MỤC LỤC

PHẦN I: TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA PHÉP CHIA

Cho 2 số nguyên a và b trong đó $b \neq 0$ ta luôn tìm đ- ợc hai số nguyên q và r duy nhất sao cho:

$a = bq + r$ Với $0 \le r \le |b|$

Trong đó: a là số bị chia, b là số chia, q là th- ơng, r là số d- .

Khi a chia cho b có thể xẩy ra | b| số d-

$r \in \{0; 1; 2; \dots; |b|\}$

Đặc biệt: r = 0 thì a = bq, khi đó ta nói a chia hết cho b hay b chia hết a.

Ký hiệu: $a \vdots b$ hay b\ a

Vậy: $\boxed{a \vdots b \Leftrightarrow \text{Có số nguyên q sao cho } a = bq}$

II. CÁC TÍNH CHẤT

1. Với $\forall\, a \neq 0 \Rightarrow a \vdots a$
2. Nếu $a \vdots b$ và $b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$
3. Với $\forall\, a \neq 0 \Rightarrow 0 \vdots a$
4. Nếu a, b > 0 và $a \vdots b$; $b \vdots a \Rightarrow a = b$
5. Nếu $a \vdots b$ và c bất kỳ $\Rightarrow ac \vdots b$
6. Nếu $a \vdots b \Rightarrow (\pm a) \vdots (\pm b)$
7. Với $\forall\, a \Rightarrow a \vdots (\pm 1)$
8. Nếu $a \vdots b$ và $c \vdots b \Rightarrow a \pm c \vdots b$
9. Nếu $a \vdots b$ và $c \vdots b \Rightarrow a \pm c \vdots b$
10. Nếu $a + b \vdots c$ và $a \vdots c \Rightarrow b \vdots c$
11. Nếu $a \vdots b$ và $n > 0 \Rightarrow a^n \vdots b^n$
12. Nếu $ac \vdots b$ và $(a, b) = 1 \Rightarrow c \vdots b$
13. Nếu $a \vdots b$, $c \vdots b$ và m, n bất kỳ $am + cn \vdots b$
14. Nếu $a \vdots b$ và $c \vdots d \Rightarrow ac \vdots bd$
15. Tích n số nguyên liên tiếp chia hết cho n!

III. MỘT SỐ DẤU HIỆU CHIA HẾT

Gọi $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$

1. Dấu hiệu chia hết cho 2; 5; 4; 25; 8; 125

$+ N \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$

$+ N \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \in \{0; 5\}$

$+ N \vdots 4$ (hoặc 25) $\Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \vdots 4$ (hoặc 25)

$+ N \vdots 8$ (hoặc 125) $\Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \vdots 8$ (hoặc 125)

2. Dấu hiệu chia hết cho 3 và 9

$+ N \vdots 3$ (hoặc 9) $\Leftrightarrow a_0 + a_1 + \dots + a_n \vdots 3$ (hoặc 9)

3. Một số dấu hiệu khác

$+ N \vdots 11 \Leftrightarrow [(a_0 + a_1 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)] \vdots 11$

+ N ⋮ 101 ⇔ [($\overline{a_1a_0}$ + $\overline{a_5a_4}$ +…) - ($\overline{a_3a_2}$ + $\overline{a_7a_6}$ +…)]⋮101

+ N ⋮ 7 (hoặc 13) ⇔ [($\overline{a_2a_1a_0}$ + $\overline{a_8a_7a_6}$ +…) - [($\overline{a_5a_4a_3}$ + $\overline{a_{11}a_{10}a_9}$ +…) ⋮11 (hoặc 13)

+ N ⋮ 37 ⇔ ($\overline{a_2a_1a_0}$ + $\overline{a_5a_4a_3}$ +…) ⋮ 37

+ N ⋮ 19 ⇔ ($a_0+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+\ldots+2^na_0$) ⋮ 19

IV. ĐỒNG D□ THỨC

a. Định nghĩa: Cho m là số nguyên d- ơng. Nếu hai số nguyên a và b cho cùng số d- khi chia cho m thì ta nói a đồng d- với b theo modun m.

Ký hiệu: a ≡ b (modun)

Vậy: a ≡ b (modun) ⇔ a - b ⋮ m

b. Các tính chất

1. Với ∀ a ⇒ a ≡ a (modun)
2. Nếu a ≡ b (modun) ⇒ b ≡ a (modun)
3. Nếu a ≡ b (modun), b ≡ c (modun) ⇒ a ≡ c (modun)
4. Nếu a ≡ b (modun) và c ≡ d (modun) ⇒ a+c ≡ b+d (modun)
5. Nếu a ≡ b (modun) và c ≡ d (modun) ⇒ ac ≡ bd (modun)
6. Nếu a ≡ b (modun), d ∈ Uc (a, b) và (d, m) =1

$$\Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \text{(modun)}$$

7. Nếu a ≡ b (modun), d > 0 và d ∈ Uc (a, b, m)

$$\Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \text{ (modun } \frac{m}{d}\text{)}$$

V. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ

1. Định lý Euler

Nếu m là 1 số nguyên d- ơng $\varphi_{(m)}$ là số các số nguyên d- ơng nhỏ hơn m và nguyên tố cùng nhau với m, (a, m) = 1

Thì $a^{\varphi(m)} \equiv 1$ (modun)

Công thức tính $\varphi_{(m)}$

Phân tích m ra thừa số nguyên tố

$m = p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_k^{\alpha k}$ với $p_i \in p$; $\alpha_i \in N^*$

Thì $\varphi_{(m)} = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_k})$

2. Định lý Fermat

Nếu t là số nguyên tố và a không chia hết cho p thì $a^{p-1} \equiv 1\ (modp)$

3. Định lý Wilson

Nếu p là số nguyên tố thì

$(P - 1)! + 1 \equiv 0\ (modp)$

PHẦN II: CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN CHIA HẾT

1. Phương pháp 1: SỬ DỤNG DẤU HIỆU CHIA HẾT

Ví du 1: Tìm các chữ số a, b sao cho $\overline{a56b} \vdots 45$

Giải

Ta thấy 45 = 5.9 mà (5 ; 9) = 1

để $\overline{a56b} \vdots 45 \Leftrightarrow \overline{a56b} \vdots 5$ và 9

Xét $\overline{a56b} \vdots 5 \Leftrightarrow b \in \{0 ; 5\}$

Nếu b = 0 ta có số $\overline{a56b} \vdots 9 \Leftrightarrow a + 5 + 6 + 0 \vdots 9$

$\Rightarrow a + 11 \vdots 9$

$\Rightarrow a = 7$

Nếu b = 5 ta có số $\overline{a56b} \vdots 9 \Leftrightarrow a + 5 + 6 + 0 \vdots 9$

$\Rightarrow a + 16 \vdots 9$

$\Rightarrow a = 2$

Vậy: a = 7 và b = 0 ta có số 7560

a = 2 và b = 5 ta có số 2560

Ví du 2: Biết tổng các chữ số của 1 số là không đổi khi nhân số đó với 5. Chứng minh rằng số đó chia hết cho 9.

Giải

Gọi số đã cho là a

Ta có: a và 5a khi chia cho 9 cùng có 1 số d-

$\Rightarrow 5a - a \vdots 9 \Rightarrow 4a \vdots 9$ mà (4 ; 9) = 1

$\Rightarrow a \vdots 9$ *(Đpcm)*

Ví du 3: CMR số $\underbrace{111\ldots111}_{81 \text{ số } 1} \vdots 81$

Giải

Ta thấy: $111111111 \vdots 9$

Có $\underbrace{111\ldots111}_{81 \text{ số } 1} = 111111111(10^{72} + 10^{63} + \ldots + 10^{9} + 1)$

Mà tổng $10^{72} + 10^{63} + \ldots + 10^{9} + 1$ có tổng các chữ số bằng $9 \vdots 9$

$\Rightarrow 10^{72} + 10^{63} + \ldots + 10^{9} + 1 \vdots 9$

Vậy: $\underbrace{111\ldots111}_{81 \text{ số } 1} \vdots 81$ (Đpcm)

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Tìm các chữ số x, y sao cho

a. $\overline{34x5y} \vdots 4$ và 9

b. $\overline{2x78} \vdots 17$

Bài 2: Cho số N = $\overline{dcba}$ CMR

a. $N \vdots 4 \Leftrightarrow (a + 2b) \vdots 4$

b. $N \vdots 16 \Leftrightarrow (a + 2b + 4c + 8d) \vdots 16$ với b chẵn

c. $N \vdots 29 \Leftrightarrow (d + 2c + 9b + 27a) \vdots 29$

Bài 3: Tìm tất cả các số có 2 chữ số sao cho mỗi số gấp 2 lần tích các chữ số của số đó.

Bài 4: Viết liên tiếp tất cả các số có 2 chữ số từ 19 đến 80 ta đ- ợc số A = 192021…7980. Hỏi số A có chia hết cho 1980 không ? Vì sao?

Bài 5: Tổng của 46 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 46 không? Vì sao?

Bài 6: Chứng tỏ rằng số $\underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ số } 1}\ \underbrace{22\ldots22}_{100 \text{ số } 2}$ là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: a. x = và y = 2

x = và y = 6

b. $\overline{\mathbf{2x78}} = 17\ (122 + 6x) + 2(2\text{-}x) \vdots 17 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 2: a. $N \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{\mathbf{ab}} \vdots 4 \Leftrightarrow 10b + a \vdots 4 \Leftrightarrow 8b + (2b + a) \vdots 4$

$\Rightarrow a + 2b \vdots 4$

b. $N \vdots 16 \Leftrightarrow 1000d + 100c + 10b + a \vdots 16$

$\Leftrightarrow (992d + 96c + 8b) + (8d + 4c + 2b + a) \vdots 16$

$\Rightarrow a + 2b + 4c + 8d \vdots 16$ với b chẵn

c. Có $100(d + 3c + 9b + 27a) - \overline{\mathbf{dbca}} \vdots 29$

$\left.\begin{array}{l} \text{mà } (1000, 29) = 1 \\ \overline{\mathbf{dbca}} \vdots 29 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow (d + 3c + 9b + 27a) \vdots 29$

Bài 3: Gọi $\overline{\mathbf{ab}}$ là số có 2 chữ số

Theo bài ra ta có:

$\overline{\mathbf{ab}} = 10a + b = 2ab$ (1)

$\overline{\mathbf{ab}} \vdots 2 \Rightarrow b \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$

Thay vào (1) a = 3; b = 6

Bài 4: Có $1980 = 2^2.3^2.5.11$

Vì 2 chữ số tận cùng của a là 80 $\vdots$ 4 và 5

$\Rightarrow$ A $\vdots$ 4 và 5

Tổng các số hàng lẻ 1+(2+3+…+7).10+8 = 279

Tổng các số hàng chẵn 9+(0+1+…+9).6+0 = 279

Có 279 + 279 = 558 $\vdots$ 9 $\Rightarrow$ A $\vdots$ 9

279 - 279 = 0 $\vdots$ 11 $\Rightarrow$ A $\vdots$ 11

Bài 5: Tổng 2 số tự nhiên liên tiếp là 1 số lẻ nên không chia hết cho 2.

Có 46 số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow$ có 23 cặp số mỗi cặp có tổng là 1 số lẻ $\Rightarrow$ tổng 23 cặp không chia hết cho 2. Vậy tổng của 46 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 46.

Bài 6: Có $\underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ số } 1}\ \underbrace{22\ldots22}_{100 \text{ số } 2} = \underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ số } 1}\ \underbrace{100\ldots02}_{99 \text{ số } 0}$

Mà $\underbrace{100\ldots02}_{99 \text{ số } 0} = 3.\ \underbrace{33\ldots34}_{99 \text{ số } 3}$

$\Rightarrow \underbrace{11\ldots11}_{100 \text{ số } 1}\ \underbrace{22\ldots22}_{100 \text{ số } 2} = \underbrace{33\ldots33}_{100 \text{số } 3}\ \underbrace{33\ldots34}_{99 \text{ số } 3}$ *(Đpcm)*

2. Ph�ơng pháp 2: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT

Chú ý: Trong n số nguyên liên tiếp có 1 và chỉ 1 số chia hết cho n.

CMR: Gọi n là số nguyên liên tiếp

$m + 1; \ m + 2; \ \ldots m + n$ với $m \in Z, \ n \in N^*$

Lấy n số nguyên liên tiếp trên chia cho n thì ta được tập hợp số dư là: {0; 1; 2; … n - 1}

* Nếu tồn tại 1 số d- là 0: giả sử $m + i = nq_i$; $i = \overline{1, n}$

$\Rightarrow m + i \vdots n$

* Nếu không tồn tại số d- là 0 $\Rightarrow$ không có số nguyên nào trong dãy chia hết cho n $\Rightarrow$ phải có ít nhất 2 số d- trùng nhau.

Giả sử: $\begin{cases} m + i = nqi + r \\ m + j = qjn + r \end{cases}$ $\quad 1 \le i; \ j \le n$

$\Rightarrow i - j = n(q_i - q_j) \vdots n \Rightarrow i - j \vdots n$

mà $|i - j| < n \Rightarrow i - j = 0 \Rightarrow i = j$

$\Rightarrow m + i = m + j$

Vậy trong n số đó có 1 số và chỉ 1 số đó chia hết cho n…

Ví du 1: CMR: a. Tích của 2 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 2

b. Tích của 3 số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

Giải

a. Trong 2 số nguyên liên tiếp bao giờ cũng có 1 số chẵn

$\Rightarrow$ Số chẵn đó chia hết cho 2.

Vậy tích của 2 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 2.

Tích 2 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 2 nên tích của 3 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 2

b. Trong 3 sô nguyên liên tiếp bao giơ cũng có 1 số chia hết cho 3.

$\Rightarrow$ Tích 3 số đó chia hết cho 3 mà (1; 3) = 1.

Vậy tích của 3 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 6.

Ví du 2: CMR: Tổng lập ph- ơng của 3 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 9.

Giải

Gọi 3 số nguyên liên tiếp lần l- ợt là: n - 1 , n , n+1

Ta có: $A = (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$

$= 3n^3 - 3n + 18n + 9n^2 + 9$

$= 3(n - 1)n\,(n+1) + 9(n^2 + 1) + 18n$

Ta thấy $(n - 1)n\,(n + 1) \vdots 3$ *(CM Ví dụ 1)*

$\Rightarrow 3(n - 1)n\,(n + 1) \vdots 9$

mà $\begin{cases} 9(n^2 + 1) \vdots 9 \\ 18n \vdots 9 \end{cases}$

$\Rightarrow A \vdots 9$ *(ĐPCM)*

Ví du 3: CMR: $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n \vdots 3\,84$ với $\forall$ n chẵn, $n \ge 4$

Giải

Vì n chẵn, $n \ge 4$ ta đặt $n = 2k$, $k \ge 2$

Ta có $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n = 16k^4 - 32k^3 - 16k^2 + 32k$

$= \text{đặt } 16k(k^3 - 2k^2 - k + 2)$

$= \text{đặt } 16k(k - 2)(k - 1)(k + 1)$

Với $k \geq 2$ nên $k - 2, k - 1, k + 1, k$ là 4 số tự nhiên liên tiếp nên trong 4 số đó có 1 số chia hết cho 2 và 1 số chia hết cho 4. $\Rightarrow (k - 2)(k - 1)(k + 1)k \vdots 8$

Mà $(k - 2)(k - 1)k \vdots 3$; $(3,8)=1$

$\Rightarrow (k - 2)(k - 1)(k + 1)k \vdots 24$

$\Rightarrow 16(k - 2)(k - 1)(k + 1)k \vdots (16,24)$

Vậy $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n \vdots 384$ với $\forall$ n chẵn, $n \geq 4$

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: CMR: a. $n(n + 1)(2n + 1) \vdots 6$

b. $n^5 - 5n^3 + 4n \vdots 120$ Với $\forall n \in N$

Bài 2: CMR: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \vdots 24$ Với $\forall n \in Z$

Bài 3: CMR: Với $\forall$ n lẻ thì

a. $n^2 + 4n + 3 \vdots 8$

b. $n^3 + 3n^2 - n - 3 \vdots 48$

c. $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 \vdots 512$

Bài 4: Với p là số nguyên tố $p > 3$ CMR : $p^2 - 1 \vdots 24$

Bài 5: CMR: Trong 1900 số tự nhiên liên tiếp có 1 số có tổng các chữ số chia hết cho 27.

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: a. $n(n + 1)(2n + 1) = n(n + 1)[(n + 1) + (n + 2)]$

$= n(n + 1)(n - 1) + n(n + 1)(n + 2) \vdots 6$

b. $n^5 - 5n^3 + 4n = (n^4 - 5n^2 + 4)n$

$= n(n^2 - 1)(n^2 - 4)$

$= n(n + 1)(n - 1)(n + 2)(n - 2) \vdots 120$

Bài 2: $n^4 + 6n^3 + 6n + 11n^2$

$= n(n^3 + 6n^2 + 6 + 11n)$

$= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \vdots 24$

Bài 3: a. $n^2 + 4n + 3 = (n + 1)(n + 3) \vdots 8$

b. $n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n + 3) - (n + 3)$

$= (n^2 - 1)(n + 3)$

$= (n + 1)(n - 1)(n + 3)$

$= (2k + 4)(2k + 2)(2k$ với $n = 2k + 1, k \in N)$

$= 8k(k + 1)(k + 2) \vdots 48$

c. $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 = n^8(n^4 - 1) - (n^4 - 1)$

$= (n^4 - 1)(n^8 - 1)$

$= (n^4 - 1)^2(n^4 + 1)$

$= (n^2 - 1)^2(n^2 - 1)^2(n^4 + 1)$

$= 16[k(k + 1)^2(n^2 + 1)^2(n^4 + 1)$

Với $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 + 1$ và $n^4 + 1$ là những số chẵn $\Rightarrow (n^2 + 1)^2 \vdots 2$

$n^4 + 1 \vdots 2$

$\Rightarrow n^{12} - n^8 - n^4 + 1 \vdots (2^4.2^2.2^2.1.2^1)$

Vậy $n^{12} - n^8 - n^4 + 1 \vdots 512$

Bài 4: Có $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ vì p là số nguyên tố $p > 3$

$\Rightarrow p \vdots 3$ ta có: $(p - 1)(p + 1) \vdots 8$

và $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ $(k \in N)$

$\Rightarrow (p - 1)(p + 1) \vdots 3$

Vậy $p^2 - 1 \vdots 24$

Bài 5: Giả sử 1900 số tự nhiên liên tiếp là

n, n +1; n + 2; … ; n + 1989 (1)

trong 1000 tự nhiên liên tiếp n, n + 1; n + 2; …; n + 999

có 1 số chia hết cho 1000 giả sử n_0, khi đó n_0 có tận cùng là 3 chữ số 0 giả sử tổng các chữ số của n_0 là s khi đó 27 số n_0, $n_0 + 9$; $n_0 + 19$; $n_0 + 29$; $n_0 + 39$; …; $n_0 + 99$; $n_0 + 199$; … $n_0 + 899$ (2)

Có tổng các chữ số lần lượt là: s; s + 1 … ; s + 26

Có 1 số chia hết cho 27 *(ĐPCM)*

**** Chú ý***: $n + 899 \le n + 999 + 899 < n + 1989$

$\Rightarrow$ Các số ở (2) nằm trong dãy (1)

3. Ph□ơng pháp 3: XÉT TẬP HỢP SỐ D□ TRONG PHÉP CHIA

Ví du 1: CMR: Với $\forall n \in N$

Thì $A_{(n)} = n(2n + 7)(7n + 7)$ chia hết cho 6

Giải

Ta thấy 1 trong 2 thừa số n và 7n + 1 là số chẵn. Với $\forall n \in N \Rightarrow A_{(n)} \vdots 2$

Ta chứng minh $A_{(n)} \vdots 3$

Lấy n chia cho 3 ta đ- ợc $n = 3k + 1$ $(k \in N)$

Với $r \in \{0; 1; 2\}$

Với $r = 0 \Rightarrow n = 3k \Rightarrow n \vdots 3 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 3$

Với $r = 1 \Rightarrow n = 3k + 1 \Rightarrow 2n + 7 = 6k + 9 \vdots 3 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 3$

Với $r = 2 \Rightarrow n = 3k + 2 \Rightarrow 7n + 1 = 21k + 15 \vdots 3 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 3$

$\Rightarrow A_{(n)} \vdots 3$ với $\forall n$ mà $(2, 3) = 1$

Vậy $A_{(n)} \vdots 6$ với $\forall n \in N$

Ví du 2: CMR: Nếu $n \vdots 3$ thì $A_{(n)} = 3^{2n} + 3^n + 1 \vdots 13$ Với $\forall n \in N$

Giải

Vì $n \vdots 3 \Rightarrow n = 3k + r$ $(k \in N)$; $r \in \{1; 2; 3\}$

$\Rightarrow A_{(n)} = 3^{2(3k + r)} + 3^{3k+r} + 1$

$= 3^{2r}(3^{6k} - 1) + 3^r(3^{3k} - 1) + 3^{2r} + 3^r + 1$

ta thấy $3^{6k} - 1 = (3^3)^{2k} - 1 = (3^3 - 1)M = 26M \vdots 13$

$3^{3k} - 1 = (3^3 - 1)N = 26N \vdots 13$

với $r = 1 \Rightarrow 3^{2n} + 3^n + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13 \vdots 13$

$\Rightarrow 3^{2n} + 3^n + 1 \vdots 13$

với $r = 2 \Rightarrow 3^{2n} + 3^n + 1 = 3^4 + 3^2 + 1 = 91 \vdots 13$

$\Rightarrow 3^{2n} + 3^n + 1$

Vậy với $n \vdots 3$ thì $A_{(n)} = 3^{2n} + 3^n + 1 \vdots 13$ Với $\forall n \in N$

Ví du 3: Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n - 1 \vdots 7$

Giải

Lấy n chia cho 3 ta có $n = 3k + 1$ $(k \in N)$; $r \in \{0; 1; 2\}$

Với $r = 0 \Rightarrow n = 3k$ ta có

$2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1 = (8 - 1)M = 7M \vdots 7$

với $r = 1 \Rightarrow n = 3k + 1$ ta có:

$2^n - 1 = 2^{8k+1} - 1 = 2.2^{3k} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1$

mà $2^{3k} - 1 \vdots 7 \Rightarrow 2^n - 1$ chia cho 7 d- 1

với $r = 2 \Rightarrow n = 3k + 2$ ta có :

$2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3$

mà $2^{3k} - 1 \vdots 7 \Rightarrow 2^n - 1$ chia cho 7 d- 3

Vậy $2^{3k} - 1 \vdots 7 \Leftrightarrow n = 3k$ $(k \in N)$

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: CMR: $A_n = n(n^2 + 1)(n^2 + 4) \vdots 5$ Với $\forall n \in Z$

Bài 2: Cho $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$B = a^5_1 + a^5_2 + \ldots + a^5_n$

Bài 3: CMR: Nếu $(n, 6) = 1$ thì $n^2 - 1 \vdots 24$ Với $\forall n \in Z$

Bài 4: Tìm số tự nhiên W để $2^{2n} + 2^n + 1 \vdots 7$

Bài 5: Cho 2 số tự nhiên m, n để thoả mãn $24m^4 + 1 = n^2$

CMR: $mn \vdots 55$

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: + $A_{(n)} \vdots 6$

+ Lấy n chia cho 5 $\Rightarrow n = 5q + r$ $r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$r = 0 \Rightarrow n \vdots 5 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 5$

$r = 1, 4 \Rightarrow n^2 + 4 \vdots 5 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 5$

$r = 2; 3 \Rightarrow n^2 + 1 \vdots 5 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 5$

$\Rightarrow A_{(n)} \vdots 5 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 30$

Bài 2: Xét hiệu $B - A = (a^5_1 - a_1) + \ldots + (a^5_n - a_n)$

Chỉ chứng minh: $a^5_i - a_i \vdots 30$ là đủ

Bài 3: Vì $(n, 6) = 1 \Rightarrow n = 6k + 1$ $(k \in N)$

Với $r \in \{\pm 1\}$

$r = \pm 1 \Rightarrow n^2 - 1 \vdots 24$

Bài 4: Xét $n = 3k + r$ $(k \in N)$

Với $r \in \{0; 1; 2\}$

Ta có: $2^{2n} + 2^n + 1 = 2^{2r}(2^{6k} - 1) + 2^r(2^{3k} - 1) + 2^{2n} + 2^n + 1$

Làm t- ơng tự VD3

Bài 5: Có $24m^4 + 1 = n^2 = 25m^4 - (m^4 - 1)$

Khi $m \vdots 5 \Rightarrow mn \vdots 5$

Khi $m \not\vdots 5$ thì $(m, 5) = 1 \Rightarrow m^4 - 1 \vdots 5$

(Vì $m^5 - m \vdots 5 \Rightarrow (m^4 - 1) \vdots 5 \Rightarrow m^4 - 1 \vdots 5$)

$\Rightarrow n^2 \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 5$

Vậy mn ⋮ 5

4. Ph□ơng pháp 4: SỬ DỤNG PH□ƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH NHÂN TỬ

Giả sử chứng minh $a_n \vdots k$

Ta có thể phân tích a_n chứa thừa số k hoặc phân tích thành các thừa số mà các thừa số đó chia hết cho các thừa số của k.

Ví du 1: CMR: $3^{6n} - 2^{6n} \vdots 35$ Với $\forall n \in N$

Giải

Ta có $3^{6n} - 2^{6n} = (3^6)^n - (2^6)^n = (3^6 - 2^6)M$

$= (3^3 + 2^3)(3^3 - 2^3)M$

$= 35.19M \vdots 35$ Vậy $3^{6n} - 2^{6n} \vdots 35$ Với $\forall n \in N$

Ví du 2: CMR: Với $\forall$ n là số tự nhiên chăn thì biểu thức

$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \vdots 232$

Giải

Ta thấy 232 = 17.19 mà (17;19) = 1 ta chứng minh

$A \vdots 17$ và $A \vdots 19$ ta có $A = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$ có $20^n - 3^n = (20 - 3)M \vdots 17M$

$16^n - 1 = (16 + 1)M = 17N \vdots 17$ (n chẵn)

$\Rightarrow A \vdots 17$ (1)

ta có: $A = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$

có $20^n - 1 = (20 - 1)p = 19p \vdots 19$

có $16^n - 3^n = (16 + 3)Q = 19Q \vdots 19$ (n chẵn)

$\Rightarrow A \vdots 19$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \vdots 232$

Ví du 3: CMR: $n^n - n^2 + n - 1 \vdots (n - 1)^2$ Với $\forall n > 1$

Giải

Với $n = 2 \Rightarrow n^n - n^2 + n - 1 = 1$

và $(n - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1$

$\Rightarrow n^n - n^2 + n - 1 \vdots (n - 1)^2$

với n > 2 đặt $A = n^n - n^2 + n - 1$ ta có $A = (n^n - n^2) + (n - 1)$

$= n^2(n^{n-2} - 1) + (n - 1)$

$= n^2(n - 1)(n^{n-3} + n^{n-4} + \ldots + 1) + (n - 1)$

$= (n - 1)(n^{n-1} + n^{n-2} + \ldots + n^2 + 1)$

$= (n - 1)[(n^{n-1} - 1) + \ldots + (n^2 - 1) + (n - 1)]$

$= (n - 1)^2M \vdots (n - 1)^2$

Vậy $A \vdots (n - 1)^2$ *(ĐPCM)*

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: CMR: a. $3^{2n+1} + 2^{2n+2} \vdots 7$

b. $mn(m^4 - n^4) \vdots 30$

Bài 2: CMR: $A_{(n)} = 3^n + 63 \vdots 72$ với n chẵn $n \in N, n \geq 2$

Bài 3: Cho a và b là 2 số chính ph- ơng lẻ liên tiếp

CMR: a. $(a - 1)(b - 1) \vdots 192$

Bài 4: CMR: Với p là 1 số nguyên tố p > 5 thì $p^4 - 1 \vdots 240$

Bài 5: Cho 3 số nguyên d- ơng a, b, c và thoả mãn $a^2 = b^2 + c^2$

CMR: $abc \vdots 60$

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: a. $3^{2n+1} + 2^{2n+2} = 3.3^{2n} + 2.2^n$

$= 3.9^n + 4.2^n$

$= 3(7 + 2)^n + 4.2^n$

$= 7M + 7.2^n \vdots 7$

b. $mn(m^4 - n^4) = mn(m^2 - 1)(m^2 + 1) - mn(n^2 - 1)(n^2 + 1) \vdots 30$

Bài 3: Có 72 = 9.8 mà (8, 9) = 1 và n = 2k ($k \in N$)

có $3^n + 63 = 3^{2k} + 63$

$= (3^{2k} - 1) + 64 \Rightarrow A_{(n)} \vdots 8$

Bài 4: Đặt $a = (2k - 1)^2$; $b = (2k - 1)^2$ ($k \in N$)

Ta có $(a - 1)(b - 1) = 16k(k + 1)(k - 1) \vdots 64$ và 3

Bài 5: Có 60 = 3.4.5 Đặt M = abc

Nếu a, b, c đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2, b^2$ và c^2 chia hết cho 3 đều d- 1 $\Rightarrow a^2 \neq b^2 + c^2$. Do đó có ít nhất 1 số chia hết cho 3. Vậy $M \vdots 3$

Nếu a, b, c đều không chia hết cho 5 $\Rightarrow a^2, b^2$ và c^2 chia 5 d- 1 hoặc 4 $\Rightarrow b^2 + c^2$ chia 5 thì d- 2; 0 hoặc 3.

$\Rightarrow a^2 \neq b^2 + c^2$. Do đó có ít nhất 1 số chia hết cho 5. Vậy $M \vdots 5$

Nếu a, b, c là các số lẻ $\Rightarrow b^2$ và c^2 chia hết cho 4 d- 1.

$\Rightarrow b^2 + c^2 \equiv$ (mod 4) $\Rightarrow a^2 \neq b^2 + c^2$

Do đó 1 trong 2 số a, b phải là số chẵn.

Giả sử b là số chẵn

Nếu C là số chẵn $\Rightarrow M \vdots 4$

Nếu C là số lẻ mà $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ a là số lẻ

$\Rightarrow b^2 = (a - c)(a + b) \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{a-c}{2}\right)$

$\Rightarrow \frac{b}{2}$ chẵn $\Rightarrow b \vdots 4 \Rightarrow m \vdots 4$

Vậy $M = abc \vdots 3.4.5 = 60$

5. Phương pháp 5: BIẾN ĐỔI BIỂU THỨC CẦN CHỨNG MINH VỀ DẠNG TỔNG

Giả sử chứng minh $A_{(n)} \vdots k$ ta biến đổi $A_{(n)}$ về dạng tổng của nhiều hạng tử và chứng minh mọi hạng tử đều chia hết cho k.

Ví du 1: CMR: $n^3 + 11n \vdots 6$ với $\forall n \in z$.

Giải

Ta có $n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = n(n^2 - 1) + 12n$

$= n(n + 1)(n - 1) + 12n$

Vì n, n - 1; n + 1 là 3 số nguyên liên tiếp

$\Rightarrow n(n + 1)(n - 1) \vdots 6$ và $12n \vdots 6$

Vậy $n^3 + 11n \vdots 6$

Ví du 2: Cho a, b ∈ z thoả mãn $(16a + 17b)(17a + 16b) \vdots 11$

CMR: $(16a + 17b)(17a + 16b) \vdots 121$

Giải

Có 11 số nguyên tố mà $(16a + 17b)(17a + 16b) \vdots 11$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 16a + 17b \vdots 11 \\ 17a + 16b \vdots 11 \end{array}\right. (1)$$

Có $16a + 17b + 17a + 16b = 33(a + b) \vdots 11$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 16a + 17b \vdots 11 \\ 17a + 16b \vdots 11 \end{array}\right.$

Vậy $(16a + 17b)(17a + 16b) \vdots 121$

Ví du 3: Tìm n ∈ N sao cho $P = (n + 5)(n + 6) \vdots 6n$.

Giải

Ta có $P = (n + 5)(n + 6) = n^2 + 11n + 30$

$= 12n + n^2 - n + 30$

Vì $12n \vdots 6n$ nên để $P \vdots 6n \Leftrightarrow n^2 - n + 30 \vdots 6n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n2 - n \vdots 6 \\ 30 \vdots 6n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(n-1) \vdots 3 & (1) \\ 30 \vdots n & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow$ n = 3k hoặc n = 3k + 1 (k ∈ N)

Từ (2) $\Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

Vậy từ (1); (2) $\Rightarrow n \in \{1; 3; 6; 10; 15; 30\}$

Thay các giá trị của n vào P ta có

$n \in \{1; 3; 10; 30\}$ là thoả mãn

Vậy $n \in \{1; 3; 10; 15; 30\}$ thì $P = (n + 5)(n + 6) \vdots 6n$.

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: CMR: $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 \vdots 2^3$

Bài 2: CMR: $36n^2 + 60n + 24 \vdots 24$

Bài 3: CMR: a. $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1} \vdots 59$

b. $9^{2n} + 14 \vdots 5$

Bài 4: Tìm n ∈ N sao cho $n^3 - 8n^2 + 2n \vdots n^2 + 1$

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = (1^3 + 7^3) + (3^3 + 5^3)$

$= 8m + 8N \vdots 2^3$

Bài 2: $36^2 + 60n + 24 = 12n(3n + 5) + 24$

Ta thấy n và 3n + 5 không đồng thời cùng chẵn hoặc cùng lẻ

$\Rightarrow n(3n + 5) \vdots 2 \Rightarrow$ ĐPCM

Bài 3: a. $5^{n+2} + 26.5^n + 8^{2n+1}$

$= 5^n(25 + 26) + 8^{2n+1}$

$= 5^n(59 - 8) + 8.64^n$

$= 5^n.59 + 8.59m \vdots 59$

b. $9^{2n} + 14 = 9^{2n} - 1 + 15$

$= (81^n - 1) + 15$

$= 80m + 15 \vdots 5$

Bài 4: Có $n^3 - 8n^2 + 2n = (n^2 + 1)(n - 8) + n + 8 \vdots (n^2 + 1) \Leftrightarrow n + 8 \vdots n^2 + 1$

Nếu $n + 8 = 0 \Rightarrow n = -8$ (thoả mãn)

Nếu $n + 8 \neq 0 \Rightarrow |n + 8| \geq n^2 + 1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} n+8 \leq -n^2 - 1 & \text{Với } n \leq -8 \\ n+8 \geq n^2 + 1 & \text{Với } n \geq -8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} n^2 + n + 9 \leq 0 & \text{Với } n \leq -8 \\ n^2 - n - 7 \leq 0 & \text{Với } n \geq -8 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow n \in \{-2; 0; 2\}$ thử lại

Vậy $n \in \{-8; 0; 2\}$

6. Ph□ơng pháp 6: DÙNG QUY NẠP TOÁN HỌC

Giả sử CM $A_{(n)} \vdots P$ với $n \geq a$ (1)

B- ớc 1: Ta CM (1) đúng với n = a tức là CM $A_{(n)} \vdots P$

B- ớc 2: Giả sử (1) đúng với n = k tức là CM $A_{(k)} \vdots P$ với $k \geq a$

Ta CM (1) đúng với n = k + 1 tức là phải CM $A_{(k+1)} \vdots P$

B- ớc 3: Kết luận $A_{(n)} \vdots P$ với $n \geq a$

Ví du 1: Chứng minh $A_{(n)} = 16^n - 15n - 1 \vdots 225$ với $\forall n \in N^*$

Giải

Với $n = 1 \Rightarrow A_{(n)} = 225 \vdots 225$ vậy n = 1 đúng

Giả sử $n = k \geq 1$ nghĩa là $A_{(k)} = 16^k - 15k - 1 \vdots 225$

Ta phải CM $A_{(k+1)} = 16^{k+1} - 15(k + 1) - 1 \vdots 225$

Thật vậy: $A_{(k+1)} = 16^{k+1} - 15(k + 1) - 1$

$= 16.16^k - 15k - 16$

$= (16^k - 15k - 1) + 15.16^k - 15$

$= 16^k - 15k - 1 + 15.15m$

$= A_{(k)} + 225$

mà $A_{(k)} \vdots 225$ (giả thiết quy nạp)

$225m \vdots 225$

Vậy $A_{(n)} \vdots 225$

Ví du 2: CMR: với $\forall n \in N^*$ và n là số tự nhiên lẻ ta có $m^{2^n} - 1 \vdots 2^{n+2}$

Giải

Với $n = 1 \Rightarrow m^2 - 1 = (m + 1)(m - 1) \vdots 8$ (vì m + 1; m - 1 là 2 số chẵn liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 8)

Giả sử với n = k ta có $m^{2^k} - 1 \vdots 2^{k+2}$ ta phải chứng minh

$m^{2^{k+1}} - 1 \vdots 2^{k+3}$

Thật vậy $m^{2^k} - 1 \vdots 2^{k+2} \Rightarrow m^{2^k} - 1 = 2^{k+2}.q \quad (q \in z)$

$\Rightarrow m^{2^k} = 2^{k+2}.q + 1$

có $m^{2^{k+1}} - 1 = \left(m^{2^k}\right)^2 - 1 = \left(2^{k+2}.q + 1\right)^2 - 1 = 2^{k+4}.q^2 + 2^{k+3}.q$

$= 2^{k+3}(2^{k+1}q^2 + q) \vdots 2^{k+3}$

Vậy $m^{2^n} - 1 \vdots 2^{n+2}$ với $\forall$ n ≥ 1

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: CMR: $3^{3n+3} - 26n - 27 \vdots 29$ với $\forall$ n ≥ 1

Bài 2: CMR: $4^{2n+2} - 1 \vdots 15$

Bài 3: CMR số đ- ợc thành lập bởi 3^n chữ số giống nhau thì chia hết cho 3^n với n là số nguyên d- ơng.

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: T- ơng tự ví dụ 1.

Bài 2: T- ơng tự ví dụ 1.

Bài 3: Ta cần CM $\underbrace{\overline{aa..a}}_{3^n \text{ số a}} \vdots 3^n$ (1)

Với n = 1 ta có $\overline{aa...a} = \overline{111a} \vdots 3$

Giả sử (1) đúng với n = k tức là $\underbrace{\overline{aa..a}}_{3^k \text{ số a}} \vdots 3^k$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1 tức là phải chứng minh

$\underbrace{\overline{aa..a}}_{3^{k+1} \text{ số a}} \vdots 3^{k+1}$ ta có $3^{k+1} = 3.3^k = 3^k + 3^k + 3^k$

Có $\underbrace{\overline{aa..a}}_{3^{k+1} \text{ số a}} = \overline{\underbrace{a..a}_{3^k}\underbrace{a..a}_{3^k}\underbrace{a..a}_{3^k}} = \overline{aa..a}.10^{2.3^k} + \overline{aa..a}.10^{3^k} + \underbrace{\overline{a..a}}_{3^k}$

$= \underbrace{\overline{aa..a}}_{3^k}\left(10^{2.3^k} + 10^{3^k} + 1\right) \vdots 3^{k+1}$

7. Ph□ơng pháp 7: SỬ DỤNG ĐỒNG D□ THỨC

Giải bài toán dựa vào đồng d- thức chủ yếu là sử dụng định lý Euler và định lý Fermat

Ví dụ 1: CMR: $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$

Giải

Có 2222 ≡ - 4 (mod 7) ⇒ $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (-4)^{5555} + 4^{5555}$ (mod 7)

Lại có: $(-4)^{5555} + 4^{2222} = -4^{5555} + 4^{2222}$

$= -4^{2222}(4^{3333} - 1) = -4^{2222}\left((4^3)^{1111} - 1\right)$

Vì $4^3 = 64 \equiv$ (mod 7) $\Rightarrow (4^3)^{1111} - 1 \equiv 0$ (mod 7)

⇒ $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0$ (mod 7)

Vậy $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$

Ví dụ 2: CMR: $3^{2^{4n+1}} + 3^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 22$ với $\forall$ n ∈ N

Giải

Theo định lý Fermat ta có:

$3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

$2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Ta tìm d- trong phép chia là 2^{4n+1} và 3^{4n+1} cho 10

Có $2^{4n+1} = 2.16^n \equiv 2 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2^{4n+1} = 10q + 2$ $(q \in N)$

Có $3^{4n+1} = 3.81^n \equiv 3 \pmod{10}$

$\Rightarrow 3^{4n+1} = 10k + 3$ $(k \in N)$

Ta có: $3^{2^{4n+1}} + 3^{3^{4n+1}} + 5 = 3^{10q+2} + 2^{10k+3}$

$= 3^2.3^{10q} + 2^3.2^{10k} + 5$

$\equiv 1+0+1 \pmod 2$

$\equiv 0 \pmod 2$

mà $(2, 11) = 1$

Vậy $3^{2^{4n+1}} + 3^{3^{4n+1}} + 5 \vdots 22$ với $\forall$ $n \in N$

Ví du 3: CMR: $2^{2^{4n+1}} + 7 \vdots 11$ với $n \in N$

Giải

Ta có: $2^4 \equiv 6$ (mod) $\Rightarrow 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{10}$

$\Rightarrow 2^{4n+1} = 10q + 2$ $(q \in N)$

$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}} = 2^{10q+2}$

Theo định lý Fermat ta có: $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow 2^{10q} \equiv 1 \pmod{11}$

$2^{2^{4n+1}} + 7 = 2^{10q+2} + 7$

$\equiv 4+7 \pmod{11} \equiv 0 \pmod{11}$

Vậy $2^{2^{4n+1}} + 7 \vdots 11$ với $n \in N$ (ĐPCM)

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: CMR $2^{2^{6n+2}} + 3 \vdots 19$ với $n \in N$

Bài 2: CMR với $\forall$ $n \geq 1$ ta có

$5^{2n-1}.\ 2^{2n-1}5^{n+1} + 3^{n+1}.2^{2n-1} \vdots 38$

Bài 3: Cho số $p > 3$, $p \in (P)$

CMR $3^p - 2^p - 1 \vdots 42p$

Bài 4: CMR với mọi số nguyên tố p đều có dạng

$2^n - n$ $(n \in N)$ chia hết cho p.

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: Làm t- ơng tự nh- VD3

Bài 2: Ta thấy $5^{2n-1}.\ 2^{2n-1}5^{n+1} + 3^{n+1}.2^{2n-1} \vdots 2$

Mặt khác $5^{2n-1}.\ 2^{2n-1}5^{n+1} + 3^{n+1}.2^{2n-1} = 2^n(5^{2n-1}.10 + 9.\ 6^{n-1})$

Vì $25 \equiv 6 \pmod{19} \Rightarrow 5^{n-1} \equiv 6^{n-1} \pmod{19}$

$\Rightarrow 25^{n-1}.10 + 9.\ 6^{n-1} \equiv 6^{n-1}.19 \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19}$

Bài 3: Đặt $A = 3^p - 2^p - 1$ (p lẻ)

Dễ dàng CM $A \vdots 2$ và $A \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 6$

Nếu $p = 7 \Rightarrow A = 3^7 - 2^7 - 1 \vdots 49 \Rightarrow A \vdots 7p$

Nếu $p \neq 7 \Rightarrow (p, 7) = 1$

Theo định lý Fermat ta có:

$A = (3^p - 3) - (2^p - 2) \vdots p$

Đặt $p = 3q + r$ ($q \in N$; $r = 1, 2$)

$\Rightarrow A = (3^{3q+1} - 3) - (2^{3q+r} - 2)$

$= 3^r.27^q - 2^r.8^q - 1 = 7k + 3^r(-1)^q - 2^r - 1$ ($k \in N$)

với r = 1, q phải chẵn (vì p lẻ)

$\Rightarrow A = 7k - 9 - 4 - 1 = 7k - 14$

Vậy $A \vdots 7$ mà $A \vdots p$, $(p, 7) = 1 \Rightarrow A \vdots 7p$

Mà $(7, 6) = 1$; $A \vdots 6$

$\Rightarrow A \vdots 42p$.

Bài 4: Nếu $P = 2 \Rightarrow 2^2 - 2 = 2 \vdots 2$

Nếu n > 2 Theo định lý Fermat ta có:

$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

$\Rightarrow 2^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod p$ ($m \in N$)

Xét $A = 2^{m(p-1)} + m - mp$

$A \vdots p \Rightarrow m = kq - 1$

Nh- vậy nếu $p > 2 \Rightarrow p$ có dạng $2^n - n$ trong đó

$N = (kp - 1)(p - 1)$, $k \in N$ đều chia hết cho p

8. Ph□ơng pháp 8: SỬ DỤNG NGUYÊN LÝ ĐIRICHLET

Nếu đem n + 1 con thỏ nhốt vào n lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa từ 2 con trở lên.

Ví dụ 1: CMR: Trong n + 1 số nguyên bất kỳ có 2 số có hiệu chia hết cho n.

Giải

Lấy n + 1 số nguyên đã cho chia cho n thì đ-ợc n + 1 số d- nhận 1 trong các số sau: 0; 1; 2; …; n - 1

$\Rightarrow$ có ít nhất 2 số d- có cùng số d- khi chia cho n.

Giả sử $a_i = nq_1 + r$ $\quad 0 \le r < n$

$a_j = nq_2 + r$ $\quad a_1; q_2 \in N$

$\Rightarrow a_j - a_j = n(q_1 - q_2) \vdots n$

Vậy trong n +1 số nguyên bất kỳ có 2 số có hiệu chia hết cho n.

Nếu không có 1 tổng nào trong các tổng trên chia hết cho n nh- vậy số d- khi chia mỗi tổng trên cho n ta được n số dư là 1; 2; …; n - 1

Vậy theo nguyên lý Đirichlet sẽ tồn tại ít nhất 2 tổng mà chi cho n có cùng số d- $\Rightarrow$ (theo VD1) hiệu cùadr tổng này chia hết cho n (ĐPCM).

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: CMR: Tồn tại $n \in N$ sao cho $17^n - 1 \vdots 25$

Bài 2: CMR: Tồn tại 1 bội của số 1993 chỉ chứa toàn số 1.

Bài 3: CMR: Với 17 số nguyên bất kỳ bao giờ cũng tồn tại 1 tổng 5 số chia hết cho 5.

Bài 4: Có hay không 1 số có dạng.

19931993 … 1993000 … 00 $\vdots$ 1994

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: Xét dãy số 17, 17^2, …, 17^{25} (t- ơng tự VD2)

Bài 2: Ta có 1994 số nguyên chứa toàn bộ số 1 là:

1
11
111
…

$$\underbrace{111\ldots11}_{1994 \text{ số } 1}$$

Khi chia cho 1993 thì có 1993 số d- $\Rightarrow$ theo nguyên lý Đirichlet có ít nhất 2 số có cùng số d- .

Giả sử đó là

$a_i = 1993q + r$ $\qquad$ $0 \le r < 1993$

$a_j = 1993k + r$ $\qquad$ $i > j$; $q, k \in N$

$\Rightarrow a_j - a_j = 1993(q - k)$

$$\underbrace{111\ldots11}_{\text{i-j } 1994 \text{ số } 1}\underbrace{00\ldots0}_{\text{i số } 0} = 1993(q-k)$$

$$\underbrace{111\ldots11}_{\text{i-j } 1994 \text{ số } 1}.10^j = 1993(q-k)$$

mà $(10^j, 1993) = 1$

$$\underbrace{111\ldots11}_{1994 \text{ số } 1} \vdots 1993 \text{ (ĐPCM)}$$

Bài 3: Xét dãy số gồm 17 số nguyên bất kỳ là

$a_1, a_2, \ldots, a_{17}$

Chia các số cho 5 ta đ- ợc 17 số d- ắt phải có 5 số d- thuộc tập hợp{0; 1; 2; 3; 4}

Nếu trong 17 số trên có 5 số khi chia cho 5 có cùng số d- thì tổng của chúng sẽ chia hết cho 5.

Nếu trong 17 số trên không có số nào có cùng số d- khi chia cho 5 $\Rightarrow$ tồn tại 5 số có số d- khác nhau $\Rightarrow$ tổng các số d- là: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \vdots 10$

Vậy tổng của 5 số này chia hết cho 5.

Bài 4: Xét dãy số $a_1 = 1993$, $a_2 = 19931993$, …

$$a_{1994} = \underbrace{1993\ldots1993}_{1994 \text{ số } 1993}$$

đem chia cho 1994 $\Rightarrow$ có 1994 số dư thuộc tập {1; 2; …; 1993} theo nguyên lý Đirichlet có ít nhất 2 số hạng có cùng số d- .

Giả sử: a_i = 1993 … 1993 (i số 1993)

a_j = 1993 … 1993 (j số 1993)

$\Rightarrow a_j - a_j \vdots 1994$ $\qquad$ $1 \le i < j \le 1994$

$$\Rightarrow \underbrace{1993\ldots1993}_{\text{j-i số 1993}}.10^{ni} \vdots 1993$$

9. Ph□ơng pháp 9: PH□ƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

Để CM $A_{(n)} \vdots p$ (hoặc $A_{(n)} \vdots p$)

+ Giả sử: $A_{(n)} \vdots p$ (hoặc $A_{(n)} \vdots p$)

+ CM trên giả sử là sai

+ Kết luận: $A_{(n)} \vdots p$ (hoặc $A_{(n)} \vdots p$)

Ví du 1: CMR $n^2 + 3n + 5 \vdots 121$ với $\forall n \in N$

Giả sử tồn tại $n \in N$ sao cho $n^2 + 3n + 5 \vdots 121$

$\Rightarrow 4n^2 + 12n + 20 \vdots 121$ (vì $(n, 121) = 1$)

$\Rightarrow (2n + 3)^2 + 11 \vdots 121$ (1)

$\Rightarrow (2n + 3)^2 \vdots 11$

Vì 11 là số nguyên tố $\Rightarrow 2n + 3 \vdots 11$

$\Rightarrow (2n + 3)^2 \vdots 121$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 11 \vdots 121$ vô lý

Vậy $n^2 + 3n + 5 \vdots 121$

Ví du 2: CMR $n^2 - 1 \vdots n$ với $\forall n \in N^*$

Giải

Xét tập hợp số tự nhiên N^*

Giả sử $\exists n \geq 1, n \in N^*$ sao cho $n^2 - 1 \vdots n$

Gọi d là -ớc số chung nhỏ nhất khác 1 của n $\Rightarrow d \in (p)$ theo định lý Format ta có

$2^{d-1} \equiv 1 \pmod d \Rightarrow m < d$

ta chứng minh m\n

Giả sử $n = mq + r$ $(0 \leq r < m)$

Theo giả sử $n^2 - 1 \vdots n \Rightarrow n^{mq+r} - 1 \vdots n$

$\Rightarrow 2^r(n^{mq} - 1) + (2^r - 1) \vdots n \Rightarrow 2^r - 1 \vdots d$ vì $r < m$ mà $m \in N$, m nhỏ nhất khác 1 có tính chất (1)

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow$ m\n mà $m < d$ cũng có tính chất (1) nên điều giả sử là sai.

Vậy $n^2 - 1 \vdots n$ với $\forall n \in N^*$

BÀI TẬP T- ƠNG TỰ

Bài 1: Có tồn tại $n \in N$ sao cho $n^2 + n + 2 \vdots 49$ không?

Bài 2: CMR: $n^2 + n + 1 \vdots 9$ với $\forall n \in N^*$

Bài 3: CMR: $4n^2 - 4n + 18 \vdots 289$ với $\forall n \in N$

H- ỚNG DẪN - ĐÁP SỐ

Bài 1: Giả sử tồn tại $n \in N$ để $n^2 + n + 2 \vdots 49$

$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 8 \vdots 49$

$\Rightarrow (2n + 1)^2 + 7 \vdots 49$ (1) $\Rightarrow (2n + 1)^2 \vdots 7$

Vì 7 là số nguyên tố $\Rightarrow 2n + 1 \vdots 7 \Rightarrow (2n + 1)^2 \vdots 49$ (2)

Từ (1); (2) $\Rightarrow 7 \vdots 49$ vô lý.

Bài 2: Giả sử tồn tại $n^2 + n + 1 \vdots 9$ với $\forall$ n

$\Rightarrow (n + 2)(n - 1) + 3 \vdots 3$ (1)

vì 3 là số nguyên tố $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} n+2 \vdots 3 \\ n-1 \vdots 3 \end{array}\right. \Rightarrow (n + 2)(n - 1) \vdots 9$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3 \vdots 9$ vô lý

Bài 3: Giả sử $\exists$ n $\in$ N để $4n^2 - 4n + 18 \vdots 289$

$\Rightarrow (2n - 1)^2 + 17 \vdots 17^2$

$\Rightarrow (2n - 1) \vdots 17$

17 là số nguyên tố $\Rightarrow (2n - 1) \vdots 17 \Rightarrow (2n - 1)^2 \vdots 289$

$\Rightarrow 17 \vdots 289$ vô lý.