A. Lý do chọn đề tài

Bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là bài toán luôn có mặt hầu hết trong các kỳ thi HSG và tuyển sinh Đại Học. Không những thế nó còn là bài toán hay và khó nhất trong đề thi.

Trong chương trình giảng dạy và học tập bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhất nhỏ luôn là chủ đề hấp dẫn đối với người dạy lẫn người học. Việc giảng dạy để làm sao cho học sinh học tốt chủ đề này luôn là môt vấn đề khó. Chủ đề này thường dành cho học sinh giỏi nên các bài toán đưa ra thường hay và khó.

Để chứng minh Bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhất nhỏ nhất có nhiều phương pháp, và không có phương pháp nào là vạn năng để giải được mọi bài toán cực trị mà chỉ chỉ có những phương pháp giải được một nhóm các bài toán mà thôi. Một trong các phương pháp khá hiệu quả là dùng đạo hàm cho hàm nhiều biến, tư tưởng cơ bản là khảo sát lần lượt từng biến, bằng cách xem các biến còn lại là tham số cố định. Không có một thuật giải chi tiết nào cho phương pháp này mà chỉ thông qua ví dụ để HS rèn luyện để tự mình tìm ra cách giải quyết như thế nào trong từng bài toán cụ thể và từ đó tìm thấy sơ đồ giải cho riêng mình.

Vì những lý do trên chúng tôi viết chuyên đề này nhằm giúp học sinh có cái nhìn rộng hơn về phương pháp sử dụng đạo hàm trong các bài toán chứng minh BĐT và tìm GTLN, GTNN.

B. Nội Dung

1. Phương pháp đưa về một biến trong các bài toán hai biến.

- **Biến đổi giả thiết và biểu thức cần tìm cực trị để tìm mối quan hệ giữ chúng rồi tìm cách đặt ẩn phụ hợp lý, đưa biểu thức đã cho về hàm một biến để khảo sát.**

Thí dụ 1: Cho x, y là số thực và thoả mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$$

(Cao đẳng khối A, B – 2008)

Hoạt động khám phá:

- *Từ giả thiết* $x^2 + y^2 = 2$ *có thể đưa bài toán về một ẩn không?*
- *Ta nghĩ tới hằng đẳng thức:* $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ *;* $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy+y2$
- *Khai triển biểu thức P cố gắng làm xuất hiện* $x^2 + y^2$ *để sử dụng giả thiết.*
- *Biến đổi biểu thức P và thế vào* $x^2 + y^2 = 2$ *ta có:* $P = 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy$

$$= 2(x+y)(2 - xy) - 3xy$$

- Từ giả thiết: $(x+y)^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = \frac{(x+y)^2 - 2}{2}$

Vậy đến đây ta có thể nghĩ đến việc đưa có thể P về hàm một biến số nếu ta đặt: $t = x + y$

Cần chặn biến t bằng cách sử dụng bất đẳng thức: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

<u>Lời giải</u>:

Ta có:

$$P = 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy$$

$$= 2(x + y)(2 - xy) - 3xy$$

Ta có: $xy = \frac{(x+y)^2-2}{2}$, vì thế sau khi đặt $t = x + y$, thì

$$P(t) = 2t\left(2 - \frac{t^2 - 2}{2}\right) - 3\frac{t^2 - 2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$$

Ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow (x + y)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$

Xét hàm số: $P(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ với $-2 \leq t \leq 2$

Ta có: $P'(t) = -3t^2 - 3t + 6$

Ta có bảng biến thiên

t		-2 1 2	
P'(t)		− 0 +	
P(t)		$\frac{13}{2}$ -7 1	

Vậy:

$\max_{[-2;2]} f(t) = f(1) = \frac{13}{2}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,;\, y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,;\, y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$\min_{[-2;\,2]} f(t) = min\{f(-2);\ f(2)\} = min\{-7;\ 1\} = -7$ khi $x = y = -1$

Thí dụ 2: Cho x, y ≥ 0 và x + y = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$$

(Đại học khối D – 2009)

Hoạt động khám phá:

- *Từ giả thiết x + y = 1 có thể đưa bài toán đã cho về một ẩn không?*
- *Khai triển biểu thức S cố gắng làm xuất hiện* $x + y$ *để sử dụng giả thiết.*

Chú ý hằng đẳng thức: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(\,x^2 - xy + y^2)$$

Sau khi khai triển và thế vào x + y = 1, ta có: $S = 16x^2y^2 - 2xy + 12$

- *Vậy đến đây ta có thể nghĩ đến việc đưa có thể S về hàm một biến số nếu ta đặt:* $t = xy$

Cần chặn biến t bằng cách sử dụng bất đẳng thức: $0 \le xy \le \frac{(x+y)^2}{4}$

<u>Lời giải</u>:

Ta có: $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$

$$= 16x^2y^2 + 12(x + y)(\,x^2 - xy + y^2) + 34xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^2 - 3xy] + 34xy \quad (do\ x + y = 1)$$

$$= 16x^2y^2 - 2xy + 12 \quad (do\ x + y = 1)$$

Đặt xy = t. Ta có: do $x \ge 0, y \ge 0\ nên\ 0 \le xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \le t \le \frac{1}{4}$

Xét hàm số: $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ với $0 \le t \le \frac{1}{4}$. Ta có: $f'(t) = 32t - 2$

Bảng biến thiên

t		0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$	
f'(t)		− 0 +	
f(t)		12	

		$\frac{25}{2}$ ↘ $\frac{191}{16}$ ↗		

Vậy: $\min_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\ ; y = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ x = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\ ; y = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$

$\max_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t) = max\left\{f(0);\ f\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = max\left\{12;\ \frac{25}{2}\right\} = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Thí dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

với x, y là các số thoả mãn điều kiện: $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$.

(Đại học khối B – 2009)

Hoạt động khám phá:

- *Vì giả thiết là biểu thức khá phức tạp nên ta khai thác nó trước cho gọn để dễ sử dụng hơn. Chú ý hằng đẳng thức:* $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(\,x^2 - xy + y^2)$$

và $(x + y)^2 \geq 4xy$. *Khi đó điều kiện bài toán trở thành:* $x + y \geq 1$

- *Ta biến đổi được A như sau:*

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3\left(x^2+y^2\right)^2}{4} - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\left(do\ x^4 + y^4 \geq \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}\right)$$

hay $$A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

- *Vậy đến đây ta có thể nghĩ đến việc đưa có thể A về hàm một biến số được không?(nếu ta đặt:* $t = x^2 + y^2$ *)*
- *Cần chặn biến t bằng cách sử dụng bất đẳng thức:*$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$

<u>Lời giải</u>:

Theo bất đẳng thức hiển nhiên: $(x + y)^2 \geq 4xy$, nên từ

$$(x + y)^3 + 4xy \geq 2 \Rightarrow\ (x + y)^3 + (x + y)^2 \geq (x + y)^3 + 4xy \geq 2$$

$\Rightarrow\ (x+y)^3+(x+y)^2\geq 2$

$\Rightarrow$ [(x+y)-1][$(x+y)^2+(x+y)+2]\geq 0$

$\Rightarrow$ (x+y) - 1≥ 0

(do $(x+y)^2+(x+y)+2=\left[(x+y)+\frac{1}{2}\right]^2+\frac{7}{4}>0,\forall x,y$)

Bài toán được đưa về tìm min, max của:

$$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1$$

với x, y thoả mãn: x+y ≥ 1.

Ta biến đổi A như sau:

$$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1$$

$$=\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3}{2}(x^4+y^4)-2(x^2+y^2)+1$$

$$\geq\frac{3}{2}(x^2+y^2)^2+\frac{3\left(x^2+y^2\right)^2}{4}-2(x^2+y^2)+1$$

(do $x^4+y^4\geq\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}$)

hay $A\geq\frac{9}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)+1$

Vì $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$ (do x+y ≥ 1) nên $x^2+y^2\geq\frac{1}{2}$

Đặt $t=x^2+y^2$

Ta có: $f(t)=\frac{9}{4}t^2-2t+1$ với $t\geq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(t)=\frac{9}{4}t-2$

Ta có bảng biến thiên:

t	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$ $+\infty$
f'(t)		+
f(t)		$\frac{9}{16}$ $+\infty$

Vậy $\min_{t\geq\frac{1}{2}} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}$ xẩy ra khi t = $\frac{1}{2}$

Suy ra $A\geq\frac{9}{16}$. Mặt khác ta dễ thấy $x=y=\frac{1}{2}$ thì $A=\frac{9}{16}$

Tóm lại: minA = $\frac{9}{16}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$

Thí dụ 4: Cho hai số thực x, y (khác 0) thay đổi thoả mãn điều kiện: $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

(Đại học khối A – 2006)

Hoạt động khám phá:

- *Từ giả thiết* $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ *có thể đưa bài toán về ít ẩn hơn không?*
- *Biến đổi biểu thức A, ta được:*

$$A = \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$$

- *Do giả thiết là biểu thức mà số mũ trong các hạng tử ở vế trái lớn hơn vế phải nên ta đặt x = ty thì ta có thể rút được x hoặc y theo t:* $(x+y)xy = x^2+y^2-xy \Longrightarrow$ *đặt* $x = ty \Longrightarrow y = \frac{t^2-t+1}{t^2+t}; x = ty = \frac{t^2-t+1}{t+1}$
- *Vậy đến đây ta có thể đưa có thể A về hàm một biến t. Đến đây ta khảo sát hàm biến t là đi đến được kết quả.*

<u>Lời giải</u>:

Từ giả thiết, ta có:

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3+y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3} = \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$$

Đặt: $x = ty$

từ giả thiết $(x+y)xy = x^2+y^2-xy \Longrightarrow (t+1)ty^3 = (t^2-t+1)y^2$

do đó: $y = \frac{t^2-t+1}{t^2+t}; x = ty = \frac{t^2-t+1}{t+1}$

Từ đó

$$A = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}\right)^2$$

Xét hàm số:

$$f(t) = \frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} \text{ có } f'(t) = \frac{-3t^2+3}{(t^2-t+1)^2}$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$ $+\infty$		-1	1
f'(t)	-	+	-	

$f(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$
	1					

Vậy: GTLN của A là: $f^2(1) = 16$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

2. **Phương pháp khảo sát lần lượt từng biến trong bài toán ba biến.**
   - ***Đối với bất đẳng thức nhiều biến, ta có thể khảo sát lần lượt từng biến một bằng cách chọn một biến làm tham số biến thiên và cố định các biến còn lại, bài toán lúc này trở thành bất đẳng thức một biến. Luôn có tâm thế nhìn biểu thức nhiều biến mà ta cần tìm GTLN, GTNN dưới dạng là một hàm số để ta sử dụng được công cụ hiệu quả trong giải toán là đạo hàm.***
   - ***Sơ đồ tổng quát***

     Giả sử tìm cực trị của biểu thức ba biến x, y, z: P(x, y, z) với điều kiện T nào đó.
     - ***<u>Bước 1:</u> Xem P(x, y, z) là hàm theo biến x, còn y, z la hằng số. Khảo sát hàm này tìm cực trị với điều kiện T. Ta được:***
       $\boldsymbol{P(x,y,z) \geq g(y,z) (\text{hoặc } P(x,y,z) \leq g(y,z))}$
     - ***<u>Bước 2:</u> Xem g(y, z) là hàm biến y, còn z là hằng số. Khảo sát hàm này với điều kiện T. Ta được*** $\boldsymbol{g(y,z) \geq h(z)\ (\text{hoặc } g(y,z) \leq h(z))}$
     - ***<u>Bước 3:</u> Cuối cùng Khảo sát hàm một biến h(z) với điều kiện T tìm min, max của hàm này.***

       ✐ ***Ta đi đến kết luận:*** $\boldsymbol{P(x,y,z) \geq g(y,z) \geq h(z) \geq m}$

       $\boldsymbol{(\text{hoặc } P(x,y,z) \leq g(y,z) \leq h(z) \leq M)}$

Thí dụ 5: Cho hai số thực x, y, z là 3 số thực thuộc $[1; 4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

(Đại học khối A – 2011)

Hoạt động khám phá:

- *Khảo sát lần lượt từng biến như thế nào?*
- *Xem P là một hàm theo biến z, con x, y là hằng số. Khảo sát hàm số với điều kiện đã cho suy ra GTNN của P, tức là* $P(x,y,z) \geq P(x,y)$
- *Khảo sát hàm P(x, y), ở đây có thể đưa P(x, y) về hàm một biến không?*
- *Bằng cách đặt ẩn phụ* $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ *để đưa* $P(x,y)$ *về hàm một biến. Tìm GTNN của hàm một biến*
- *Vậy* $P(x,y,z) \geq P(x,y) = P(t) \geq \frac{34}{33}$

<u>Lời giải:</u>

Ta có:

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

Xem đây là hàm theo biến z; còn x, y là hằng số.

$$P'(z) = \frac{-y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2(z+x)^2}$$

Theo giả thiết: $x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0$ nếu $P \geq 0 \Leftrightarrow z \geq \sqrt{xy}$ (do x, y, z ∈ [1; 4])

t		$\sqrt{xy}$	
P'(z)	-	0	+
P(z)	↘	min	↗

Từ bảng biến thiên:

$$P \geq P\left(\sqrt{xy}\right) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$, do $x \geq y, x \geq z$ và x, y, z ∈ [1; 4] nên $1 \leq t \leq 2$.

Xét hàm

$$f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$$

$$f'(t) = \frac{-2\left[4t^3(t-1)+3(2t^2-t+3)\right]}{(2t^2+3)^2(1+t)^2} < 0, \forall\, t \in [1;2]$$

Suy ra f(t) giảm trên [1; 2], do đó $P \geq P\left(\sqrt{xy}\right) = f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$

Đẳng thức xẩy ra: $\begin{cases} z = \sqrt{xy} \\ t = \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 1, z = 2$

Vậy: $P_{min} = \frac{34}{33}\ khi\ x = 4, y = 1, z = 2$

Thí dụ 6: Cho hai số thực a, b, c là 3 số thực thuộc $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Hoạt động khám phá:

- *Khảo sát lần lượt từng biến như thế nào?*
- *Xem P là một hàm theo biến a, còn b, c là hằng số. Khảo sát hàm số với điều kiện đã cho, suy ra GTLN của P của, tức là* $P(a, b, c) \le g(b, c)$
- *Xem P(b, c) là một hàm theo biến c, còn b là hằng số. Khảo sát hàm số với điều kiện đã cho, suy ra GTLN của P(b, c), tức là* $g(\,b, c) \le h(b)$
- *Tiếp theo khảo sát hàm h(b) suy ra* $h(b) \le \frac{8}{5}$
- *Vậy:* $P(a, b, c) \le g(b, c) \le h(b) \le \frac{8}{5}$

<u>Lời giải:</u>

Đặt

$$P(a) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Xem đây là hàm theo biến a; còn b, c là hằng số.

$$P'(a) = \frac{b}{(a+b)^2} - \frac{c}{(a+c)^2} = \frac{(b-c)(a^2-bc)}{(a+b)^2(a+c)^2}$$

- *Trường hợp 1:* $a \ge b \ge c$ và $a, b, c\ \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$

  Suy ra: $b - c \ge 0;\ a^2 - bc \ge 0$ nên $P'(a) \ge 0$. Do đó: P(a) tăng trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$

  $$\Rightarrow P(a) \le P(3) = \frac{3}{3+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+3} = g(c)$$

  (xem g(c) là hàm theo biến c)
  Mặt khác

  $$g'(c) = \frac{-b}{(b+c)^2} + \frac{3}{(c+3)^2} = \frac{(b-3)(3b-c^2)}{(b+c)^2(c+3)^2} \le 0$$

Do đó: g(c) giảm trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$

$$\Rightarrow g(c) \le g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3+b} + \frac{3b}{3b+1} + \frac{1}{10} = h(b)$$

(xem h(b) là hàm theo biến b)

Ta có

$$h'(b) = \frac{3}{(3b+1)^2} - \frac{3}{(b+3)^2} = \frac{(1-b)(1+b)}{(3b+1)^2(b+3)^2}$$

Ta có bảng biến thiên:

b	$\frac{1}{3}$	1	3
h'(b)	+		-
h(b)	↗	$\frac{8}{5}$	↘

Suy ra $h(b) \le h(1) = \frac{8}{5}$

Vậy: $P(a,b,c) \le P(3,b,c) \le P\left(3,b,\frac{1}{3}\right) \le P\left(3,1,\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5}$ khi $a = 3; b = 1; c = \frac{1}{3}$.

- *Trường hợp 2:* $c \ge b \ge a$ và $a,b,c \in \left[\frac{1}{3};3\right]$

  Từ kết quả của trường hợp 1, ta có: $P(c,b,a) \le \frac{8}{5}$

  Mặt khác:

  $P(a,b,c) - P(c,b,a) =$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \le 0$$

$$\Rightarrow P(a,b,c) \le \frac{8}{5}$$

Vậy $Max\ S = \frac{8}{5}$, xẩy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = \left\{\left(3,1,\frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3},3,1\right); \left(3, \frac{1}{3},1\right)\right\}$

Thí dụ 7: Cho ba số thực dương a,b,c thảo mãn điều kiện: abc + a + c = b

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$$

(Đề thi GV giỏi tỉnh–2008)

Hoạt động khám phá:

- *Từ giả thiết abc + a + c = b có thể đưa bài toán về ít ẩn hơn không?*
- *Biến đổi giả thiết* $a+c=b(1-ac)>0$ *: ta có* $b=\frac{a+c}{1-ac}$, *có thể đưa P về 2 biến (chặn biến:* $a<\frac{1}{c}$*)*
- *Khi đó*: $P=\frac{2}{a^2+1}+\frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)}-2+\frac{3}{c^2+1}\left(0<a<\frac{1}{c}\right)$
- *Với bài này suy nghĩ khám phá hàm số như thế nào? Ta nhìn biểu thức P là hàm một biến a, còn c xem như hằng số.*
- *Khảo sát hàm biến a là f(a) với* $0<a<\frac{1}{c}$ *suy ra* $f(a)\le\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{3}{c^2+1}=g(c)$
- *Tiếp tục khảo sát hàm g(c) với* $c\in(0,+\infty)$ *suy ra* $g(c)\le\frac{10}{3}$
- *Vậy:* $S\le g(c)\le g(c_0)=\frac{10}{3}$

Lời giải:

Biến đổi giả thiết thành:

$$a+c=b(1-ac)>0\Rightarrow a<\frac{1}{c}\text{ và } b=\frac{a+c}{1-ac}$$

Thay vào biểu thức P ta được:

$$P=\frac{2}{a^2+1}+\frac{3}{c^2+1}+\frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)}-2$$

$$=\frac{2}{a^2+1}+\frac{2(a+c)^2}{(a^2+1)(c^2+1)}-2+\frac{3}{c^2+1}$$

Xét hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{(x+c)^2}{(x^2+1)(c^2+1)}-1\ \text{ với } 0<x<\frac{1}{c}\text{ và coi } c \text{ là tham số } (c>0)$$

Ta có

$$f'(x)=\frac{-2c(x^2+2cx-1)}{(1+x^2)^2(1+c^2)}=0$$

$$\Leftrightarrow x_0=-c+\sqrt{c^2+1}\ \in\left(0,\frac{1}{c}\right)$$

Bảng biến thiên:

x	0 $\quad\quad$ x_0 $\quad\quad$ $\frac{1}{c}$
f'(x)	+ $\quad\quad$ -
f(x)	↗ $f(x_0)$ ↘

Khi đó: Từ bảng biến thiên

$$f(x) \leq f(x_0) = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$$S = 2f(a) + \frac{3}{c^2+1} \leq \frac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{3}{c^2+1} = g(c)$$

Ta có

$$g'(c) = \frac{2(1-8c^2)}{(1+c^2)^2(3c+\sqrt{1+c^2})} = 0$$

$$\Leftrightarrow c = c_0 = \frac{1}{\sqrt{8}} \in (0, +\infty)$$

Bảng biến thiên:

c	0 $\quad\quad$ c_0 $\quad\quad$ $+\infty$
g'(c)	+ $\quad\quad$ -
g(c)	↗ $g(c_0)$ ↘

Từ bảng biến thiên suy ra: $g(c) \leq g(c_0)$

$$\Rightarrow S \leq g(c) \leq g(c_0) = \frac{10}{3}$$

Vậy với

$c = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \sqrt{2}$ thì $Max\ S = \frac{10}{3}$

Thí dụ 8: Cho ba số thực dương a, b, c thảo mãn điều kiện: $21\text{ab} + 2\text{bc} + 8\text{ca} \le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$$

(Đề thi Olympic 30/4 – 2004)

Hoạt động khám phá:

- *Với bài này suy nghĩ khám phá hàm số như thế nào? (có thể chuyển theo ẩn mới được không?)*
- *Có thể biểu diễn để biểu thức P và giả thiết cho đơn giản hơn không?*
- *Nếu đặt:* $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ *bài toán chuyển thành bài toán là gì?*
- *Có thể chuyển bài toán sao cho ít ẩn được không?*
- *Từ giả thiết:* $2x + 8y + 21z \le 12xyz \Rightarrow z \ge \frac{2x+8y}{12xy-21}$ và $x > \frac{7}{4y}$
- *Khi đó:* $S \ge x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7} = f(x)$
- *Khảo sát hàm f(x) xem y là tham số cố định. Ta được:* $S \ge f(x) \ge f(x_0) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{2y} = g(y)$
- *Tiếp tục khảo sát một biến g(y)*

Ta đi đến kết luận: $S \ge f(x) \ge g(y) \ge \frac{15}{2}$

<u>Lời giải</u>:

Đặt:

$$x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0;\ 2x + 8y + 21z \le 12xyz \text{ và } S = x + 2y + 3z$$

Từ:

$$2x + 8y + 21z \le 12xyz \Rightarrow z \ge \frac{2x + 8y}{12xy - 21} \text{ và } x > \frac{7}{4y}$$

Từ biểu thức S suy ra được:

$$S \ge x + 2y + \frac{2x + 8y}{4xy - 7} = f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{14 - 32y^2}{(4xy - 7)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y} \in \left(\frac{7}{4y}, +\infty\right)$$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{7}{4y}$	x_0	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	↘	$f(x_0)$	↗

Khi đó: Từ bảng biến thiên

$$S \geq f(x) \geq f(x_0) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{2y} = g(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14} - 28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}} = 0$$

Đặt: $t = \sqrt{32y^2+14}$ thì phương trình $g'(y) = 0$

$$\Leftrightarrow (8y^2-9)\sqrt{32y^2+14} - 28$$

$\Leftrightarrow t^3 - 50t - 122 = 0 \Leftrightarrow t = 8 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$

y	0	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘	$\frac{15}{2}$	↗

Từ bảng biến thiên suy ra: $g(y) \geq g\left(\frac{5}{4}\right)$

$$\Rightarrow S \geq g(y) \geq g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$$

Vậy với:

$y = \frac{5}{4}$, $x = 3$, $z = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{5}, c = \frac{3}{2}$ $thì\, Min\ \ S = \frac{15}{2}$

Thí dụ 9: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 3
Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = 3(a^2+b^2 + c^2) + 4abc$

Hoạt động khám phá:

- *Bài toán cần chứng minh chứa 3 ẩn a, b, c và thoả mãn $a + b + c = 3$. Hãy suy nghĩ biến đổi $T = 3(a^2+b^2 + c^2) + 4abc$ sao cho ít ẩn hơn?*
- *Từ giả thiết:* $a + b + c = 3 \Rightarrow a + b = 3 - c$, mà $a + b > c \Rightarrow 1 \leq c \leq \frac{3}{2}$
- *Khi đó:* $T = 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2ab(2c-3)$
- *Tích ab và tổng a + b = 3 – c gợi cho các em nghĩ đến bất đẳng thức nào?*
$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2$$
- *Khi đó* $T \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2(2c-3)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = f(c)$
- *Khảo sát hàm một biến f(c) đi đen kết quả.*

Ta đi đến kết luận $T \geq f(c) \geq f(1) = 13$

<u>Lời giải</u>:

Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên ta có thể giả sử: $0 < a \leq b \leq c$

Chu vi bằng 3 nên $a + b + c = 3 \Rightarrow a + b = 3 - c$, mà $a + b > c \Rightarrow 1 \leq c \leq \frac{3}{2}$

Ta biến đổi: $T = 3(a^2+b^2 + c^2) + 4abc = 3(a^2+b^2) + 3c^2 + 4abc$

$$= 3[(a+b)^2 - 2ab] + 3c^2 + 4abc = 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2ab(2c-3)$$

Mặt khác:

$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2 \Rightarrow ab(2c-3) \geq \left(\frac{3-c}{2}\right)^2 (2c-3)\ \{vì\ c < \frac{3}{2} \Rightarrow 2c - 3 < 0\}$

Do đó:

$$T \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2(2c-3)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = f(c)$$

Xét hàm số: $f(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}$ $, trên\ \left[1; \frac{3}{3}\right]$

$$\Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 3c = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

Bảng biến thiên

c	1		$\frac{3}{3}$
f'(c)	0	+	
f(c)	13	↗	

Khi đó: Từ bảng biến thiên suy ra

$$f(c) \geq f(1) = 13$$

Suy ra $T \geq f(c) \geq f(1) = 13$ khi $c = 1, a = 1, b = 1$

Vậy min P =13 khi c = 1, a = 1, b = 1.

Thí dụ 10: Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn điều kiện sau: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 2 \end{cases}$

Chứng minh rằng:

$$183 - 165\sqrt{5} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 18$$

(Đề thi Olympic Toán THPT Việt Nam – 2004)

Hoạt động khám phá:

- *Biểu thức* $P = x^4 + y^4 + z^4$ *đối xứng với ba ẩn x, y, z. Biến đổi P theo* $x + y + z, xyz, xy + yz + zx$ *như thế nào?*
- *Ta có* $P = x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$

$$= (4^2 - 2(xy + yz + zx))^2 - 2(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)$$

- *Với mỗi quan hệ trên, chuyển P theo biến mới như thế nào?*
  Đặt $t = xy + yz + zx$ *và từ giả thiết* $x + y + z = 4; xyz = 2$ *ta có* $P = 2(t^2 - 32t + 144)$
- *Tìm điều kiện theo ẩn mới như thế nào?*
  Từ các điều kiện đối với x, y, z ta được $y + z = 4 - x; yz = \frac{2}{x}$ *do đó* $t = x(4 - x) + \frac{2}{x}$
- *Tìm điều kiện đối với ẩn x và chuyển điều kiện đó theo ẩn t.*
  Áp dụng bât đẳng thức Côsi cho 2 số dương y, z ta có

$(y+z)^2 \geq 4yz \Leftrightarrow (4-x)^2 \geq \frac{8}{x} \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 16x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-6x+$ *4≥0*

$$\Leftrightarrow 3-\sqrt{5} \leq x \leq 2$$

- *Xét hàm số* $t(x) = x(4-x) + \frac{2}{x}$ *trên đoạn* $[3-\sqrt{5}; 2]$, *ta có* $t'(x) = \frac{-2(x-1)(x^2-x-1)}{x^2}$

  Từ việc xét dấu của $t'(x)$ *trên đoạn* $[3-\sqrt{5}; 2]$, *ta được* $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5}-1}{2}$

  Khảo sát hàm số $P = 2(t^2 - 32t + 144)$ *trên* $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5}-1}{2}$ *và suy ra*

$$183 - 165\sqrt{5} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 18$$

Bài tập đề nghị

❶ Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

Tìm GTLN của $S = x^2y + y^2z + z^2x$

Đáp số: $\min S = \frac{4}{27}$ *xẩy ra khi* $x = \frac{1}{3}, y = 0, z = \frac{2}{3}$

❷ Cho x, y, z là số thực thoả mãn $x^2+y^2+z^2 = 2$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

$$P = x^3 + y^3 + y^3 - 3xyz$$

Đáp số: $\max P = 2\sqrt{2}$ *xẩy ra khi* $x = \sqrt{2}, y = z = 0$

$\min P = -2\sqrt{2}$ *xẩy ra khi* $x = -\sqrt{2}, y = z = 0$

❸ Cho $x > 0, y > 0, x > 0$ và thoả mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = xy + yz + zx - 2xyz$$

Đáp số: $\min P = \frac{7}{27}$ *xẩy ra khi* $x = y = z = \frac{1}{3}$

❹ Cho $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq 10$$

❺ Tìm GTNN của:

$$T = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

Đáp số: $\min T = -2$ *xẩy ra khi* $a = -b$

❻ Cho $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

❼ Cho $x > 0, y > 0, x > 0$ và thoả mãn điều kiện $x + y + z \leq \frac{3}{2}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Đáp số: $\min P = \frac{15}{2}$ $xẩy\ ra\ khi\ x = y = z = \frac{1}{2}$

C. Kết luận