# MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN TÍCH CÁC BIẾN BẰNG 1.

**LÊ XUÂN ĐẠI**

***(GV Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc)***

Có một số bài toán bất đẳng thức (BĐT) với n biến số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn điều kiện tích của chúng bằng 1 (ta thường gặp với n=3). Với loại bài toán này thường có khá nhiều phương pháp chứng minh. Chuyên đề nhỏ này xin được giới thiệu một kĩ thuật đổi biến số dạng $a_1 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^k, a_2 = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^k, ..., a_n = \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^k$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ dương (ta thường chọn k=1).

***Xin đưa ra một số ví dụ minh hoạ cho phương pháp này***

**Thí dụ 1**. Cho ba số a,b,c dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

***Lời giải***. Tồn tại x,y,z dương sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$, khi đó BĐT (1) trở thành

$$\frac{x/y}{(x/z)+1} + \frac{y/z}{(y/x)+1} + \frac{z/x}{(z/y)+1} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xz}{xy+yz} + \frac{xy}{xz+yz} + \frac{yz}{xy+xz} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

BĐT (2) đúng theo BĐT Nesbit's. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c=1.

**Thí dụ 2**. Cho ba số a,b,c dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

***Lời giải***. Tồn tại x,y,z dương sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$, khi đó BĐT (1) trở thành

$$3 + \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{xz} + \frac{z^2}{xy} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \quad (2)$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \geq x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2$

BĐT này □úng theo BĐT Schur. Vậy bài toán □ược chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c=1.

**Thí dụ 3**. Cho bốn số a,b,c,d dương thoả mãn abcd=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+d)}+\frac{1}{d(1+a)} \geq 2 \quad (1)$$

***Lời giải***. Tồn tại x,y,z,t dương sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{z}{x}, c=\frac{t}{z}, d=\frac{y}{t}$. Khi □ó BĐT (1) trở thành:

$$\frac{y}{x+z}+\frac{x}{z+t}+\frac{z}{y+t}+\frac{t}{x+y} \geq 2$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta □ược:

$$\frac{y}{x+z}+\frac{x}{z+t}+\frac{z}{y+t}+\frac{t}{x+y} \geq \frac{(x+y+z+t)^2}{y(x+z)+x(z+t)+z(y+t)+t(x+y)}$$

Ta chứng minh $\frac{(x+y+z+t)^2}{y(x+z)+x(z+t)+z(y+t)+t(x+y)} \geq 2 \quad (2)$

Ta có (2) $\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+t^2 \geq 2(yz+xt) \Leftrightarrow (x-t)^2+(y-z)^2 \geq 0$. Do □ó BĐT (2) □úng

Vậy (1) □ược chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=d=\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$.

**Thí dụ 4** (*IMO 2000*). Cho ba số dương a,b,c thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

***Lời giải***. Tồn tại x,y,z dương sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$, khi □ó BĐT cần chứng minh trở thành

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz$$

BĐT này □ã quá quen thuộc với chúng ta. Bài toán □ược chứng minh.

**Thí dụ 5** (*IMO 2008*). Cho ba số x,y,z khác 1 thoả mãn xyz=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1\quad (1)$$

***Lời giải***. Tồn tại a,b,c dương sao cho $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$, khi ó BĐT (1) trở thành

$$\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}+1\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}+1\right)^2\right]\ge 1\quad (2)$$

Để chứng minh BĐT (2) ta ặt $u=\frac{a+b}{a-b}, v=\frac{b+c}{b-c}, t=\frac{c+a}{c-a}$ , ta có ngay

$(u+1)(v+1)(t+1)=(u-1)(v-1)(t-1)\Rightarrow uv+vt+ut=-1$.

Khi ó BĐT (2) tương ương với

$$\begin{aligned}&u^2+v^2+t^2+2(u+v+t)\ge 1\\ \Leftrightarrow\ &(u+v+t)^2+2(u+v+t)-2(uv+vt+ut)\ge 1\\ \Leftrightarrow\ &(u+v+t)^2+2(u+v+t)+1\ge 0\\ \Leftrightarrow\ &(u+v+t+1)^2\ge 0\end{aligned}$$

Vậy bài toán ược chứng minh hoàn toàn.

**Thí dụ 6.** Cho ba số x,y,z dương thoả mãn xyz=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{y^2+yz}+\frac{1}{z^2+zx}\ge\frac{3}{2}\quad (1)$$

***Lời giải***. Tồn tại a,b,c dương sao cho $x=\sqrt{\frac{b}{a}}, y=\sqrt{\frac{c}{b}}, z=\sqrt{\frac{a}{c}}$, khi ó BĐT (1) trở thành

$$\frac{a}{b+\sqrt{ac}}+\frac{b}{c+\sqrt{ab}}+\frac{c}{a+\sqrt{bc}}\ge\frac{3}{2}$$

Ta có $\sqrt{ac}\le\frac{a+c}{2};\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2};\sqrt{bc}\le\frac{b+c}{2}$. Do ó

$$\frac{a}{b+\sqrt{ac}}+\frac{b}{c+\sqrt{ab}}+\frac{c}{a+\sqrt{bc}}\ge\frac{2a}{a+2b+c}+\frac{2b}{a+b+2c}+\frac{2c}{2a+b+c}$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{a}{a+2b+c}+\frac{b}{a+b+2c}+\frac{c}{2a+b+c}\ge\frac{3}{4}\quad (2)$

Áp dụng BĐT Cauchy-schwar ta ược:

$$\frac{a}{a+2b+c}+\frac{b}{a+b+2c}+\frac{c}{2a+b+c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(a+2b+c)+b(a+b+2c)+c(2a+b+c)}$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}\ge\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{4}$$

Vậy BĐT (2) �ược chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x=y=z=1.

***Cuối cùng là một số bài tập tương tự***

**Bài 1.** Cho bốn số x,y,z,t dương thoả mãn xyzt=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+xy}+\frac{1}{y^2+yz}+\frac{1}{z^2+zt}+\frac{1}{t^2+tx}\ge 2$$

**Bài 2.** Cho năm số a,b,c,d,e dương thoả mãn abcde=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}+\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\ge\frac{10}{3}$$

**Bài 3**. Cho n số dương $x_1, x_2,..., x_n$ $(n>3)$ thoả mãn $x_1x_2...x_n=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+...+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1$$

**Bài 4**. Cho a,b,c dương thoả mãn abc=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{2}{(c+1)^2+a^2+1}\le 1$$