $(QA, QB) \equiv (P_1A, P_1B) (\bmod \pi)$.(4)

Các điểm P_2, C ,B , Q đồng viên , ta có $(QB, QC) \equiv (P_2B, P_2C) (\bmod \pi)$.(5)

Cộng (4) và (5) ta có $(QA, QC) = (P_1A, P_1B) + (P_2B, P_2C)$

$= - (PA, PB) - (PB,PC) = - (PA, PC)$.(6)

Từ (6) và (3) ta có $(QA, QC) \equiv (P_3A, P_3C) (\bmod \pi) \Rightarrow P_3$, Q, A, C đồng viên.

Suy ra điều phải chứng minh.

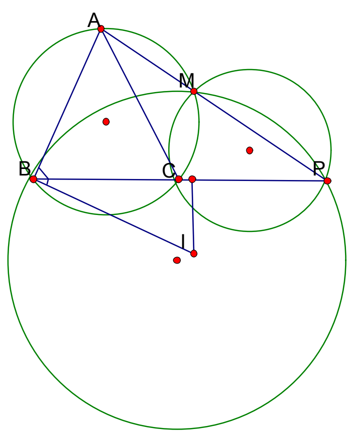
D. Phương pháp chứng minh tiếp tuyến đường tròn.

+ AT là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi $(AT, AB) \equiv (CA, CB) (\bmod \pi)$.

Bài 1. *Cho tam giác cân ABC đỉnh A. Một điểm M di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AM cắt cắt BC tai P.*

1. Chứng minh rằng các vòng tròn ngoại tiếp của tam giác BMP và CMP tiếp xúc với AB và AC lần lượt tại B và C.

2.Tìm tập hợp tâm của các đường tròn BMP và CMP.



HD. Vì A,B.C.M đồng viên nên (BA, BM) = (CA, CM)

= (CA, CB) + (CB, CM) (1).

Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A nên ta có

$(CA, CB) \equiv (BC, BA) (\bmod \pi)$ (2)

$(CB, CM) \equiv (AB, AM) (\bmod \pi)$ (3)

Từ (1) ,(2) ,(3) ta có(BA, BM) = (BC, BA) + (AB, AM) = (BC, AM)

$\Rightarrow (BA, BM) \equiv (PB, PM) (\bmod \pi) \Rightarrow$ BA là tiếp tuyến vòng ngoại tiếp tam giác PMB .

Tương tự AC là tiếp tuyến của vòng ngoại tiếp tam giác CMP tại C

2.Giả sử I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP nên I là giao điểm đường trung trực cạnh BP và đường thẳng Δ cố định vuông góc AB. Khi M lưu động trên đường tròn (ABC) thì P lưu động trên BC, suy ra I lưu động trên Δ

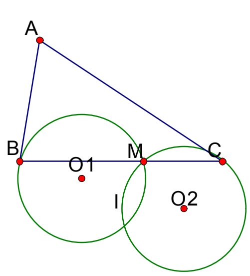
E. Phương pháp tìm tập hợp điểm.

+Tập hợp điểm M nằm trên vòng (ABC) khi và chỉ khi $(MB, MC) \equiv (AB, AC) (\bmod \pi)$

$+\{M / (MA, MB) \equiv \alpha (\bmod \pi)\} =$ cung tròn chứa góc α qua A, B.

$+\{M / (MA, MB) \equiv -\alpha (\bmod \pi)\} =$ cung tròn không chứa góc α qua A, B.

Bài 1. C*ho tam giác ABC. M là một điểm lưu động trên cạnh BC. Hai vòng thay đổi qua M ,tiếp xúc với AB, AC, lần lượt tại A,B cắt nhau tại I.Tìm tập hợp điểm I khi M thay đổi.*



HD.Vì AB là tiếp tuyến vòng (O_1)

$\Rightarrow (IB,IM) = (BA,BM) = (BA,BC) (\bmod \pi)$ (1)

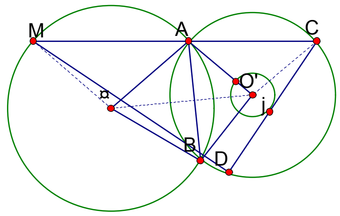
Vì AC là tiếp tuyến vòng (O_2)

$\Rightarrow (IM,IC) = (CM,CA) = (BC,CA) (\bmod \pi)$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có $(IB,IC) = (AB,AC) (\bmod \pi)$

$\Rightarrow$ ABIC nội tiếp . Vậy tập hợp điểm I là vòng ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2. *Cho đường tròn (O) và (O') có bán kính R và R' cắt nhau tại A, B. Một điểm M lưu động trên (O) . MA và MB cắt đường (O') tại C và D. Tìm tập hợp trung điểm I của CD khi M lưu động trên (O).*
HD. Ta có (AD, AC)=(AD, BM)+(BM, AC)



*M*à (AD, BM)=(AD,BD) = $\frac{1}{2}(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'B})$ = (O'O;O'B)$(\bmod \pi)$

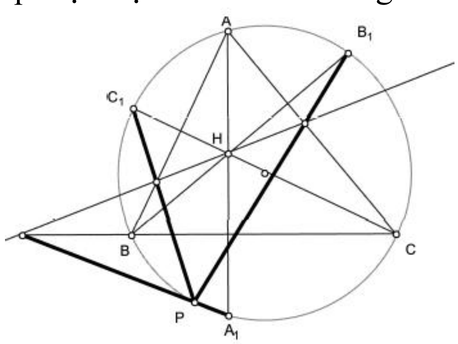
(BM, AC)=(MB,MA) = $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=(OB,OO')(\bmod \pi)$.

Do đó (AD, AC) = (O'O;O'B)+(OB,OO') = (OB, O'B).$(\bmod \pi)$.

hay (AD, AC) =-(AO;AO')$(\bmod \pi)$.

Đặt góc $\angle CAD=\alpha \Rightarrow \angle OAO'=\alpha$ không đổi.
Do đó độ dài CD không đổi $\Rightarrow CD=2R\sin\alpha$. Nên khoảng cách $O'I=R\cos\alpha$.
Vậy tập hợp trung điểm I là đường tròn tâm O' bán kính bằng $R\cos\alpha$

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn , trực tâm H và f là một đường thẳng tùy ý qua H. Gọi f_a, f_b, f_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với f qua các đường thẳng BC, CA, AB . Chứng minh rằng f_a, f_b, f_c đồng qui tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (Bun garian 1999).



Giải . Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB khi đó dễ dàng chứng minh được A_1, B_1, C_1 thuộc (ABC) , ngoài ra

$(f_a;f_b)=(f_a;BC)+(BC;CA)+(CA;f_b) \quad (\bmod \pi)$

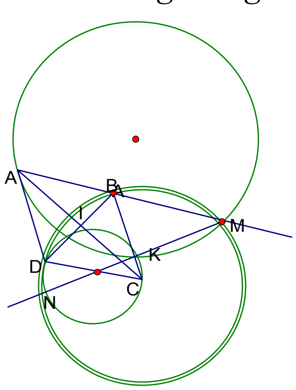
$=(BC;f)+(BC;CA)+(f;CA) \quad (\bmod \pi)$

$2(BC;f)+(BC;CA)+(f;CA) \quad (\bmod \pi)$

Suy ra $f_a \cap f_b \in (ABC)$ tương tự ta cũng có $f_b \cap f_c \in (ABC)$, $f_a \cap f_c \in (ABC)$
Từ đó, do một đường thẳng và một đường tròn cắt nhau tại nhiều nhất hai điểm , suy ra điều phải chứng minh..

Bài 4. *(Thi HSG 2006-Bảng A). Cho tứ giác lồi ABCD. Xét một điểm M di động trên đường thẳng AB sao cho M không trùng với A và B . Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đường tròn đi qua ba điểm (M, A, C) và đường tròn đi qua ba điểm (M, B, D) . Chứng minh:*

1. *Điểm N di động trên đường tròn cố định .*
2. *Đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định*



HD. 1) Gọi I là giao điểm của hai đường chéo lồi ABCD .Xét các góc định hướng ,ta có (CI,CN) = (CA,CN) = (MA,MN) = (MB,MN) = (DB,DN) (DI,DN) (mod π) (1).
Vậy (CI,CN) = (DI,DN) (mod π) ⇒C, I, D, N đồng viên. Do đó điểm N di động trên đường tròn cố định (C,D,I)
2. Đường thẳng qua I ,song song với AB cắt đường thẳng MN tại K (gọi là t) . Vì (MA,MN) = (KI,KN)(mod π) . Do đó bốn điểm C,I,K,N đồng viên . hay điểm K nằm trên đường tròn cố địnhqua C, D, I, N . Điểm K là giao điểm đường thẳng t cố định và đường tròn (C,D,T) cố định nên đường thẳng MN luôn đi qua điểm K cố định.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Trên một đường tròn lấy bốn điểm A, B, C, D. Các đường tròn đường kính BA và BC, BC và CD , CD và DA, DA và AB cắt lại nhau lần lượt tại B', C', D' A' . Chứng minh rằng bốn điểm A',B', C', D' cùng nằm trên một đường tròn

Bài 2. Cho tam giác ABC với trực tâm Hnooij tiếp trong đường tròn tâm (O). Gọi A_1, A_2 theo thứ tự là điểm đối xứng với H qua BC và trung điểm BC. Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 nằm trên đường tròn (O).

Bài 3. Hai day cung vuông góc AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại P. Chứng minh rằng trung tuyến của tam giác PBC là đường cao của tam giác PAD.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F, G theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thawngrAB và CD, BC và DA, AC và BD. Các đường tròn (DAE), (DCF) cắt nhau tại điểm thứ hai H. Phân giác của góc $\widehat{AHB}$ cắt AB tại I, phân giác của góc $\widehat{DHC}$ cắt CD tại J. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng.

Bài 5. Cho một tam giác cân ABC đỉnh A. Một điểm M thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AM cắt BcC tại P

1. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của tam giác BMP và CMP tiếp xúc với AB và AC tại B và C.
2. Tìm tập hợp các tâm của các đường tròn BMP và CMP.

Bài 6. Gọi M. N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, AC của tam giác ABC. Một đường thẳng d quay quanh A. Gọi P, Q là hình chiếu của B, C trên d . Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng PM và QN .

Bài 7. Cho một tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O).

1. Kẽ một day cung MN vuông góc với BC. Chứng minh rằng đường thẳng Simson của điểm M song song với AN .
2. Gọi M' là điểm xuyên tâm đối của M. Chứng minh rằng đường Simson của M và M' vuông góc nhau.

Bài 8. Cho trước đường tròn (O) và hai điểm A, B sao cho AB tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Lấy điểm C không nằm trên đường tròn (O) sao cho AC cắt (O) tại hai điểm phân biệt, dựng đường tròn (O') tiếp xúc với AC tại C, tiếp xúc với (O) tại D sao cho B, D nằm về hai phía của đường thawngrAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.