PHƯƠNG TRÌNH HÀM

MỤC ĐÍCH YÊU CẦU:

Giúp cho học sinh hình thành được phương pháp giải một số phương trình hàm, biết đoán nhận các dạng và định hướng được phương pháp giải.

<u>DẠNG 1</u>: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Ví dụ 1: Tìm hàm số f(x) biết rằng khi x ≠ 0 ta có $f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$

<u>Giải</u> : * Đặt t = $\dfrac{x}{1+x^2}$ thì $|t|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\le\left|\dfrac{x}{2x}\right|=\dfrac{1}{2}$

Mặt khác, t = $\dfrac{x}{1+x^2}$ Þ $\dfrac{x^4+1}{x^2}=\dfrac{1}{t^2}-2$. Ta có f(t) = $\dfrac{1}{t^2}-2$.

Vậy : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}-2\ \text{khi}\ 0\ne|x|\le\dfrac{1}{2}\\ \text{tuy y}\ \ \text{khi}\ |x|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Ví dụ 2 : Tìm hàm số f(x) xác định với mọi x thỏa điều kiện :

$(u-v)f(u+v)-(u+v)f(u-v)=4uv(u^2-v^2)$

<u>Giải</u> : * Đặt $\begin{cases}x=u+v\\ y=u-v\end{cases}$ thì $\begin{cases}u=\dfrac{x+y}{2}\\ v=\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$

u và v lấy giá trị bất kì thì x, y cũng lấy giá trị bất kì.

* Hệ thức đã cho trở thành :

$y.f(x)-x.f(y)=xy(x^2-y^2)$ (1)

⇔ $y[f(x)-x^3]=x[f(y)-y^3]$, ”x, y

Vì vậy với mọi giá trị tùy ý khác 0 của x và y, ta có :

$\dfrac{f(x)-x^3}{x}=\dfrac{f(y)-y^3}{y}=c$ Þ $\dfrac{f(x)-x^3}{x}=c$ (hằng số), ”x thỏa x ≠ 0

* Trong (1) cho x = 0, y = 1, ta có f(0) = 0

* Kết luận : $f(x)=x^3+cx$, ”x.

<u>DẠNG 2</u>: ĐƯA VỀ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 1: Tìm hàm số f(x) thỏa với mọi x ≠ ± $\dfrac{1}{2}$, ta có :

$f(x-1)-3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)=1-2x$ (1)

<u>Giải</u> : * Đặt : u – 1 = $\dfrac{x-1}{1-2x}$ thì x = $\dfrac{u}{2u-1}$

Khi đó (1) có thể viết : $f\left(\dfrac{u-1}{1-2u}\right)-3f(u-1)=\dfrac{1}{1-2u}$

Þ $f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)-3f(x-1)=\dfrac{1}{1-2x}$

Giải hệ :

$$\begin{cases} f(x-1)-3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)=1-2x & (1) \\ -3f(x-1)+f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)=\dfrac{1}{1-2x} & (2) \end{cases}$$

Þ f(x – 1) = $\dfrac{x^2+x+1}{4x+2}$ Þ f(t) = $\dfrac{t^2+t+1}{4t+2}$

Vậy : f(x) = $\dfrac{x^2+x+1}{4x+2}$ $\quad (x \neq \pm\dfrac{1}{2})$

Phép thử lại cho thấy hàm f(x) tìm được ở trên là thỏa đề.

Ví dụ 2: Tìm hàm f thỏa : f(x) + x. $f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)$ = 2 , $(x \neq \dfrac{1}{2})$ (1)

<u>Giải</u> : * Đặt : t = $\dfrac{x}{2x-1}$ thì $x=\dfrac{t}{2t-1}$ $\left(t \neq \dfrac{1}{2}\right)$

(1) ⇔ $f\left(\dfrac{t}{2t-1}\right)+\dfrac{t}{2t-1}.f(t)=2$ Þ $\dfrac{x}{2x-1}f(x)+f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)=2$ $\quad \left(x \neq \dfrac{1}{2}\right)$

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} f(x)+x.f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)=2 \\ \dfrac{x}{2x-1}f(x)+x.f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)=2x \end{cases} \quad (x \neq 0)$$

Ta có : $\dfrac{(x-1)^2}{2x-1}f(x)=2(x-1)$

* Nếu x ≠ 1 : f(x) = $\dfrac{2(2x-1)}{x-1}$ (2)

* Nếu x = 1 : từ (1) ta có : f(1) + f(1) = 2 ⇔ f(1) = 1.

Kiểm tra với x = 0 :

(2) cho : f(0) = 2

(1) cho : f(0) = 2

* Kết luận : Hàm f là hàm số định bởi :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(2x-1)}{x-1} & \text{neu } x \neq 1 \\ 1 & \text{neu } x = 1 \end{cases}$$

- Chú ý : t = $\dfrac{x}{2x-1}$ thì $x=\dfrac{t}{2t-1}$

Þ Hàm đối hợp

<u>DẠNG 3</u>: PHƯƠNG PHÁP THAY GIÁ TRỊ ĐẶC BIỆT

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm hàm f biết : f(x + y) + f(x – y) = 2f(x).cosy ,   ”x, y ∈ R

<u>Giải</u> : * Chọn x = 0, y = t ta được : f(t) + f(-t) = 2f(0).cost   (1)

Chọn : x = $\frac{\pi}{2}$, y = $\frac{\pi}{2}+t$, ta có : f(π + t) + f(-t) = $2f(\frac{\pi}{2}).\cos(\frac{\pi}{2}+t)$

$$= -2f(\frac{\pi}{2}).\sin t \quad (2)$$

Chọn : x = $\frac{\pi}{2}+t$, $y=\frac{\pi}{2}$, ta có :f(π + t) + f(t) = 0   (3)

Lấy (1) – (2) + (3) , ta được : 2f(t) = 2f(0).cost + $2f(\frac{\pi}{2})\sin t$

⇔ f(t) = f(0).cost + $f(\frac{\pi}{2})\sin t$

Vậy : f(x) = acosx + bsinx, với f(0) = a và f($\frac{\pi}{2}$) = b

<u>Ví dụ 2</u> : Tìm hàm f biết : a) f(x) + f(x + 1) = 1, ”x ∈R   (1)

b) 0 < x < 1 Þ f(x) = x   (2)

<u>Giải</u> : Từ a) ta có : f(x + 1) + f(x + 2) = 1   (3)

(1) và (3) cho : f(x + 2) = f(x) , ”x

Þ f tuần hoàn với ch kỳ là 2, do đó chr cần tìm f trên [0 ; 2]

* Xét 0 £ x £ 1 : Đặt t = x + 1 thì 1 £ t £ 2. Từ a) và b) cho :

x + f(x + 1) = 1 Þ f(x + 1) = 1 – x

Þ f(t) = 2 – t với 1 £ t £ 2

* Do vậy trên đoạn [0 ; 2] : f(x) = $\begin{cases} x & \text{neu } 0\le x\le 1 \\ 2-x & \text{neu } 1\le x\le \forall \end{cases}$

Suy ra : f(x) = $\begin{cases} x-2t & \text{neu } 2t\le x\le 2t+1 \\ 2t+2x & \text{neu } 2t+1\le x\le 2t+2 \end{cases}$ với t ∈ Z

Rõ hơn : f(x) = $\begin{cases} x-2t & \text{neu } 2t\le x\le 2t+1 \\ 2t+2-x & \text{neu } 2t+1\le x\le 2t+2 \end{cases}$ với t ∈ Z

<u>Ví dụ 3</u> : Tìm hàm số f(x) xác định trên R thỏa :

x.f(y) + y.f(x) = (x + y).f(x).f(y),”x, y ∈R

<u>Giải</u> :

Thay y bởi x ta có : x.f(x) + x.f(x) = 2x[f(x)]^2 ⇔ 2xf(x).[f(x) – 1] = 0, ”x ∈R.

Xét 2 trường hợp :

- TH1 : f(x) ≠ 0 với mọi x ≠ 0, ta có : $\begin{cases} f(x)=1, & \forall x\ne 0 \\ f(0) & \text{tuy y} \end{cases}$
- TH2 : Tồn tại x_0 sao cho f(x_0) = 0. Trong (1) thay y = x_0 ,ta có :

  xf(x_0) + x_0f(x) = (x + x_0).f(x).f(x_0)

  ⇔ x_0f(x) = 0   (do f(x_0) = 0)

  Þ f(x) = 0,”x

<u>Ví dụ 4</u> : Tìm cặp hàm số f(x) , g(x) thỏa điều kiện :

$$f(x) – f(y) = (x + y)g(x – y), ”x,y∈R$$

__Giải__ :

* Thay y = -x ta có : f(x) – f(-x) = 0, ”x∈R (1)
* Thay x bởi x + 1, y bởi x , ta có : f(x + 1) – f(x) = (2x +1)g(1) (2)
* Thay x bởi x + 1, y bởi -x , ta có : f(x + 1) – f(-x) = g(2x +1) (3)

Lấy (1) + (2) – (3) : g(2x +1) = (2x + 1)g(1)

Þ g(x) = ax với a = g(1)

* Trong hệ thức đã cho thay y = 0 ta được : f(x) – f(0) = xg(x) = ax^2

Þ f(x) = ax^2 +b với b = f(0)

* Thử lại ta thấy f(x) = ax^2 + b và g(x) = ax thỏa hệ thức đã cho.

Ví dụ 5 : Tìm hàm số f(x) xác định trên R thỏa mãn các điều kiện sau :

a) f(x) = 1

b) $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x,y$

c) $x \neq 0, f(x) = x^2.f(\frac{1}{x})$

__Giải__ : * Từ b) cho x = y = 0, ta có : f(0) = 2f(0) Þ f(0) = 0

* Từ b) cho x = -1, y = 1, ta có : f(-1+1) = f(-1) + f(1)

$\Rightarrow$ f(0) = f(-1) + f(1)

$\Rightarrow$ f(-1) = -f(1)

Mà f(0) = 0 và f(1) = 0 (do a)) nên f(-1) = 0

* $x \neq 0$ và $x \neq 1$:

Xét $f\left(\frac{x}{x+1}\right)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)$

Áp dụng b) ta có : $f\left(\frac{x}{x+1}\right)+f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f\left(\frac{x+1}{x+1}\right)=f(1)=1$ (1)

* Mặt khác áp dụng c) ta có :

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2.f\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2.f(1+x)$$

* $f\left(\frac{x}{x+1}\right)+f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x^2}{(x+1)^2}.f\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x+1)$ (3)

* (1) và (2) và (3) cho :

$$1=\frac{1}{(x+1)^2}\left[x^2.f\left(1+\frac{1}{x}\right)+f(x+1)\right]$$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = x^2.f(1) + x^2.f(\frac{1}{x}) + f(x) + f(1)$ (do b))

Mà f(1) và $x^2.f(\frac{1}{x}) = f(x)$ nên $x^2 + 2x + 1 = x^2 + f(x) + f(x) + 1$

$\Rightarrow$ f(x) = x. Thử lại ta thấy f(x) = x thỏa các điều kiện của bài toán.

Vậy : f(x) = x, $\forall x \in R$

* Kết luận : phối hợp 3 trường hợp :

- $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
- $x = -1 \Rightarrow f(-1)\ \ -1$
- $x \neq 0, x \neq 1, f(x)\ = x, \forall x \in R$

Ví dụ 6: Tìm hàm số $f : R \to R$ thỏa mãn 3 tính chất :

a) $f(1) = 1$
b) $f(x + y) – f(x) – f(y) = 2xy$
c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$, $\forall x \neq 0$

<u>Giải</u> :

i) Cách 1: * cho x = 0 : Từ b) $\Rightarrow f(0) = 0$

* Từ b) đặt $x = y = \frac{t}{2}$, ta có : $f(t) – 2f(\frac{t}{2}) = ,\forall\ t \in R$ (1)

* Từ b) đặt $x = y = \frac{1}{t}$, $t \neq 0$,ta có : $f\left(\frac{2}{t}\right) - 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t^2}$, $\forall t \neq 0$

Áp dụng c) ta có : $f\left(\frac{2}{t}\right) = \dfrac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{f\left(\frac{t}{2}\right)^4}$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{f(t)}{t^4}$$

$$\Rightarrow \frac{f\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\frac{t}{2}\right)^4} - \frac{2f(t)}{t^4} = \frac{2}{t^2},\quad \forall\ t \neq 0$$

Hay $8.f(\frac{t}{2}) – f(t) = t^2$, $\forall t \neq 0$

* Từ (1) và (2) phối hợp f(0) = 0,suy ra $f(x) = x^2$ thỏa đề.

ii) Cách 2: Làm tương tự ví dụ 5.

* x = 0 : Từ b) $\Rightarrow$ f(0) = 0
* x = -1, y = 1, từ b) cho : f(-1+1) - f(-1) - f(1) = -2

$\Rightarrow$ f(0) - f(-1) - f(1) = 2

$\Rightarrow$ f(-1) + 1 = 2 . Vậy : f(-1) = 1

(do f(0) = 0 và f(1) = 1)

* $x \neq 0$ và $x \neq 1$:

Áp dụng b) ta có : $f\left(\frac{x}{x+1}\right) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f\left(\frac{x+1}{x+1}\right) - \frac{2x}{x+1}.\frac{1}{x+1}$

$$= f(1) - \frac{2x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2x}{(x+1)^2} \qquad (1)$$

* Mặt khác áp dụng c) ta có :

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4 .f\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^4.f(1+x)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{x+1}\right)+f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{(x+1)^4}[x^4.f\left(1+\frac{1}{x}\right)+f(x+1)] \qquad (2)$$

* (1) và (2) cho :

$$1=\frac{1}{(x+1)^2}\left[x^2.f\left(1+\frac{1}{x}\right)+f(x+1)\right]$$

$\Leftrightarrow$ (x + 1) = x^4 +2f(x) + 1 + $4x^3$ + 2x

$\Rightarrow$ f(x) = x^2. Thử lại ta thấy f(x) = x^2 thỏa đề.

Ví dụ 7 : Xác định hàm số f: R $\rightarrow$ R sao cho BĐT sau đúng $\forall$ x, y, z bất kỳ thỏa :

$$\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x).f(yz)\ge\frac{1}{4} \qquad (1)$$

<u>Giải</u> :

* x = y = 0 :

(1) có dạng : $\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0)-f^2(0)\ge\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$ f(0) – f^2(0) ³ $\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow \left[f(0)-\frac{1}{2}\right]^2\le 0 \quad \Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}$

* x = y = z = 1 : (1) cho : $f(1)-f^2\left(\frac{1}{4}\right)\ge\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \left[f(1)-\frac{1}{2}\right]^2\le 0$

$$\Rightarrow f(1)=\frac{1}{2}$$

* x = 0, y = 1: (1) cho : f(0)[1 – f(z)] ³ $\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow f(z)\le\frac{1}{2}$ hay $f(x)\le\frac{1}{2}$

* y = z = 1 : f(x)[1 – f(1)] ³ $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ f(x) ³ $\frac{1}{2}$

* Kết luận : f(x) = $\frac{1}{2}$, $\forall x\in R$

Ví dụ 8 : Xác định hàm số f: [0 ; +¥) $\rightarrow$ [0 ; +¥) thỏa các điều kiện :

a) f[xf(y)].f(y) = f(x+y)
b) f(2) = 0
c) f(x) $\neq$ 0 với 0 £ x £ 2

<u>Giải</u> :

* y = 2 : a) cho : f[xf(2)].f(2) = f(x + 2)

Theo b) f(2) = 0 $\Rightarrow$ f(x + 2) = 0, $\forall$x ³ O

$\Rightarrow$ f(x) = 0 , $\forall$x ³ 2

* 0 £ y < 2 :

- chọn x = 0, từ a) : f(0) = 1
- x $\neq$ 0. Thay x = 2 – y, ta có : f[(2 – y)f(y)].f(y) = f(2) = 0

$\Rightarrow$ (2 – y)f(y) ³ 2 $\Rightarrow$ f(y) ³ $\frac{2}{2-y}$ ³ 1 (*)

Chứng minh f tăng trên [0 ; 2) bằng cach thay x bởi x – y   (0 £ y < x < 2)
Với x + y < 2 : f[xf(y)] £ f(x+y) $\Rightarrow$ x.f(y) £ x + y

$$\Rightarrow f(y) \text{ £ } 1 + \frac{y}{2}, \ \forall x < 2 - y$$

Cho x$\rightarrow$ 2 – y thì : f(y) = $\dfrac{2}{2-y}$, $\forall$y$\in$[0 ; 2)

Vậy : $\left[\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{2}{2-x}, \quad \forall x \in [0;2) \\ f(x) = 0, \quad \forall x \geq 2 \end{array}\right.$

DẠNG 4: PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ, GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1 \Leftrightarrow$ ***Mọi dãy (x_n) có limx_n = x_o thì limf(x_n) = 1***

2) f liên tục tại x_o $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_o)$

II. CÁC VÍ DỤ:

Ví dụ 1 : Cho hàm số f(x) xác định trên toàn trục số và bị chặn trên (-a ; a) với a là một số dương đã cho. Tìm hàm số f(x) biết rằng :

$$f(x) = \frac{1}{2} f(\frac{x}{2}) + x, \ \forall\ x \in R \qquad (1)$$

<u>Giải</u> : $f(x) = \dfrac{1}{2} f(\dfrac{x}{2}) + x$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^2} . f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \frac{x}{2^2}$$

$$\frac{1}{2^2} f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \frac{1}{2^3} f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \frac{x}{2^4}$$

. . . .

$$\frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{x}{2^{2n}}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được :

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}\right)$$

Với bất kì x đã cho,ta chỉ cần chọn n đủ lớn thì sẽ có : $-a < \dfrac{x}{2^{n+1}} < a$

Mặt khác,vì f(x) bị chặn trong (-a ; a) nên $\exists$c > 0 sao cho $f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) \leq c$

Qua giới hạn đẳng thức (2) khi n $\rightarrow$ ¥ ta được :

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0 + x\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)$. Vậy : f(x) = $\dfrac{4}{3}x$

Ví dụ 2 : Cho x∈R, α ≠ ± 1. Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R_+ thỏa điều kiện : $f(x^{\alpha}) = f(x)$, $\forall x\in R_+$ (1)

<u>Giải</u> :

Nếu |α| < 1 : từ (1) ta nhận được : $f(x) = f(x^{\alpha}) = \ldots = f(x^{\alpha^n})$, $\forall x\in R_+$, $\forall x\in N$

Suy ra : $f(x) = \lim f(x^{\alpha^n}) = f(1)$, $\forall x\in R_+$

* |α| > 1 : (1) cho $f(x) = f(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \ldots = f(x^{\frac{1}{\alpha^n}})$, $\forall x\in R_+$, $\forall x\in N$

Suy ra : $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{\alpha^n}}) = f(1)$, $\forall x\in R_+$.

* Kết luận : f(x) = c, c ∈R, $\forall x\in R_+$.

Ví dụ 3 : Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R thỏa điều kiện :

$f(x^2).\ f(x) = 1,\ \forall x\in R$ (1)

<u>Giải</u> : Từ (1) ⇒ f(x) ≠ 0, ∀x

* x = 0 : $f^2(0) = 1$ ⇒ f(0) = ±1
* x = 1 : $f^2(1) = 1$ ⇒ f(1) = ±1
* Thay x bởi –x. Ta có : $f^2(x).f(-x) = 1 = f(x^2).f(x)$

⇒ f(-x) = f(x), ∀x∈R (2)

* 0 £ x £ 1. Khi đó :

$$f(x) = \frac{1}{f(x^2)} = f(x^4)$$

$\Rightarrow f(x^4) = f[(x^4)^4] = f(x^{4^2})$

$f(x^4) = f[(x^4)^4] = f(x^{4^2})$

$\Rightarrow f(x) = f(x^4) = f[(x^4)^4] = f(x^{4^n})$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{4^n}) \\ \text{Vì } 0 \le x \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = f(0) = \pm 1$$

* x ³ 1 : Tương tự ta có : $f(x) = \dfrac{1}{f(x^{\frac{1}{2}})} = f(x^{\frac{1}{4}}) = f\left[\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}\right] = f\left(x^{\frac{1}{4^n}}\right)$

$\Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x^{\frac{1}{4^n}}\right) = f(1) = \pm 1.$

* Kết luận : f(x) = 1,∀x∈R

f(x) = -1, ∀x∈R

Ví dụ 4 : Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R thỏa điều kiện :

$f(x^2) - f(x) = x(x-1),\ \forall x\in R$ (1)

<u>Giải</u> : Đặt : f(x) = x + g(x), ∀x∈R

Ta có : $f(x^2) = x^2 + g(x^2)$. Thay (1) vào ta có : $x^2 + g(x^2) - x - g(x) = x(x-1)$

$$\Leftrightarrow x^2 + g(x^2) - x - g(x) = x^2 - x$$

Vậy : $g(x^2) = g(x), \forall x \in R$

Theo VD2 thì $g(x) = c \in R, \forall x \in R$

* Kết luận : $f(x) = x + c, \forall x \in , c \in R$

Ví dụ 5 : Cho $n \in N^*$. Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên R thỏa điều kiện :

$$C_n^0 f(x) + C_n^1 f(x^2) + \ldots + C_n^{n-1} f(x^{2^{n-1}}) + C_n^n f(x^{2^n}) = 0 \qquad (*)$$

<u>Giải</u> : (*) $\Leftrightarrow \sum_{k=o}^{n} C_n^k f(x^{2^k}) = 0$

Đặt : $g_n(x) = \sum_{k=o}^{n} C_n^k f(x^{2^k}) = 0$

Ta có : $g_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^k})$

$$g_{n-1}(x^2) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^{k+1}})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f(x^{2^k})$$

$$g_{n-1}(x) + g_{n-1}(x^2) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^k}) + \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f(x^{2^k})$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}).f(x^{2^k})\right] + C_{n-1}^0 f(x) + C_{n-1}^{n-1} f(x^{2^k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k f(x^{2^k}) + C_{n-1}^0 f(x) + C_n^n f(x^{2^k})$$

$$= \sum_{k=o}^{n} C_n^k f(x^{2^k}) = 0$$

Ta được : $g_{n-1}(x) + g_{n-1}(x^2) = g_n(x) = 0$ (1)

Từ đó suy ra : $g_{n-1}(x)$ là hàm liên tục và $g_{n-1}(0) = 0$, $g_{n-1}(1) = 0$

* 0 £ x £ 1 :

(1) cho $g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x^2) = -[-g_{n-1}(x^4)] = g_{n-1}(x^4) = \ldots$

Suy ra : $g_{n-1}(x) = g_{n-1}(x^4) = -g_{n-1}(x^{4^n})$

Do đó : $g_{n-1}(x) = g_{n-1}(0) = 0$

* x > 1 :

Khi đó (1) cho : $g_{n-1}(x) = g_{n-1}(x^{\frac{1}{4}}) = -[-g_{n-1}(x^{\frac{1}{4}})] = g_{n-1}(x^{\frac{1}{4^2}} = \ldots = g_{n-1}(x^{\frac{1}{4^n}})$

Do đó khi qua giới hạn n → ¥ , ta có : $g_{n-1}(x) = g_{n-1}(1) = 0$, ∀x ³ 0

Vậy : $g_{n-1}(x) = 0$, ∀x ³ 0

$\Rightarrow g_{n-1}(x) = 0, \forall x$

Kết hợp với (1) ta được : $g_{n-1}(x) = g_{n-2}(x) = \ldots = g_o(x) = f(x) = 0$

Kết luận : $f(x) = 0, \forall x \in R$

Ví dụ 6 : Tìm tất cả các hàm số f: R → R liên tuc thỏa điều kiện :

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \forall x \in R$$

<u>Giải</u> : Đặt : $g(x) = f(x) - x, \forall x \in R$

Ta có g là đạo hàm liên tục trên R
$g(x) = f(x) - x$
$g(x^2) = f(x^2) - x^2$
$\Rightarrow g(x) + g(x^2) = f(x) + f(x^2) - x - x^2$
$= x + x^2 - x - x^2 = 0$

- $g(0) = 0$
- $g(1) = 0$
- $g(x) = - g(x^2)$

$\Rightarrow g(-x) = -g((-x)^2) = -g(x^2)$
$\Rightarrow g(-x) = g(x)$
Do đó ta chỉ cần xét trên [0 ; +¥)
* $g(x) = -g(x^2) = g(x^4)$, $\forall x > 0$
$= \ldots\ldots = g(x^{4^n})$
* Nếu $0 < x < 1$: g(x) liên tục nên $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x^{4^n}) = g(0) = 0$
$\Rightarrow g(x) = g(0) = 0$
* $x > 1$:
$g(x) = g(x^{\frac{1}{4}}) = g(x^{\frac{1}{4^2}}) = \ldots = g(x^{\frac{1}{4^n}})$
g(x) liên tục nên : $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x^{\frac{1}{4^n}}) = g(1) = 0$
* Vậy : $g(x) = 0, \forall x \geq 0$
g(x) là hàm chẵn nên : $g(x) = 0, \forall x \in R$
Hay : $f(x) = x, \forall x\in R$
Ví dụ 7 : Xác định tất cả các hàm liên tục f sao cho với mọi số thực x và y thì :
$$f(x+y).f(x - y) = [f(x).f(y)]^2 \qquad (1)$$
<u>Giải</u> : * Ba nghiệm hàm đặc biệt : $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ hoặc $f(x) = -1$
* $y = 0$: (1) có dạng $[f(x)]^2 = [f(x)]^2.[f(0)]^2$
Nếu f không phải nghiệm hàm đặc biệt $f(x) = 0$ thì $f(x) \neq 0$ với một giá trị nào đó của x ,do đó $[f(0)]^2 =1$
Nên : $f(0) = \pm1$
Vì f thỏa (1) và –f cũng vậy nên chỉ cần xét trường hợp $f(0) = 1$
* $x = 0$: (1) có dạng $[f(y)]^2 = f(y).f(-y)$
Nếu $f(y) \neq 0$,chia 2 vế cho f(y) ta được : $f(-y) = f(y)$
$\Rightarrow$ f là hàm số chẵn
* $x = y \neq 0$: (1) trở thành : $f(x + x).f(0) = [f^2(x)]^2$
Ta có : $f(2x) = [f(x)]^4$ (*)
* Lưu ý rằng : $f(x) = 0$ thì $f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$
Do đó tại 1 lân cận nào đó của 0 chứa x mà $f(x) = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(0)$
Thế mà $f(0) = 1$ và f liên tục điều đó không xảy ra.
Tóm lại, $f(x) \neq 0$, kết hợp với (*) ta luôn có : $f(x) > 0$
* Dùng quy nạp,chứng minh rằng :
$\forall n\in N, f(nx) = [f(x)]^{n^2}$ (2)

- $n = 1$: Hiển nhiên có (2)
- $n = 2$: Theo (*) ta có (2)
- Cho $y = kx$ thì (1) trở thành : $f[(k+1).x].f[(k-1).x] = [f(x)]^2.[f(kx)]^2$
- Do (2) , ta có : $f[(k-1).x] = [f(x)]^{(k-1)^2}$

$$f(kx) = [f(x)]^{k^2}$$

suy ra : $f[(k+1).x].f[(k-1).x] = f[(k+1).x].\ [f(x)]^{(k-1)^2}$

$$= [f(x)]^2.[f(x)]^{2k^2}$$

$\Rightarrow f[(k+1).x] = [f(x)]^{2+2k^2-(k-1)^2} = [f(x)]^{(k+1)^2}$

Đẳng thức đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có :

$\forall n \in N,\ f(nx) = [f(x)]^{n^2}$ (3)

* Trong kết quả chứng minh trên : $\forall n \in N,\ f(nx) = [f(x)]^{n^2}$

Thay $x = \dfrac{1}{n}$, ta có : $f\left(n.\dfrac{1}{n}\right) = [f(x)]^{n^2} = \left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{n^2}$

Hay : $f(1) = \left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{n^2}$

* Trong (3) cho $n = 1$, $x = \dfrac{1}{n}$. Ta có $x = 1$, thay n bởi $\dfrac{1}{n}$

$f(\dfrac{1}{n}) = [f(1)]^{\frac{1}{n^2}}$

* Trong (3) cho $n = m$ và $x = \dfrac{1}{n}$

$f(m.\dfrac{1}{n}) = \left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{m^2}$

Do đó : $f(\dfrac{m}{n}) = [f(1)]^{\frac{m^2}{n^2}}$

Vậy mọi giá trị hữu tỉ x ta đều có : $f(x) = [f(1)]^{x^2}$ (4)

* Do f liên tục (4) còn đúng với mọi giá trị vô tỉ (xem lũy thừa với số mũ tùy ý SGK 11)

* Hai vế của (4) đều chẵn $\Rightarrow$ (4) còn đúng với mọi giá trị thực âm của x.

Kết hợp : $f(0) = 1$

$\Rightarrow \forall x \in R : f(x) = [f(1)]^{x^2}$ (5)

Để ý rằng nếu f thỏa (5) thì – f cũng thỏa (5)

Nên (5) cho : $\forall x \in R : f(x) = \pm a^{x^2}$ $(a > 0,\ a = 1)$ (6)

Từ (6) và kể cả 3 nghiệm hàm đặc biệt ta có : $\forall x \in R : f(x) = 0$

Hay $\forall x \in R : f(x) = \pm a^{x^2}$ $(a > 0)$

III. BẢY BÀI TOÁN CƠ BẢN VẬN DỤNG TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC :

1) Bài toán 1: (Phương trình hàm Cauchy)

Xác định các hàm f(x) liên tục trên R và thỏa mãn điều kiện :

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y\in R \qquad (1)$$

Giải :

* $x = y = 0$: $f(0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$
* $x = y \neq 0$: (1) cho $f(x+x) = 2f(x),\ \forall x\in R$ (2)
* $y = -x$: (1) cho $f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$
* $y = 2x$: Ta có : $f(3x) = f(x) + f(2x) = f(x) + 2f(x) = 3f(x)$
* Giả sử với $k\in N^*$, $f(kx) = kf(x),\forall x\in R$

Khi đó : $f[(k+1)x] = f(kx+x) = f(kx) + f(x) = kf(x) + f(x) = (k+ 1)f(x)$

Từ đó theo nguyên lý quy nạp : $f(nx) = nf(x),\ \forall x\in R$ (3)

+ Kết hợp với tính chất : $f(-x) = - f(x),\forall x\in R$ ta được :

$$f(mx) = mf(x),\ \forall x,m\in R$$

+ Từ (2) ta có : $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) = 2^2 f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \ldots = 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

Từ đó suy ra : $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} f(x),\ \forall x,\ n\in R$ (4)

* (3) và (4) cho : $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n} f(1),\ \forall m\in Z,\ n\in N^*$.
* Giả sử α là số vô tỉ ta tìm được dãy số hữu tỉ (r_k) mà : $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \alpha$

Khi đó : $\lim\limits_{k\to\infty} r_k.x = \alpha.x$

Từ đó : $f(\alpha.x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(r_k.x) = \lim\limits_{k\to\infty} r_k.f(x) = \alpha f(x)$

Vì vậy $\forall x\in R,\forall \alpha\in R$ ta đều có : $f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$

Với $x = 1$ thì $f(\alpha) = \alpha.f(1)$ nên $f(x) = xf(1),\forall x\in R$

Đặt $a = f(1)$, ta có $f(x) = ax,\ \forall x\in R,\ a = f(1)$

Thử lại : $f(x) = ax$ thỏa (1)

Kết luận : $f(x) = ax,\ \forall a\in R$

2) Bài toán 2 : Xác định hàm f(x) liên tục trên R và thỏa :

$$f(x+y) = f(x).f(y),\ \forall x,y\in R \qquad (2)$$

Giải :

* $f(x) = 0$ là một nghiệm
* $f(x) \neq 0$: $\exists x_o\in R$: $f(x_o) \neq 0$. Theo (2) : $f(x_o) = f[x+(x_o - x)] = f(x).f(x_o - x)$

Suy ra : $f(x_o - x) \neq 0,\ \forall x\in R$

Và $f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0,\ \forall x\in R$

Đặt : $\ln f(x) = g(x)$ ta có : $f(x) = e^{g(x)}$

Khi đó g(x) liên tục trên R và : $g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln[f(x).f(y)]$

$$= \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y),\forall x,y\in R$$

$\Rightarrow f(x) = e^{bx} = a^x$

3) Bài toán 3 : Xác định hàm f(x) liên tục trên R và thỏa điều kiện :

$$\begin{cases} f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)},\ \forall x,y\in R \\ f(x)\neq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Giải : Đặt : t = x – y thì x = t + y

(3) trở thành : $f(t)=\dfrac{f(x+t)}{f(y)}$

$\Leftrightarrow$ f(t).f(y) = f(t + y)

f(y) ≠ 0

Theo bài toán 2 $\Rightarrow$ f(x) = a^x và a > 0 tùy ý

4) Bài toán 4 : Xác định hàm số f(x) liên tục trên R\{0} thỏa điều kiện :

$$f(xy) = f(x).f(y),\ \forall x,y\in R\backslash\{0\} \qquad (4)$$

Giải : * y = 1 : (4) trở thành : f(x) = f(x). f(1)

$\Leftrightarrow$ f(x) [1 – f(1)] = 0, $\forall x\in R$

- TH1: f(1) ≠ 1. Ta có : f(x) = 0, $\forall x$, nghiệm này thỏa (4)
- f(1) = 1. Ta có : 1 = f(1) = $f\left(x.\dfrac{1}{x}\right)$ = f(x). $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall x\in R\backslash\{0\}$

$\Rightarrow$ f(x) ≠ 0, $\forall x\in R\backslash\{0\}$

Do đó : $f(x^2) = f(x.x) = f(x).f(x) = [f(x)]^2 > 0, \forall x > 0$

* x, y $\in R^+$:

- Đặt $\begin{cases} x=e^u \\ y=e^v \end{cases}$ thì $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$
- Đặt $f(e^t) = g(t)$

  $g(u+v) = f(e^{u+v}) = f(e^u.e^v) = f(e^u).f(e^v) = g(u).g(v)$

$\Rightarrow$ Theo bài toán 2 ta có : $g(t) = a^t$, $\forall t\in R$ và a > 0

$\Rightarrow$ $f(x) = f(e^u) = g(u) = a^u$

$= a^{\ln x} = (e^{\ln a})^{\ln x} = x^{\ln a} = x^{\alpha}$, $\forall x\in R$ và $\alpha = \ln a$ (*)

* x, y $\in R^-$ thì x.y $\in R^+$.

Cho y = x, (4) cho : f(x.x) = f(x). f(x)

Hay : $[f(x)]^2 = f(x^2) = (x^2)^{\beta} = (x^{\beta})^2$, $\forall x\in R$, $\beta\in R$.

Do f liên tục nên : f(x) = $\begin{cases} |x|^{\beta},\ \forall x\in R^- \\ -|x|^{\beta},\ \forall x\in R^- \end{cases}$ (**)

* Kết hợp : (*) và (**) ta có :

- f(x) = 0, $\forall x\in R\backslash\{0\}$
- f(x) = $|x|^{\alpha}$, $\forall x\in R\backslash\{0\}$ và $\alpha\in R$
- f(x) = $\begin{cases} |x|^{\beta},\ \forall x\in R^+ \\ -|x|^{\beta},\ \forall x\in R^-,\ \beta\in R \end{cases}$

5) Bài toán 5 : Xác định các hàm số f(x) liên tục trên R\{0} thỏa điều kiện :

$$F(xy) = f(x) + f(y),\ \forall x, y\in R\backslash\{0\} \qquad (5)$$

Giải :

a) x, y $\in R^+$: Đặt $x = e^u$, $y = e^v$ và $f(e^t) = g(t)$

Ta có : f(xy) = f(x) + f(y) $\Leftrightarrow$ $f(e^u.e^v) = f(e^u) + f(e^v)$

$\Leftrightarrow f(e^{u+v}) = f(e^u) + f(e^v)$

$\Leftrightarrow g(u+v) = g(u) + g(v)$

Theo bài toán 1 $\Rightarrow g(t) = bt, t \in R$

$\Rightarrow f(x) = f(e^u) = g(u) = bu$

Mà $x = e^u \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow f(x) = b\ln x$

b) $x, y \in R^-$ thì $x.y \in R^+$.

Cho y = x : (5) cho : $f(x.x) = f(x) + f(x)$ hay $f(x) = \frac{1}{2}f(x^2)$

$= \frac{1}{2}b.\ln(x^2)$

$= b.\ln|x|, \forall x \in R^-, b \in R$

Thử lại ta thấy $f(x) = b.\ln|x|$ với $b \in R$ thỏa điều kiện đề bài

* Kết luận : $f(x) = b.\ln|x|, \forall x \in R\backslash\{0\}$ và $b \in R$.

6) Bài toán 6 : Xác định các hàm f(x) liên tục trên R thỏa :

$$F(xy) = f(x) - f(y), \forall x, y \in R \qquad (6)$$

<u>Giải</u> :

* x, y = 0 : (6) cho $f(0) = f(0) - f(0) = 0$
* $\forall x \in R, y = 0$: $f(0) = f(x)$ hay $f(x) = 0$
* Ngược lại $f(x) = 0$ thỏa (6).

7) Bài toán 7 : Xác định các hàm f(x) liên tục trên R^+ thỏa mãn các điều kiện :

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), \forall x, y \in R^+.$$

<u>Giải</u> : Đặt : $\frac{x}{y} = t$ thì $x = ty$

(7) $\Leftrightarrow f(t) = f(ty) - f(y)$

$\Leftrightarrow f(ty) = f(t) + f(y)$

Theo kết quả bài toán 5 $\Rightarrow f(x) = b.\ln x, \forall x \in R^+, b \in R$

IV. BẢY BÀI TOÁN CƠ BẢN VỚI GIẢ THIẾT HÀM f(x) XÁC ĐỊNH VÀ CÓ ĐẠO HÀM TRÊN R :

1) Bài toán 1 : Tìm các hàm số f(x) xác định và có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện : $f(x+y) = f(x) + f(y)$

<u>Giải</u> : Lấy đạo hàm hai vế theo biến số x, ta có : $f'(x+y) = f'(x), \forall x,y \in R$

Tương tự, lấy đạo hàm theo biến số y, ta có : $f'(x+y) = f'(y), \forall x,y \in R$

$\Rightarrow f'(x) = f'(y), \forall x,y \in R$

$\Rightarrow f'(x) = const$ hay $f(x) = ax + b$

Vận dụng : $f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow b = 0$

Vậy : $f(x) = ax, \forall x \in R$

2) Bài toán 2 : Tìm các hàm số f(x) xác định và có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện : $f(x+y) = f(x).f(y), \forall x,y \in R \qquad (2)$

<u>Giải</u> :

* Nhận xét rằng $f(x) = 0$ là một nghiệm của (2)
* $f(x) \neq 0 \Rightarrow \exists x_o \in R : f(x_o) \neq 0$

(2) cho $f(x_o) = f[x+(x_o - x)] = f(x).f(x_o - x) \neq 0, \forall x \in R$

Suy ra : $f(x) \neq 0, \forall x \in R \qquad (1)$

Mặt khác từ (2) ta có : $F(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)^2\right] \geq 0, \forall x \in R$ (2)

* (1) và (2) $\Rightarrow$ f(x) > 0, $\forall$x
Lấy đạo hàm 2 vế theo biến x và y ta lần lượt có :
f ’(x+y) = f ’(x) . f(y) , $\forall$x,y$\in$R
f ’(x+y) = f(x) . f(y) , $\forall$x,y$\in$R
Các đẳng thức trên cho : f’(x). f(y) = f(x). f’(y), $\forall$x,y$\in$R

Do f(x) $\neq$ 0,f(y) $\neq$ 0, ta có : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)}$,$\forall$x,y$\in$R

Hay [lnf(x)] ’ = a $\Leftrightarrow$ f(x) = e^{ax+b}

Thế vào (2) ta có : $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = e^{ax} \text{ vôi } a \in R, b = 0 \end{array}\right.$

Kết luận : $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = e^{ax} \text{ vôi } a \in R, \forall x \in R \end{array}\right.$

3) Bài toán 3 : Xác định các hàm f(x) (liên tục) xác định và khả vi trên R^*_+ thỏa mãn điều kiện : f(xy) = f(x) + f(y) , $\forall$x, y$\in R^*_+$. (3)

<u>Giải</u> : Lần lượt lấy đạo hàm 2 vế với biến số x và y, ta có :

y.f ’(xy) = f ’(x), $\forall$x, y$\in R^*_+$
x.f ’(xy) = f ’(y), $\forall$x, y$\in R^*_+$

Các đẳng thức trên cho :

x.f’(x) = y. f’(y), $\forall$x, y$\in R^*_+$

Do đó : x.f ’(x) = C, $\forall$x$\in$R
$\Rightarrow$ f(x) = C.lnx + d
Thế vào (3) $\Rightarrow$ d = 0
Vậy : f(x) = C.lnx ($\forall$x > 0, C tùy ý)

4) Bài toán 4 : Xác định các hàm số f(x) xác định và đồng biến trên R thỏa mãn điều kiện : f(x + y) = f(x) + f(y) , $\forall$x, y$\in$R. (4)

<u>Giải</u> :

* y = 0 : (4) cho f(x) = f(x) + f(0) $\Rightarrow$ f(0) = 0
* y = x : (4) cho f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x) , $\forall$x$\in$R

$\Rightarrow$ f(x) > 0 khi x > 0 và f(mx) = mf(x),$\forall$x$\in$R, m$\in N^*$ (*)

Trong (*) thay x bởi $\frac{x}{m}$, ta được : $f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}f(x)$, $\forall$x$\in$R, m$\in N^*$

Do f(x) đồng biến trên R, nên ta có :

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) < f(x) < f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$$

Suy ra : $-\frac{1}{n}f(1) < f(x) < \frac{1}{n}f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$

Do đó : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Tóm lại : f(x) là hàm số liên tuc tại x = 0 và $\forall x\in R$

$$\lim_{y\to 0}[f(x+y)-f(x)]=\lim_{y\to 0} f(y)=0$$

$\Rightarrow$ f liên tục tại mọi điểm x = 0 và $\forall x\in R$

Theo bài toán 1,ta có : f(x) = ax, a > 0

Kết luận : f(x) = ax, $\forall$x > 0, với a > 0 tùy ý.

<u>DẠNG 5</u> : SỬ DỤNG ĐẠO HÀM VÀ NGUYÊN HÀM.

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1) Hàm số f được gọi là có đạo hàm tại x_o nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Kí hiệu : f ’(x_o) = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

2) Nếu F ’(x) = f(x), $\forall x\in(a\,;\,b)$ thì F(x) là nguyên hàm của f(x)

Kí hiệu : F(x) = $\int f(x)dx$

II. VÍ DỤ MẪU :

Cho hàm số f: R $\to$ R thỏa các điều kiện sau :

i) f(x) ^{3} 1 + x, $\forall x\in R$

ii) f(x+y) ^{3} f(x). f(y), $\forall x, y\in R$

Chứng minh rằng : a) f(x) > 0 , $\forall x\in R$

b) $\forall x\in R$, $\forall$h thỏa $|h| < 1$, ta có :

$$h.f(x)\le f(x+h)-f(x)\le\frac{h.f(x)}{1-h}$$

c) Đạo hàm f’(x) luôn tồn tại, từ đó tìm f(x)

<u>**Giải**</u> :

a) Từ ii) cho x = y = $\dfrac{u}{2}$, ta có : $f(u)\ge\left[f\left(\dfrac{u}{2}\right)\right]^2$

$$f\left(\frac{u}{2}\right)\ge\left[f\left(\frac{u}{2^2}\right)\right]^2$$

$\Rightarrow$ f(u) ^{3} $\left[f\left(\dfrac{u}{2^2}\right)\right]^{2^2}$

$$f\left(\frac{u}{2^2}\right)\ge\left[f\left(\frac{u}{2^3}\right)\right]^2$$

$\Rightarrow$ f(u) ^{3} $\left[f\left(\dfrac{u}{2^2}\right)\right]^{2^3}$

. . . .

Suy ra : $f(x) \geq \left[f\left(\frac{u}{2^n}\right)\right]^{2^n}$, $\forall x\in R, \forall n\in N$

Từ điều kiện i) $\Rightarrow f(x) \geq 1 + x > 0, \forall x\in (-1 ; 1)$

Với n đủ lớn thì $\left|\frac{x}{2^n}\right| < 1$, khi đó : $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \geq 1 + \frac{x}{2^n} > 0$

Suy ra : $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{2^n} > 0, \quad \forall x$

b) $\forall x\in R, \forall h\in (-1 ; 1)$

Theo ii) và i) : $f(x+h) \geq f(x).\ f(h) \geq f(x),(1+h)$

$\Rightarrow f(x+h) - f(x) \geq h.\ f(x)$

Tiếp theo ta chứng minh : $f(x+h) - f(x) \leq \frac{h.f(x)}{1-h}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow f(x+h) - f(x) - h.f(x+h) + h.f(x) \leq h.f(x)$

$\Leftrightarrow (1 - h)f(x+h) \leq f(x)$ (2)

(2) đúng vì : $f(x) = f(x+h - h) \geq f(x+h).f(h)$

$\geq f(x+h)(1 - h)$

Vậy : $h.f(x) \leq f(x+h) - f(x) \leq \frac{h.f(x)}{1-h}$, $\forall x\in R, \forall h\in (-1 ; 1)$

c) Theo câu b) ta có :

- $0 < h < 1$ thì : $f(x) \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}$
- $-1 < h < 0$ thì : $\frac{f(x)}{1-h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq f(x)$
- Suy ra : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)$

Vậy : f'(x) luôn tồn tại và $f'(x) = f(x), \forall x\in R$

* $\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln|f(t)|\Big|_0^x = \ln|f(x)| - \ln|f(0)|$

$= \ln\frac{f(x)}{f(0)}$ (*)

* $f'(x) = f(x), \forall x\in R$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$. Nên : $\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \int_0^x dt = x$ (**)

* Từ (*) và (**) cho : $\ln\frac{f(x)}{f(0)} = x \Leftrightarrow f(x) = f(0).e^x$

Từ i) $\Rightarrow f(0) \geq 1$

Từ ii) $\Rightarrow f(0) = f(0+0) \geq f^2(0)$

$\Rightarrow f(0) \leq 1$

Vậy : $f(0) = 1$

Do đó : $f(x) = e^x$.