DIỄN ĐÀN BẤT ĐẲNG THỨC VIỆT NAM

===

The Vietnam Inequality Mathematic Forum

http://ddbdt.tk

TÁC GIả: MESSI_NDT

***

TUYểN TậP CÁC BÀI BấT ĐẳNG THứC THI VÀO LớP CHUYÊN TOÁN NăM HọC 2009-2010

Như các bạn đã biết, Bất đẳng thức là một trong năm bài toán chính thường xuyên xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh vào các lớp chuyên tóan của các trường THPT chuyên của tất cả mọi tỉnh thành trên cả nước. Trong lúc bấy giờ, không ít người từ học sinh cho tới sinh viên rất nhiều người yêu bất đẳng thức bởi vẻ đẹp và những sự mới lạ và nét đẹp trong phương pháp giải nó.

Xin nói thêm bất đẳng thức là bông hoa đẹp nhất trong vườn hoa tóan học ngày nay rất hay xuất hiện trong mọi kì thi tóan học từ thấp đến cao. Và cùng vs xu thế đó, các cao thủ cũng xuất hiện nhiều, các phương pháp cũng ngày càng cải tiến,sáng tạo và mạnh mẽ cũng như hiệu qủa cao trong việc giải bất đẳng thức.
Tuy nhiên trong kì thi tuyển sinh vào lớp chuyên tóan THPT thì các bạn lại không được sử dụng những phương pháp mạnh mà trong SGK, SBT không nêu ra. Chính vì thế các bạn chỉ được dùng những gì có trong SGK,SBT trong khi làm bài thi.

Nhằm giúp các bạn có thêm chút tài liệu để ôn tập trước kì thi quan trọng này,mình đã tuyển tập một số bài BĐT tiểu biểu xuất hiện trong các đề thi vào lớp chuyên tóan THPT năm qua đồng thời thêm vào một số ví dụ năm trước và tự tạo nhằm giúp các bạn ôn được kĩ hơn.

Cũng xin bình, các bài BĐT xuất hiện trong đề thi thường không qúa khó và không qúa chặt như những bài chúng ta thảo luận hằng ngày trên Forum chính vì thế file của mình cũng không cần có nhiều bài khó và chặt lắm, chỉ những bài vừa với trình mà đề ra yêu cầu.

Chúc các bạn bỏ túi câu bđt trong đề thi của mình !

Tác giả chém gió.

Messi_ndt.

Trong File của mình để cho gọn thì kí hiệu $\sum$ thay cho tổng hóan vị .
Ví dụ : $\sum ab^2 = \sum_{cyc} ab^2 = ab^2 + bc^2 + ca^2$.

Phần I: Một số bài tập.

Bài1: (Chuyên Phan Bội Châu,Nghệ An)
Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi thoã mãn: $a+b+c=3$
Tìm Min của $P=a^2+b^2+c^2+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}$.

Bài2:(Chuyên Quang Trung,Bình Phước)
Cho các số $x,y\ge 0$.Chứng minh rằng: $T=x+\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}\ge 3$.

Bài3: (Chuyên Vĩnh Phúc,Vĩnh Phúc)
Cho ba số a,b,c đôi một phân biệt.CMR: $\dfrac{a^2}{(b-c)^2}+\dfrac{b^2}{(c-a)^2}+\dfrac{c^2}{(a-b)^2}\ge 2$..

Bài 4: (Chuyên Trần Phú,hải Phòng)
1)Cho các số thực dương a,b,c .CMR: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$.
2)Cho các số thực dương a,b,c thõa mãn
$a+b+c\le 3$ .CMR: $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$

Bài5: (Khối THPT chuyên,ĐH Vinh)
Cho các số thực dương x,y,z thõa mãn $x+2y+3z=18$.
Chứng minh rằng: $\dfrac{2y+3z+5}{1+x}+\dfrac{3z+x+5}{1+2y}+\dfrac{x+2y+5}{1+3z}\ge\dfrac{51}{7}$

Bài6: (Chuyên Lê Khiết,Quãng Ngãi)
Cho $x>0$.Tìm giá trị của x để biểu thức $N=\dfrac{x}{(x+2010)^2}$

Bài7: (Chuyên Lam Sơn,Thanh Hoá)
Cho biểu thức $P=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd$,trong đó $ad-bc=1$.
Chứng minh rằng: $P\ge\sqrt{3}$

Bài8: (Chuyên Lê Hồng Phong,Nam Định)
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P=2x+\sqrt{1-4x-x^2}$

Bài9: (Chuyên Hưng Yên,Hưng Yên)
Cho $a,b>0$ và $a+b=1$.Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{ab}+\dfrac{3}{a^2+b^2}\ge 14$.

Bài10: (Chuyên Nguyễn Trãi,Hải Dương)
Tìm GTLN của biểu thức: $P=\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2+6x+13}\right|$

Bài11: (Chuyên Hùng Vương,Phú Thọ)
1)Cho x,y là các số thực dương thõa mãn $x+y=\dfrac{5}{4}$.Tìm Min: $A=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{4y}$
2)Cho các số thực không âm a,b,c thõa mãn $ab+bc+ca=3$
Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2+2}+\dfrac{1}{b^2+2}+\dfrac{1}{c^2+2}\le 1$.

Bài12: Cho ba số a,b,c dương và $ab+bc+ca=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau :

$\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab}\geq abc.$

Bài13: (Chuyên Lê Hồng Phong,TP HCM)

1) Cho ba số thực a,b,c.CMR:

$$a^2+b^2+c^2+\geq ab+bc+ca+\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}.$$

2) Cho $a>0;b<0;a+b\geq 0.$.Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}\geq\frac{2}{b}+\frac{8}{2a-b}.$

3) Cho a,b dương thõa mãn: $\frac{a}{1+a}+\frac{2b}{1+b}=1$. CMR: $ab^2\leq\frac{1}{8}.$

Bài14: Cho $a,b,c>0;abc=1$.Chứng minh rằng: $\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\geq\frac{3}{2}.$

Bài 15: Cho $a,b,c>0;a+b+c=3$.Chứng minh rằng: $\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\geq\frac{3}{2}.$

Bài16: Cho $a,b,c>0$.CMR: $a^3+b^3+c^3-3abc\geq 2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3.$

Bài17:Cho a,b,c là các số thực dương.Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a^3+b^3}+\sqrt[3]{b^3+c^3}+\sqrt[3]{c^3+a^3}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)$$

Bài18:Cho các số dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}\leq\frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}.$$

Bài19:Cho các số thực dương a,b,c thõa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2=1$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{1+b-a}+\frac{b^2}{1+c-b}+\frac{c^2}{1+a-c}\geq 1.$

Bài20:

1)Cho ba số a,b,c dương thõa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=11.$

Tìm Giá Trị Nhỏ Nhất: A=$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$

2) Cho bốn số a,b,c,d dương thõa mãn $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=20.$

Chứng minh rằng: $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\geq 36.$

Bài21: Cho các số dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geq(a+1)(b+c)(c+1)(abc+1).$

Bài22:Cho các số dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\leq\frac{1}{a+b+c}.$$

Bài23:

a) Cho $a,b,c>0$.CMR: $3(1-x-x^2)(1-y-y^2)(1-z-z^2)\geq 1+xyz+(xyz)^2.$

b) Với $a,b,c,$.l à ba số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}\le\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Bài24: Cho ba số x,y,z thõa mãn $x\ge y\ge z; xyz=6; \frac{6}{x}\le y\le\frac{2}{z}.$

Chứng minh rằng : $\frac{9}{4x^2}+\frac{4}{3y^2}+\frac{5}{12z^2}\ge 1.$

Bài25: (Chuyên Lê Qúy Đôn,Bình Định)

Cho $A=\frac{1}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}+.....+\frac{1}{\left(\sqrt{97}+\sqrt{99}\right)}$.

.CMR: $A>\frac{9}{4}$.

Bài26: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$.Tìm Min của $P=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}+abc$.

Bài27: Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng.

$x^2+y^2+z^2+\sqrt{3xyz(x+y+z)}\ge 2\left(xy+yz+zx\right)$.

Bài28: (Khối AO,Hà Nội)

Cho ba số x,y,z thõa mãn $2\ge x,y,z\ge 0$ và $x+y+z=3$.Tìm Min,Max của biểu thức $T=x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)$.

Bài29: (Khối THPT chuyên ĐHKHTN,ĐHQG HN)

Vòng 1) Cho hai số a,b dương .

Tìm Giá trị Nhỏ Nhất của : $P=\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}$.

Vòng 2) Cho ba số dương a,b,c. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}}\ge\frac{a+b+c}{5}.$$

Bài30: Cho $a,b,c>1$ và $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$.CMR: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1$.

Bài31: Chứng minh rằng với hai số thực dương a,b thì ta có bất đẳng thức sau:

$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4\sqrt{2}\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ge 10.$

Bài32:. Cho $a,b,c>0$ thõa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$a^2\sqrt{1-bc}+b^2\sqrt{1-ca}+c^2\sqrt{1-ab}\ge\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Bài33: Cho $a,b,c>0$ thõa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}+\frac{1}{1-ab}\le\frac{9}{2}.$

Bài34: Cho 3 số $a,b,c\ge 0$.& $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}$

Bài35: Cho ba số a,b,c dương. Chứng minh rằng:

$2\left(\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+c^2}\right)\ge\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+c^2}$

: **Bài36:** Cho ba số thực dương a,b,c thõa mãn: $a+b+c=4abc$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$.

Bài37: Cho hai số thực a,b thõa mãn : $ab+a+b=3$.Chứng minh rằng:

$$3\left(\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}\right)+\frac{ab}{a+b}\leq a^2+b^2+\frac{3}{2}.$$

Bài38: Cho các số thực dương a,b,c thõa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c+a}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a+b}}\leq\sqrt{3}.$$

Bà39: Cho $a,b,c,d>0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{b+c+d}+\frac{b^2+c^2+b^2}{c+d+a}+\frac{c^2+d^2+a^2}{d+a+b}+\frac{d^2+a^2+b^2}{a+b+c}\geq a^2+b^2+c^2+d^2$$

Bài40: Cho $a,b,c>0; abc\geq 1$.Chứng minh rằng :

$$A=\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\sqrt{\frac{y}{1+y}}+\sqrt{\frac{z}{1+z}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bài41: Cho $a,b,c>0$.CMR: $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b+c)^3}{abc}\geq 28$.

Bài 42: Cho ba số dương a,b,c bất kì.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}\frac{c^3}{2c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Bài43: Cho a,b,c là 3 số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{1+a}{1-a}+\frac{1-b}{1+b}+\frac{1-c}{1+c}$$

Bài44: Cho các số thực a,b,c thõa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm Giá Trị Lớn Nhất Của Biểu thức $P=(c-a)(b-c)(a-b)(a+b+c)$.

Bài45: Cho các số thực không âm a,b,c.Chứng minh rằng bất đẳng thức sau luôn đúng:

a) $\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\geq\frac{8}{(a+b+c)^2}$.

b) $\frac{1}{22a^2+5bc}+\frac{1}{22b^2+5ca}+\frac{1}{22c^2+5ab}\geq\frac{1}{(a+b+c)^2}$.

Bài46:

Chứng minh rằng :

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2.$$

Bài47: Cho các số thực dương a,b,c.Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\leq\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}$$

Bài48:

Cho các số thực dương a,b,c.Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+\frac{1}{4}ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}}\geq 2.$$

PhầnII: Lời giải:

Bài1: Lời giải:

Ta sẽ chứng minh: A= $a^2+b^2+c^2\geq ab^2+bc^2+ca^2$.(1)
Thật vậy ,
$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a$
Áp dụng AM-GM ta có:
$a^3+c^2a\geq 2\sqrt{a^4c^2}=2ca^2$; $b^3+a^2b\geq 2\sqrt{b^4a^2}=2ab^2$; $c^3+b^2c\geq 2\sqrt{c^4b^2}=2bc^2$;
Nên $3(a^2+b^2+c^2)\geq 3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$. Suy ra (1) đúng.
BĐT cần chứng minh tở thành:

$$A+\frac{ab+bc+ca}{ab^2+bc^2+ca^2}\geq A+\frac{2(ab+bc+ca)}{2A}=A+\frac{9-A}{2A}=A+\frac{9}{2A}-\frac{1}{2}=\frac{A}{2}+\frac{9}{2A}-\frac{1}{2}+\frac{A}{2}$$

$$\geq 3-\frac{1}{2}+\frac{A}{2}\geq\frac{5}{2}+\frac{(a+b+c)^2}{6}=4.$$ Hay $P\geq 4$.

Vậy Min P=4 $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài2:Lời Giải:

Ta có: $T=x+\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}=(x-y)+\dfrac{y+1}{2}+\dfrac{y+1}{2}+\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}-1$

Áp Dụng AM-GM ta có $T\geq 4\sqrt[4]{(x-y)\left(\dfrac{y+1}{2}\right)\left(\dfrac{y+1}{2}\right)\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}}-1=4-1=3.$

Vậy Min T =3 tại $x-y=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}\leftrightarrow x=2;y=1.$

Bài3:Lời Giải:

Đặt $x=\dfrac{a}{b-c};x=\dfrac{b}{c-a};z=\dfrac{c}{a-b}$.

Dễ thấy: $\sum xy=\sum\dfrac{ab}{(b-c)(c-a)}=\dfrac{\sum ab(a-b)}{\prod(a-b)}=-1.$

Do đó: $LHS=\sum x^2=\left(\sum x\right)^2-2\sum xy\geq -2\sum xy=2.$

Q.E.D

Mở rộng: Với ba số thực bất kì a,b,c :1) $\sum\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\geq 2.$

2) $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\sum\dfrac{1}{(a-b)^2}\right)\geq\dfrac{9}{2}.$ 3) Với $a+c\geq 2b.$ thì $\sum\dfrac{a^2}{(a-b)^2}\geq 2.$

Bài4:Lời Giải:

By AM-GM Inequality

a) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3\sqrt[3]{abc}.3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$.

b) Ta Áp dụng câu a thì

LHS=

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{2007}{ab+bc+ca}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{2007}{ab+bc+ca}$$

$$\geq 1+\frac{3.2007}{(a+b+c)^2}\geq 670.$$

Q.E.D

Bài5:Lời Giải:

Đặt $a=x;b=2y;c=3z$ thì theo bài ra ta có: $a+b+c=18$.

Ta cần chứng minh : $\sum_{cyclic}\frac{b+c+5}{1+a}\geq\frac{51}{7}$.

Áp Dụng Schwar ta có : $\sum_{cyclic}\frac{b+c+5}{1+a}=\sum_{cyclic}\frac{(b+c+5)^2}{(1+a)(b+c+5)}\geq\frac{(2a+2b+2c+15)^2}{\sum(1+a)(b+c+5)}$

$$=\frac{(18.2+15)^2}{6(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+15}\geq\frac{51^2}{6.18+15+\frac{2(a+b+c)^2}{3}}=\frac{51}{7}.$$

Q.E.D . Dấu "=" xảy ra $a=6;b=3;c=2$.

Bài6:Lời Giải:

Áp Dụng BĐT $(a+b)^2\geq 4ab$ thì $(x+2010)^2\geq 4.x.2010$.

Khi đó : $N=\frac{x}{(x+2010)^2}\leq\frac{x}{8080x}=\frac{1}{8010}$.

Q.E.D Dấu = tại x=2010

Bài 7:Lời Giải:

Ta có: $1+(ac+bd)^2=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

Áp Dụng BĐT AM-GM ta có:

$(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\geq 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=2\sqrt{1+(ac+bd)^2}$

Khi đó Chuyển $ac+bd=x$ thì $P\geq 2\sqrt{1+x^2}+x$

$\rightarrow P^2=4(1+x^2)+x^2+4x\sqrt{1+x^2}=3+[(2x)^2+4x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2)]$

$\rightarrow P^2=3+\left(2x+\sqrt{1+x^2}\right)^2\geq 3\rightarrow |P|\geq\sqrt{3}\rightarrow P\geq\sqrt{3}$ (Q.E.D)

Bài8:Lời Giải:

Áp Dụng AM-GM ta có: $P=2x+\sqrt{(1-4x-x^2).1}\leq 2x+\frac{1-4x-x^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}\leq 1$.

Dấu = xảy ra tại $x=0$.

Bài9: Lời Giải:

Áp dụng BĐT quen thuộc $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$, $\forall a,b>0$ ta có:

$$LHS=\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}=\frac{1}{2ab}+\frac{3}{2ab}+\frac{3}{a^2+b^2}\geq\frac{1}{2ab}+\frac{3.4}{a^2+b^2+2ab}\geq\frac{2}{(a+b)^2}+\frac{12}{(a+b)^2}=14.$$

Q.E.D Dấu = xảy ra tại $a=b=\frac{1}{2}$.

Bài10:Lời Giải:

Bổ đề: $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\geq\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}$.

Áp dụng BĐT trên ta có:

$$P=\left|\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2+6x+13}\right|=\left|\sqrt{(x-2)^2+1^2}-\sqrt{(x+3)^2+2^2}\right|\leq.$$

$$\leq\left|\sqrt{\left(x-2-x-3\right)^2+(1-2)^2}\right|=\left|\sqrt{26}\right|=\sqrt{26}.$$

Đẳng thức xảy ra tại $x=7$.

Bài11: Lời Giải:

1) Dùng CBS :

$$\frac{5}{4}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}\right)=(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}\right)=\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right]\left[\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2\right]\geq\left(2+1/2\right)^2=\frac{5^2}{4^2}.$$

$\rightarrow\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}\geq\frac{5}{4}$. Đẳng thức xảy ra tại $x=2;y=\frac{1}{2}$.

2) Bất đẳng thức tương đương $\sum\frac{2}{a^2+2}\leq2\Leftrightarrow\sum\frac{a^2}{a^2+2}\geq1$.

Áp dụng BĐT CBS: $\sum\frac{a^2}{a^2+2}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2+6}=\frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum a^2+2\sum ab}=1.$

Q.E.D

Bài12: Lời Giải:

Từ GT $ab+bc+ca=3\leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{abc}$.

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{1}{b};z=\frac{1}{c}$. Khi đó $x+y+z=3xyz$.

Khi đó : $LHS=\sum\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{yz}}=\sum\frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{x}{yz}}\geq\frac{9}{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right)}$

$=\frac{9}{\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{xyz}}=\frac{9}{\frac{9(xyz)^2}{xyz}}=\frac{1}{xyz}=abc.$ (Q.E.D)

Đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=1.\leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài13:Lời Giải:

1) Ta có, BĐT tương đương: $\sum a^2-\sum ab-\frac{(a-b)^2}{26}+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-a)^2}{2009}\geq0.$

$$\leftrightarrow\frac{12(a-b)^2}{13}+\frac{2(b-c)^2}{3}+\frac{2007(c-a)^2}{2009}\geq0.$$

Vì $S_a;S_b:S_c>0.$ nên BĐT hiển nhiên đúng.

2) Vì $a>0;b<0.$nên suy ra $a;-b>0.$BĐT cần chứng minh tương đương với $\frac{1}{a}+\frac{2}{-b}\geq\frac{8}{2a-b}.$Áp dụng BĐT quyen thuộc $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}.$

ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{-b}\geq\frac{9}{2a-b}$ .Khi đó ta chỉ cần chứng minh cho :

$\frac{1}{-b}+\frac{1}{2a-b}\geq\frac{1}{a}.\Leftrightarrow 2a^2\geq b^2.\Leftrightarrow a\sqrt{2}\geq -b\Leftrightarrow a+b+a\left(\sqrt{2}-1\right)\geq 0.$

Đúng vì $a>0;a+b>0.$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh hòan tòan.

Đẳng thức xảy ra tại $a=-b$.

3) Từ GT $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b+1}=2.$ ta dễ dàng suy ra: (Dùng AM-GM) .

$\frac{1}{a+1}=2-\frac{2}{b+1}=\frac{2b}{b+1}.$ và

$\frac{1}{b+1}=2-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{b+1}=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{(a+1)(b+1)}}$

Nhân vế vs vế ta có: $\frac{1}{(a+1)(b+1)^2}\geq\frac{2b}{b+1}.\left(2\sqrt{\frac{ab}{(a+1)(b+1)}}\right)^2=\frac{8ab^2}{(a+1)(b+1)^2}.$

Suy ra $8ab^2\leq 1\leftrightarrow ab^2\leq\frac{1}{8}.$Q.E.D . Đẳng thứ cxảy ra tại $a=b=c=1/2.$

Bài14: Lời Giải:

Vì theo giã thiết $abc=1.$Đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{y}{z};c=\frac{z}{x}.$

Khi đó: $\frac{a}{ab+1}=\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}+1}=\frac{x/y}{x/z+1}=\frac{xz}{yz+xy}.$

BĐT cần chứng minh trở thành: $\frac{xy}{yz+zx}+\frac{yz}{zx+xy}+\frac{zx}{xy+yz}\geq\frac{3}{2}.$

Đây chính là BĐT **Netbit** quen thuộc .

BĐT đúng với mọi $xy=yz=zx.$ hay $a=b=c=1.$

Bài15:Lời Giải:

Cách 1:

BĐT cần chứng minh tương đương : $\sum\frac{a+a^2b-a^2b}{ab+1}\geq\frac{3}{2}\leftrightarrow a+b+c-\sum\frac{a^2b}{ab+1}\geq\frac{3}{2}.$

$\leftrightarrow\frac{a^2b}{ab+1}\geq\frac{3}{2}.$Áp dụng AM-GM ở mẫu $ab+1\geq 2\sqrt{ab}.$ ta chỉ cần chứng minh:

$\sum a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\leq 3.$Đến đây cho $a=x^2;b=y^2;z=c^2$ thì ta có ngay bài quyen thuộc :

$\left(\sum x^2\right)^2\geq 3\sum x^3y\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sum\left(x^2-y^2-xy-zx+2yz\right)^2\geq 0.$ Đúng.

Vậy bài tóan được giải quết xong, Đẳng thức tại tâm $a=b=c=1.$

Cách2:

$$\Leftrightarrow \sum \frac{a}{a+bc} - \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum \left[\frac{a}{a+bc} - \frac{2a(b+c)-bc}{2(ab+bc+ca)} \right] \geq 0$$

BĐT $\Leftrightarrow \sum \frac{(3a+bc-2ab-2ac)bc}{2(ab+bc+ca)(a+bc)} \geq 0 \Leftrightarrow \sum \frac{\left[(a+b+c)a+bc-2ab-2ac\right]bc}{2(ab+bc+ca)(a+bc)} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+abc} \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát giã sử $a \geq b \geq c$ khi đó $\frac{1}{c^2+abc} \geq \frac{1}{b^2+abc} > 0.$

Đúng theo tiêu chuẩn II Voirnicu Schur.Suy ra BĐT được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra tại tâm $a=b=c.$

Bài16:Lời Giải:

Để cho dễ đánh giá ta xét hai trường hợp:

TH1: $b+c \leq 2a$. Khi đó $RHS = 2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3 \leq 0.$

Còn $LHS = a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0 \forall a,b,c>0. \Rightarrow BDT$ hiển nhiên đúng .

TH2: $b+c>2a$ .Khi đó BĐT trở thành $a^3+b^3+c^3-3abc-2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3 \geq 0.$

Đặt $b=a+x$ và $c=a+y.$ với $x,y>0$.
Khi đó BĐT cần chứng minh thành:

$3a\left(x^2-xy+y^2\right)+\frac{3(x+y)(x-y)^2}{2} \geq \frac{3(x+y)(x-y)^2}{2} \geq 0.$ (True)

Vậy BĐT được chứng minh.

Bài17:Lời Giải:

Ta sẽ chứng minh : $\sqrt[3]{a^3+b^3} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$

$$\Leftrightarrow a^6+b^6+4a^3b^3 \geq 3a^2b^2\left(a^2+b^2\right) \Leftrightarrow \left(a^3-b^3\right)^2 \geq 3a^2b^2\left(a-b\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2[(a^2+b^2+ab)^2-3a^2b^2] \geq 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2+ab)^2-3a^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+ab-3ab \geq 0 \leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.(True)$$

Do đó: $\rightarrow \sum \sqrt[3]{a^3+b^3} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum\sqrt{a^2+b^2}.$

Q.E.D Dấu = xảy ra tại $a=b=c.$

Bài18:Lời Giải:

Ta có $RHS = \frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a} = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b}+\frac{2\left(b^2+c^2\right)}{b+c}+\frac{2\left(c^2+a^2\right)}{c+a}$

BĐT cần chứng minh trở thành: $\sum\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \leq \sum\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a+b}.$

Ta sẽ chứng minh: $\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \leq \frac{2(a^2+b^2)}{a+b}. \Leftrightarrow (a+b)\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \leq 2\left(a^2+b^2\right)$

$\Leftrightarrow (a+b)^3.4(a^3+b^3) \le 8(a^2+b^2)^3$

$\Leftrightarrow 2a^6+2b^6+6a^4b^2+6a^2b^4 \ge a^6+b^6+2a^3b^3+3ab^5+3a^5b+3a^4b^2+3a^2b^4$

$\Leftrightarrow (a-b)^4(a^2+ab+b^2) \ge 0 \forall a,b \in R.$

Tương tự và cộng lại ta có Q.E.D

Đẳng thức xảy ra tại a=b=c

Bài19:Lời Giải:

Ta có: $LHS = \sum \frac{a^2}{1+b-a} = \frac{a^4}{a^2+a^2b-a^3} + \frac{b^4}{b^2+b^2c-b^3} + \frac{a^4}{c^2+c^2a-c^3}$

Áp dụng BĐT CBS: $\sum \frac{a^4}{a^2+a^2b-a^3} \ge \frac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a^2 - \sum a^3 + \sum a^2b} = \frac{1}{1-\sum a^3 + \sum a^2b}$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh : $\sum a^3 \ge \sum a^2b$. Nó đúng theo BĐT hóan vị .

Hoặc dùng AM-GM: $a^3+a^3+b^3 \ge 3a^2b; b^3+b^3+c^3 \ge 3b^2c; c^3+c^3+a^3 \ge 3c^2a.$

Cộng lại ta có Q.E.D

Bài20:Lời Giải:

1) Ta có $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=11 \leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3=11.$

Đặt $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=x$ và $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=y$. Khi đó $x+y=8$.

Suy ra:

$$A=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=3+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}$$

$$=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2-2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=x^2+y^2-2x-2y+3$$

Thay $y=8-x$ vào A ta có :

$A=x^2-2x+3+(8-x)^2-2(8-x)=2x^2-16x+51=2(x-4)^2+19 \ge 19.$

Đẳng thức xảy ra tại $x=y=4 \leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=4.$

Chẳng hạn $a=b=1$ và $c=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2) từ GT $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=20$. ta có $\leftrightarrow \sum \frac{a+b+c}{d}=16.$

Áp dụng BĐT CBS ta có:

$$\left[\sum (b+c+d-a)^2\right]\left(\sum \frac{1}{a^2}\right) \ge \left(\sum \frac{b+c+d-a}{a}\right)^2 = \left(\sum \frac{a+b+c}{d}-4\right)^2 = 12^2 = 144.$$

Mặt khác $\sum (b+c+d-a)^2 = 4\sum a^2$ nên $\left(\sum a^2\right)\left(\sum \frac{1}{a^2}\right) \ge \frac{144}{4} = 36.$

Vậy Min $B=36$.

Bài21:Lời Giải:

Ta sẽ chứng minh: $2\left(a^3+1\right)^3 \ge (1+a)^3\left(1+a^3\right)$

BĐT tương đương với $2(a^9+3a^6+3a^3+1) \ge a^6+3a^5+3a^4+2a^3+3a^2+3a+1$

$\leftrightarrow 2a^9+5a^6-3a^5-3a^4-4a^3-3a^2-3a+1\ge 0.\leftrightarrow (a-1)^4(a^2-a+1)\ge 0.$(True).

Do đó: $8\left(a^2+1\right)^3.\left(b^2+1\right)^3.\left(c^2+1\right)^3\ge\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\left(1+a\right)^3\left(1+b\right)^3\left(1+c\right)^3$

$\ge\left(1+abc\right)^3\left(1+a\right)^3\left(1+b\right)^3\left(1+c\right)^3$.(**BĐT Holder**).

Căn bậc 3 2 vế suy ra: $2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge(a+1)(b+c)(c+1)(abc+1)$

Q.E.D Dẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$.

Bài22:Lời Giải:

Áp dụng bất đẳng thức CBS:

$\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2+a^2\right)\left(a^2+a^2+c^2\right)\ge(a^2+ab+ac)^2=a^2(a+b+c)^2$.

Do đó: $\dfrac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}\le\dfrac{a^3}{a^2(a+b+c)^2}=\dfrac{a}{(a+b+c)^2}$

Tương tự ta có: $\sum\dfrac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}\le\dfrac{a+b+c}{\left(a+b+c\right)^2}=\dfrac{1}{a+b+c}$.(Q.E.D)

Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.

Bài23:Lời Giải:

a) Ta áp dụng Bổ đề sau để đánh giá: $3\left(a^2-a+1\right)^2\ge a^6+a^3+1$.

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với : $\left(a-1\right)^4\left(2a^2-a+2\right)\ge 0$ (True)

Nên bổ đề được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=1$.

Áp dụng bổ đề trên ta có:

$LHS^3=\left[3(1-x-x^2)(1-y-y^2)(1-z-z^2)\right]^3=3\left(x^2-x+1\right)^3 3\left(y^2-y+1\right)^3 3\left(z^2-z+1\right)^3$

$\Rightarrow LHS^3\ge\left(x^6+x^3+1\right)\left(y^6+y^3+1\right)\left(z^6+z^3+1\right)$

Lại dùng BĐT holder ta có:

$\left(x^6+x^3+1\right)\left(y^6+y^3+1\right)\left(z^6+z^3+1\right)\ge\left[\left(xyz\right)^2+xyz+1\right]^3=RHS^3$. Suy ra Q.E.D.

Đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=1$.

b)Đặt $\dfrac{a}{b}=x;\dfrac{b}{c}=y;\dfrac{c}{a}=z$. thì có ngay $xyz=1$. Khi đó : $\dfrac{c+a}{c+a}=\dfrac{1+xy}{1+y}=x+\dfrac{1-x}{1+y}$.

Khi đó BĐT cần chứng minh trở thành: $\sum\dfrac{1-x}{y+1}+x+y+z\le x+y+z\leftrightarrow\sum\dfrac{x-1}{y+1}\ge 0$.

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\ge x+y+z+3$.

Mà $x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{3}\ge\sqrt[3]{xyz}(x+y+z)=x+y+z.\&\sum x^2y\ge 3xyz=3$.

Cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=1\leftrightarrow a=b=c$.

<u>Mở rộng:</u> Với a,b,c dương thì : $\dfrac{a+kb}{a+kc}+\dfrac{b+kc}{b+ka}+\dfrac{c+ka}{c+kb}\le\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$.

Bài 24:Lời giải:

Từ Giã Thiết ta dễ dàng có : $xy\ge yz\ge zx; xy\ge 6; yz\le 2; z\le 1; xyz=6$.

Vì thế ta dự đóan dấu "=" tại $x=3; y=2; z=1$. Theo đó ta dễ dàng có:

$$\frac{9}{4x^2}+\frac{4}{3y^2}+\frac{5}{12z^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{4}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{12z^2}\ge\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{36}{(xyz)^2}}+\frac{1}{3yz}+\frac{1}{6z^2}\ge\frac{3}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1.$$

(BĐT AM-GM cho ba số)

Đó chính là ĐPCM. Đẳng thức xảy ra tại $x=3; y=2; z=1$.

Bài 25: Lời Giải:

Ta có : $A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+.....+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}$.

Đặt $S=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$.

Dễ thấy: $A>S\Rightarrow 2A>A+S$. Ta có :

$$A+S=A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+.....+\frac{1}{\sqrt{97}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}$$

$$\to\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+...+\frac{\sqrt{101}-\sqrt{99}}{2}=\frac{\sqrt{101}-1}{2}>\frac{\sqrt{100}-1}{2}=\frac{9}{2}.\to A>\frac{9}{4}.$$

Q.E.D. Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 26: Lời Giải:

Ta dự đóan cực trị của biểu thức tại tâm $a=b=c$. Ta sẽ chứng minh hai BĐT:

$abc\le\frac{1}{27}$. .Thật vậy dùng AM-GM ta có: $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$.

Và $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le\frac{9}{10}$. Thật vậy,không mất tính tổng quát giã sử $a\ge b\ge c$

Vì $a+b+c=1\Rightarrow a\ge\frac{1}{3}\ge c$. .Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $c\ge\frac{-3}{4}$.ta có theo U.C.T ta chứng minh được như sau:

$$\frac{9}{10}-\left(\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\right)=\sum\left(\frac{18a}{25}+\frac{5}{30}-\frac{a}{a^2+1}\right)=\sum\frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)}\ge 0.$$

Trường hợp2 : $c\le\frac{-3}{4}$.Áp dụng bất đẳng thức AM-GM $a^2+1\ge 2a; b^2+1\ge 2b$. suy ra :

$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\le 1$. Khi đó nếu $\frac{c}{c^2+1}\le\frac{-1}{10}\Leftrightarrow -5-2\sqrt{6}\le c\le\frac{-3}{4}$.khi đó cộng vế với vế ta có ngay điều phải chứng minh.

Nên chỉ phải xét trường hợp $-5-2\sqrt{6}\ge c$ nữa. Mà theo vận dụng GT a+b+c=1.

Suy ra $2a+c\ge a+b+c=1\Rightarrow 2a\ge 1-c\ge 6+2\sqrt{6}\Rightarrow a\ge 3+\sqrt{6}$.

Suy ra $\frac{a}{a^2+1}\le\frac{1}{5}.\Rightarrow\sum\frac{a}{a^2+1}\le\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+0=\frac{7}{10}<\frac{9}{10}$. (Điều phải chúng minh)

Bài tóan này có nnhiều lời giả thế nhưng vs kiến thức THCS mình chỉ nêu ra cách này thôi. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 27: Lời Giải:

Áp dụng bdt CBS ta có:

$$\sqrt{3xyz(x+y+z)}=\sqrt{(xyz+xyz+xyz)(x+y+z)}\ge x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc hai ta có:

$$x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right)+y\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)+z\left(\sqrt{z}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\geq (y+z)\sqrt{yz}+(z+x)\sqrt{zx}+(x+y)\sqrt{xy}$$

$$\geq \sqrt{xy}.2\sqrt{xy}+\sqrt{yz}.2\sqrt{yz}+\sqrt{zx}.2\sqrt{zx}=2(xy+yz+zx).$$

Đẳng thức xảy ra tại $x=y=z.$

Bài 28: Lời Giải:

Đặt $a=1-x;b=1-y;c=1-z.$ tacó: $a+b+c=0;-1\leq a,b,c\leq 1.$

Khi đó: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0.$

Suy ra:

$$P=x^4+y^4+z^4+12(1-x)(1-y)(1-z)=\sum(a-1)^4+4\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$=a^4+b^4+c^4+6\left(a^2+b^2+c^2\right)+3.$$

Thấy ngay Min P=3 $\leftrightarrow x=0.$

Vì $a+b+c=0;-1\leq a,b,c\leq 1.\Rightarrow a^2\leq 1\Rightarrow a^4\leq a^2.$Hay $\sum a^4\leq\sum a^2.$

Khi đ ó: $P\leq 7\left(a^2+b^2+c^2\right)+3.$

Mặt khác: Theo Dirichlet trong ba số a,b,c luôn có 2 số cùng dấu.Giã sử đó là $a,b\to ab\geq 0.$

$$a^2+b^2+c^2\leq a^2+b^2+2ab+c^2=(a+b)^2+c^2=(-c)^2+c^2=2c^2\leq 2.$$

$\Rightarrow P\leq 7.2+3=17.$ Q.E.D

Bài 29: Lời Giải:

Vòng 1: Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có: Tương tự với mẫu còn lại .

$$\left[\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}\right]^2\leq (a+b)(9a+9b)=[3(a+b)]^2.$$

$$\to\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}\leq 3(a+b).\to\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}\geq\frac{a+b}{3(a+b)}=\frac{1}{3}.$$

Vòng 2: Ta có: Áp dụng BDT CBS:

$$\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}=\sqrt{(a+4b)(3a+2b)}\leq\frac{1}{2}(4a+6b).$$

(BĐT CBS) .Do đó ta $\Rightarrow\dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\geq\dfrac{a^2}{2a+3b}.$

Tương tự với mẫu còn lại suy ra:

$$\Rightarrow\sum\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\geq\sum\frac{a^2}{2a+3b}.\geq\frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{5}.\text{ (Q.E.D)}$$

Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c.$

Bài30:Lời Giải:

Ta có theo giã thiết

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1\leftrightarrow\left(\frac{1}{a-1}\right)\left(\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{b-1}\right)\left(\frac{1}{b+1}\right)+\left(\frac{1}{c-1}\right)\left(\frac{1}{c+1}\right)=1.$$

Giã sử $a \ge b \ge c$ khi đó: $\left(\frac{1}{a-1};\frac{1}{b-1};\frac{1}{c-1}\right)$ và $\left(\frac{1}{a+1};\frac{1}{b+1};\frac{1}{c+1}\right)$ là hai bộ đơn điệu cùng chiều nên áp dụng bdt Chebuyshev ta có:

$$3=3\left[\left(\frac{1}{a-1}\right)\left(\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{b-1}\right)\left(\frac{1}{b+1}\right)+\left(\frac{1}{c-1}\right)\left(\frac{1}{c+1}\right)\right]\ge\sum\frac{1}{a-1}\sum\frac{1}{a+1}.$$

Để chứng minh $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\le 1.$ ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}\le 3.$

Thật vậy :

$$1-\frac{1}{a-1}-\frac{9}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{a^2-1}\right)==\frac{a-2}{a-1}-\frac{3(a-2)(a+2)}{4(a^2-1)}=\frac{a-2}{a-1}-\frac{3(a-2)(a+2)}{4(a^2-1)}=$$

$$=(a-2)\left[\frac{1}{a-1}-\frac{3(a+2)}{4(a^2-1)}\right]=(a-2)\left(\frac{4a^2-4-3(a+2)(a-1)}{4(a-1)(a^2-1)}\right)=\frac{(a-2)^2}{4(a^2-1)}\ge 0.$$

Tương tự ta có:

$$\sum\left(1-\frac{1}{a-1}\right)-\frac{9}{4}\sum\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{a^2-1}\right)\ge 0.\leftrightarrow 3-\sum\frac{1}{a-1}-\frac{9}{4}\left(1-\sum\frac{1}{a^2-1}\right)\ge 0\leftrightarrow\sum\frac{1}{a-1}\le 3.$$

Q.E.D . Bài trên chỉ dùng hai công cụ sơ cấp Chebuyshev & U.C.T và cho kết qủa đẹp.

Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=2.$

Bài31:Lời Giải:

Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2;4\sqrt{2}\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 4\sqrt{2}.\sqrt{2}=8.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\ge 4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{4\sqrt{2}ab}\ge\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{4\sqrt{2}ab}\ge\frac{(a-b)^2}{\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)\right]\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$\Leftrightarrow\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)\right]\sqrt{(a^2+b^2)}\ge 4\sqrt{2}ab.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)\right]\sqrt{(a^2+b^2)}\ge\left(\sqrt{4ab}+2\sqrt{ab}\right)\sqrt{2ab}=4\sqrt{2}ab.$$

Suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=b.$

Bài32:Lời Giải:

Ta có : $a^2\sqrt{1-bc}=\frac{a^2}{\sqrt{2}}.\sqrt{2-2bc}\ge\frac{a^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1+a^2+b^2+c^2-b^2-c^2}=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1+a^2}.$

Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có: $\left(\frac{1}{3}+1\right)(a^2+1)\ge\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+1\right)^2\to\sqrt{a^2+1}\ge\frac{a+\sqrt{3}}{2}.$

Do đó: $\frac{a^2}{\sqrt{2}}.\sqrt{1+a^2}\ge\frac{a^2(a+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$. Tương tự ta có: $\sum\frac{a^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1+a^2}\ge\frac{\sum a^2(a+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}.$

Dễ dàng chứng minh $\sum a^3\ge\sum a^2$. Thật vậy. Áp dụng CBS ta có:

$\left(\sum a^3\right)\left(\sum a\right)\ge\left(\sum a^2\right)^2$.Mà theo Chebuyshev $3\sum a^3\ge\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)$.

.Nhân vế với vế ta có: $9\left(\sum a^3\right)^2\left(\sum a\right)\ge\left(\sum a\right)\left(\sum a^2\right)^2\to\sum a^3\ge\sum a^2$.

Suy ra: $\sum\frac{a^2}{\sqrt{2}}\sqrt{1+a^2}\ge\frac{\sum a^3+\sqrt{3}\sum a^2}{2\sqrt{2}}\ge\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sum a^2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c={}^{1}\!/\!_{\sqrt{3}}$.

Bài33:Lời Giải:

BĐT $\Leftrightarrow\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}+\frac{ab}{1-ab}\le\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\frac{bc}{1-bc}\le\frac{(b+c)^2}{4-4bc}\le\frac{(b+c)^2}{4-2(a^2+b^2)}=\frac{1}{2}.\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)$$

Tương tự ta có: $\frac{ca}{1-ca}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right);\frac{ab}{1-ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right)$

Cộng vế với vế ta có suy ra Q.E.D

Đẳng thức xảy ra rại $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài34:Lời Giải:

Ta có: Áp dụng bất đẳng thức AM-GM thì :

$$LHS=\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}$$

$$\frac{1}{ab+2c^2+(a+b+c)c}+\frac{1}{bc+2a^2+(a+b+c)a}+\frac{1}{ca+2b^2+(a+b+c)b}$$

$$=\frac{1}{(a+2c)(b+2c)}+\frac{1}{(a+2b)(c+2b)}+\frac{1}{(c+2a)(b+2a)}$$

$$=\frac{ab}{(ab+2bc)(ab+2ca)}+\frac{ab}{(ca+2bc)(ca+2ab)}+\frac{bc}{(bc+2ab)(bc+2ca)}$$

$$\ge\frac{ab}{\left(\frac{2(ab+bc+ca)}{2}\right)^2}+\frac{ab}{\left(\frac{2(ab+bc+ca)}{2}\right)^2}+\frac{bc}{\left(\frac{2(ab+bc+ca)}{2}\right)^2}=\frac{ab+bc+ca}{(ab+bc+ca)^2}=\frac{1}{ab+bc+ca}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh hòan tòan.

Bài35:Lời Giải:

Ta có: Biến đổi tương đương.

$$2(a-b)^2\ge0\leftrightarrow3\left(a^2-ab+b^2\right)\ge a^2+ab+b^2.\to\sqrt{3(a^2-ab+b^2)}\ge\sqrt{(a^2+ab+b^2)}$$

$$\sum\sqrt{3(a^2-ab+b^2)}\ge\sum\sqrt{(a^2+ab+b^2)}$$

Mặt khác BĐT hiển nhiên : $\sum\sqrt{3(a^2-ab+b^2)}\le\sum\sqrt{4(a^2-ab+b^2)}=LHS$.

Suy ra Q.E.D.

Bài36:Lời Giải:

C1:Chú ý $ab+bc+ca=a+b+c$ nên BDT cần Cm được viết lại như sau: $(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2+(ab+bc+ca)^3 \geq 4abc(a+b+c)^3$.

Bất đẳng thức chứng minh trở thành:

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{3abc(a+b+c)} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{3\left[(a+b+c)^2+ab+bc+ca\right]} \Leftrightarrow \frac{\sum a^2(b-c)^2}{3abc(a+b+c)} \geq \frac{\sum (b-c)^2}{3(a=b+c)^2+3\sum ab}.$$

Phân tích SOS tuy ền th ống,ta được:

$$S_a=\frac{a^2}{abc(a+b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2+ab+bc+ca} \geq \frac{a^2}{abc(a+b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

tương tự $S_b \geq \frac{b^2}{abc(a+b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}; S_c \geq \frac{c^2}{abc(a+b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}$

Giả sử $a \geq b \geq c$ thì dễ thấy $S_a \,\&\, S_b \geq 0$.

Nên chỉ cần Cm $b^2S_c+c^2S_b \geq 0$ nữa là được,đến đây thì đơn giãn rùi ,

Dành phần cho bạn đọc tự chứng minh. :D

C2:

Ta có: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{3(a+b+c)}{abc}=3\left(4-\frac{1}{abc}\right)$

Mà ta lại có $4abc=a+b+c+1 \geq 4\sqrt[4]{abc} \Leftrightarrow (abc)^4 \geq abc \Leftrightarrow \frac{1}{abc} \leq 1.$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{abc} \geq -1 \Rightarrow 3\left(4-\frac{1}{abc}\right) \geq 3(4-1)=9.$$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3.(Q.E.D)$.Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$.

Bài37:Lời Giải:

Cách1: Theo giả thiết của bài tóan :

$ab+a+b=3. \leftrightarrow ab+a+b+1=4 \leftrightarrow (a+1)(b+1)=4.$

Trường hợp cả hai số $a+1;b+1$ đều âm thì $a,b<0$.

Trường hợp cả hai số $a+1;b+1>0.$ Suy ra $a+b+2>0$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta có :

$$4=(a+1)(b+1) \leq \left(\frac{a+b+2}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{a+b+2}{2} \geq 2 \Rightarrow a+b+2 \geq 4 \Rightarrow a+b \geq 2.$$

Do đó ta có $0<a+b \vee a+b \leq 2.$ Đặt $a+b=x$ thì $0<x \vee x \geq 2. \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} \geq 0.$

BĐT cần chứng minh là

$$a^2+b^2+\frac{3}{2} \geq 3\left(\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}\right)+\frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{3}{2} \geq 3\frac{a^2+b^2+a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{ab}{a+b}.$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{5}{2} \geq 3\frac{a^2+b^2+a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{ab+a+b}{a+b}=3\frac{a^2+b^2+a+b}{(a+1)(b+1)}+\frac{3}{a+b}.$$

Ta có: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a+b)^2-2(3-a-b)=x^2+2x-6.$

Thay vào BĐT cần chứng minh ta được $x^2+2x+\frac{5}{2}\geq\frac{3(x^2+3x-6)}{4}+\frac{3}{x}$.

$$\Leftrightarrow\frac{x^3-x^2+4x-12}{4x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-2)(x^2+x+6)}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x-2}{x}\geq 0.(\text{True})$$

Vậy bài tóan được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=1$.

Bài38:Lời Giải:

Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có: $\left(a^2+b+c\right)(1+b+c)\geq(a+b+c)^2$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+b+c}\leq\frac{1+b+c}{(a+b+c)^2}\Rightarrow\frac{a^2}{a^2+b+c}\leq\frac{a^2\left(1+b+c\right)}{(a+b+c)^2}$$

$$\Rightarrow\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}\leq\sum\left(\frac{a}{a+b+c}\sqrt{1+b+c}\right)$$

Giã sử $a\geq b\geq c$ thì $\frac{a}{a+b+c};\frac{b}{a+b+c};\frac{c}{a+b+c}$ và $\sqrt{1+b+c}\leq\sqrt{1+c+a}\leq\sqrt{1+a+b}$.
là hai bộ đơn điệu cùng chiều nên Áp dụng BĐT Chebuyshev ta có:

$$\sum\left(\frac{a}{a+b+c}\sqrt{1+b+c}\right)\leq\frac{1}{3}\sum\frac{a}{a+b+c}\sum\sqrt{a+b+1}=\frac{\sum\sqrt{a+b+1}}{3}$$

Áp dụng bdt CBS ta có: $\frac{\sum\sqrt{a+b+1}}{3}\leq\frac{\sqrt{3(3+2a+2b+2c)}}{3}$

$$\Rightarrow LHS\leq\frac{\sqrt{3\left[3+2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\right]}}{3}=\frac{\sqrt{3(3+2\sqrt{3.3})}}{3}=\sqrt{3},(\text{Q.E.D})$$

Bài39:lời Giải:

$$LSH=\sum a^3\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{b+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)\geq 9\sum\frac{a^3}{2a+3b+2c+2d}$$

$$=9\sum\frac{a^4}{a\left(2a+3b+2c+2d\right)}\geq\frac{9\left(\sum a^2\right)}{2\sum a^2+5\sum ab+4(ca+bd)}=\frac{9\left(\sum a^2\right)^2}{9\sum a^2}=\sum a^2=RHS.$$

vì $\sum a^2\geq\sum ab;\sum a^2\geq ac+bd$. đúng theo AM-GM.

Bất đẳng thức được chém tan. Đẳng thức tại ; $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

Bài40:lời Giải:

Áp dụng BĐT Schwarl ta có: $A\geq\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}}\geq\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{\sqrt{3(x+y+z)}}$

Vì theo CBS $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\right)^2\leq 3\left(3+x+y+z\right)$

Lại dùng AM-GM: $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\geq 3\sqrt[6]{xyz}\geq 3.$

$$\Rightarrow 3\left(3+x+y+z\right)\leq 3\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+x+y+z\right)$$

Do đó : $A \ge \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{\sqrt{3\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+x+y+z\right)}} = \dfrac{t}{\sqrt{3\left(t-\sum\sqrt{xy}\right)}} \ge \dfrac{t}{\sqrt{3(t-3)}}$

Với $t=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2$.Cuối cùng ta sẽ chứng minh: $\dfrac{t}{\sqrt{3(t-3)}} \ge \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

BĐT đó tương đương với $(t-9)(2t-9)\ge 0$.Nó đúng vì $t=\left(\sum\sqrt{x}\right)^2 \ge \left(3\sqrt[6]{xyz}\right)^2 \ge 9$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh hòan tòan.
Đẳng thức xảy ra tại $x=y=z=1$.
Mở rộng: Cho ba số a,b,c dương và $abc \ge 1$.Chứng minh rằng:

$$\sum\sqrt{\frac{a^{16}+b^{16}}{1+ab}} \ge 3.$$

Bài41:Lời Giải:

Theo AM-GM ta có:

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc.$$

Khi đó: $P=\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{(a+b+c)\left(\sum a^2+2\sum ab\right)}{abc}=$

$$=\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\frac{\sum a\sum a^2}{9abc}\right)+\frac{8\sum a\sum a^2}{9abc}+\frac{2\sum a\sum ab}{abc}$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{\sum a\sum ab}{9abc}}+\frac{8\sum a\sum a^2}{9abc}+\frac{2\sum a\sum ab}{abc} \ge 2+8+18=28.$$

Q.E.DĐẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.

Bài42:Lời Giải:

_ Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\left(\sum\frac{a^3}{2a^2+b^2}\right)\left(\sum a(2a^2+b^2)(2c+a)^2\right) \ge \left(\sum a^3+2\sum ab^2\right)^2$$

Như thế cần chứng minh rằng:

$$3\left(\sum a^3+2\sum ab^2\right)^2 \ge \left(\sum a\right)\left(\sum a(2a^2+b^2)(2c+a)^2\right)(*)$$

Không mất tính tổng quát giã sử $c=\min\{a,b,c\}$. Đặt $a=c+x; b=c+y$.với $x,y\ge 0$.

Khi đó (*) tương đương với $Ac^4+Bc^3+c^2+Ec+F\ge 0$.

Trong đó $A=18\left(x^2-xy+y^2\right); B=3\left(7x^3+18x^2y-15xy^2+7y^3\right)$

$D=14x^4+53x^3y+24x^2y^2-46xy^3+14y^4\ge 0$;

$E=6x^4+3x^4y+50x^3y^2-29x^2y^3-6xy^4+6y^5\ge 0$.

$F=x^6-2x^5y+11x^4y^2-3x^3y^3-2x^2y^4+2xy^5+y^6\ge 0$.

Do cả $A,B,D,E,F\ge 0 \Rightarrow (*)$ đúng hòan tòan.
Bất đẳng thức được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.

Bài43:Lời Giải:

Ta có :

$$RHS=\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}=\frac{2a+b+c}{b+c}+\frac{2b+c+a}{c+a}+\frac{2c+a+b}{a+b}=2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}\right)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow M=\frac{ac}{b(b+c)}+\frac{ba}{c(c+a)}+\frac{cb}{a(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwar ta có:

$$M=\frac{a^2c^2}{abcb(b+c)}+\frac{b^2a^2}{abc(c+a)}+\frac{c^2b^2}{abc(a+b)}\ge\frac{\left(\sum ab\right)^2}{2abc(a+b+c)}\ge\frac{3abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)}=\frac{3}{2}.$$

Q.E.D. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.

Bài44:Lời Giải:

Ta có nhận xét: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)=2\left(a-b\right)^2+2(a-c)(b-c)+(a+b+c)^2$

Áp dụng BĐT $a^2+b^2\ge 2ab.\forall a,b\in R.$ ta có:

$$\left[2\left(a-b\right)^2+2(a-c)(b-c)+(a+b+c)^2\right]^2\ge 8\left|\left(a-c\right)\left(b-c\right)\right|\left[2\left(a-b\right)^2+(a+b+c)^2\right]$$

$$\ge 8\left|\left(a-c\right)\left(b-c\right)\right|.2\sqrt{2}\left|\left(a-b\right)\left(a+b+c\right)\right|=16\sqrt{2}\left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right|=16\sqrt{2}\left|P\right|.$$

Suy ra: $9=\left[3\left(a+b+c\right)\right]^2\ge 16\sqrt{2}.P\to P\le\frac{9}{16\sqrt{2}}.$

Vậy Max P $=\frac{9}{16\sqrt{2}}$.Đẳng thức xảy ra tại $a=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6\sqrt{2}};b=\frac{\sqrt{6}}{6\sqrt{2}};c=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}.$

Bài45:Lời Giải:

a)Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\left(\sum\frac{1}{2a^2+bc}\right)\left(\sum(b+c)^2(2a^2+bc)\right)\ge 4\left(a+b+c\right)^2.$$

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức ban đầu thì ta chỉ cần chứng minh cho

$$\left(a+b+c\right)^4\ge 2\left(\sum(b+c)^2(2a^2+bc)\right)\leftrightarrow\sum a^4+2\sum ab(a^2+b^2)+4\sum a^2bc\ge 6\sum a^2b^2.$$

Mặt khác theo BĐT Schur bậc bốn thì :

$$\sum a^4+4\sum a^2bc\ge\sum a^4+\sum a^2bc\ge\sum ab(a^2+b^2)$$

Nên ta chỉ cần chứng minh $2\sum ab(a^2+b^2)\ge 6\sum a^2b^2.\leftrightarrow\sum ab(a^2+b^2)\ge\sum a^2b^2$

Và theo bđt AM-GM ta có: $ab(a^2+b^2)\ge ab.2ab=2a^2b^2$.tương tự rồi cộng lại ta có đpcm.

b) Áp dụng bất đẳng thức CBS ta có:

$$\left(\sum\frac{1}{22a^2+5bc}\right)\left(\sum(b+c)^2(22a^2+5bc)\right)\ge 4\left(a+b+c\right)^2.$$

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức ban đầu thì ta chỉ cần chứng minh cho

$$4\left(a+b+c\right)^4\ge\left(\sum(b+c)^2(22a^2+5bc)\right)\leftrightarrow 4\sum a^4+11\sum ab(a^2+b^2)+4\sum a^2bc\ge 30\sum a^2b^2.$$

Mặt khác theo BĐT Schur bậc bốn thì : $\sum a^4+\sum a^2bc\ge\sum ab(a^2+b^2)$.

$$\Rightarrow 4\left(\sum a^4+\sum a^2bc\right)+11\sum ab(a^2+b^2)\ge 15\sum ab(a^2+b^2)\ge 30\sum a^2b^2.$$

Đúng! Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c.$

Bài46:Lời Giải:

Ta có: Áp d   ụng b   đt AM-GM cho n số:

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right).1.1....1}<\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)+n-1\right]=\frac{1}{n}\left[\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+n\right]=1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$$

$$\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}=\sqrt[n]{\left(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right).1.1....1}<\frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)+n-1\right]=\frac{1}{n}\left[-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}+n\right]=1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$$

Cộng vế với vế ta được:

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}+1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}=2.\text{ (Q.E.D)}$$

Bài47:Lời Giải:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\le\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\right)^2\le\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

$$\sum\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+2\sum\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)}}\le 3+\sum\frac{b+c}{\sqrt{bc}}.(*)$$

$$\sum\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+2\sum\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)}}-3-\sum\frac{b+c}{\sqrt{bc}}\le 0.$$

Sử dụng bsst AM-GM ta có: $\sum\frac{a(b+c)}{a^2+bc}\le\sum\frac{a(b+c)}{2a\sqrt{bc}}=\sum\frac{(b+c)}{2\sqrt{bc}}$

Mặt khác $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)-ab(a+c)(b+c)=c(a-b)^2(a+b)\ge 0.$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)}}\le 1.\Rightarrow\sum\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)}}\le 3.$$

$$\Rightarrow LHS(*)\le\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}+6-\frac{b+c}{\sqrt{bc}}-3=\sum\left(1-\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\right)=-\sum\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{bc}}\le 0.$$

Suy ra (*)đúng. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c.$

Bài48:Lời Giải:

Áp dụng b ất đ ẳng thức Schwar ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+\frac{1}{4}ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}}\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sum c\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}}.$$

Bất đẳngthức cần chứng minh là :

$$c\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}+b\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ac+c^2}+a\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}\le\frac{(a+b+c)^2}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thứcCBS ta có:

$$c\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}+b\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ac+c^2}+a\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}=$$

$$=\sqrt{c}\sqrt{c\left(a^2+\frac{1}{4}ab+b^2\right)}+\sqrt{b}\sqrt{b\left(a^2+\frac{1}{4}ac+c^2\right)}+\sqrt{a}\sqrt{a\left(b^2+\frac{1}{4}bc+c^2\right)}$$

$$\leq\sqrt{(a+b+c)\left[\frac{3}{4}abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]}\leq\frac{(a+b+c)^2}{2}$$

Bởi vì $\frac{3}{4}abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\leq\frac{(a+b+c)^3}{4}$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$

Điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$.