ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG VĂN HIẾU

SỬ DỤNG MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60 46 40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

***Người hướng dẫn khoa học*: PGS.TS. PHAN HUY KHẢI**

Thái Nguyên, năm 2009

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS.TS Phan Huy Khải, người thầy đã trực tiếp giảng dạy, hướng dẫn và tạo mọi điều kiện giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo sau Đại học Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và các thầy giáo, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến cha mẹ, người thân, bạn bè và tất cả những người đã giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

LỜI NÓI ĐẦU

Bất đẳng thức là một trong những chuyên mục có tính hấp dẫn nhất trong giáo trình giảng dạy và học tập bộ môn toán ở nhà trường phổ thông. Nó là một đề tài thường xuyên có mặt trong các đề thi về toán trong các kỳ thi tuyển sinh quốc gia, cũng như trong các kỳ thi Olympic về toán ở mọi cấp.

Luận văn này dành để trình bày một nhánh của lý thuyết bất đẳng thức – Các bất đẳng thức thông dụng.

Ngoài phần mở đầu và danh mục tài liệu tham khảo luận văn gồm có 5 chương:

Chương 1 với tiêu đề "Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi" dành để trình bày về bất đẳng thức Côsi.

Bất đẳng thức Côsi là bất đẳng thức quan trọng nhất và có nhiều ứng dụng nhất trong chứng minh bất đẳng thức. Trong chương này chúng tôi dành để trình bày các phương pháp cơ bản nhất để sử dụng có hiệu quả bất đẳng thức Côsi.

Chương 2 "Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski" trình bày các ứng dụng của bất đẳng thức Bunhiacopski và bất đẳng thức Bunhiacopski mở rộng.

Một trong những phương pháp hay sử dụng và có tính hiệu quả để chứng minh các bất đẳng thức là sử dụng bất đẳng thức với các dãy đơn điệu. Các kết quả này được trình bày trong chương 3.

Chương 4 dành để trình bày một lớp bất đẳng thức đơn điệu đặc biệt (đó là bất đẳng thức Trêbusép).

Sau hết trong chương 5 trình bày một áp dụng lý thú các kết quả của giải tích lồi để chứng minh bất đẳng thức – đó là sử dụng tính lồi của hàm số để chứng minh bất đẳng thức.

Chương 1

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1.1 BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI.

1.1.1 Định lý. Với n số không âm: $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \geq 2$) ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\ .$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh

- Hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $n = 2$.
- Giả sử bất đẳng thức đã đúng cho n số không âm thì bất đẳng thức cũng đúng với $2n$ số không âm.

Ta có: $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n} \geq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1}.a_{n+2}...a_{2n}}\right) \geq \sqrt[2n]{a_1.a_2...a_{2n}}$, nên bất đẳng thức đúng khi n bằng một luỹ thừa của 2.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với n số không âm, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n-1$ số không âm. Thật vậy, đặt $A = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$; $a_n = \dfrac{A}{n-1}$.

Ta có: $A + \dfrac{A}{n-1} \geq n.\sqrt[n]{\dfrac{a_1.a_2...a_{n-1}.A}{n-1}} \Rightarrow A \geq (n-1).\sqrt[n-1]{a_1.a_2...a_{n-1}}$.

Kết hợp ba điều trên suy ra bất đẳng thức Côsi đúng với mọi n nguyên dương $(n \geq 2) \Rightarrow$ đpcm.

1.1.2 Hệ quả. Với n số dương: $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ ta luôn có:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Chứng minh

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} > 0$, (1)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq n.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} > 0. \quad (2)$$

Nhân từng vế của (1),(2) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: • Bất đẳng thức Côsi chỉ áp dụng được cho các số không âm.

• Bất đẳng thức Côsi là bất đẳng thức quan trọng nhất, quen thuộc nhất, và có một tầm ứng dụng rộng rãi trong các bộ môn của toán học sơ cấp. Đặc biệt là dùng để chứng minh bất đẳng thức. Sự thành công của việc áp dụng bất đẳng thức Côsi để chứng minh các bài toán về bất đẳng thức hoàn toàn phụ thuộc vào sự linh hoạt của từng người sử dụng và kỹ thuật cách chọn các số $a_1, a_2, ..., a_n$.

Sau đây là một số phương pháp vận dụng bất đẳng thức Côsi để chứng minh bất đẳng thức.

1.2 SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI CƠ BẢN.

1.2.1 Nội dung phương pháp.

Qui ước: Gọi hệ quả của bất đẳng thức Côsi là "Bất đẳng thức Côsi cơ bản". Sử dụng hệ quả để chứng minh bất đẳng thức gọi là phương pháp "Sử dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản".

Từ "Bất đẳng thức côsi cơ bản" tổng quát, ta có hai trường hợp riêng sau:

• Với mọi $a, b > 0$, ta có: $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$ hay: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

• Với mọi $a, b, c > 0$, ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ hay: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

1.2.2 Một số thí dụ minh hoạ.

Thí dụ 1.1 (Đề thi tuyển sinh Đại học, cao đẳng khối A – 2005).

Cho $x, y, z > 0$ và thoả mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 4$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản hai lần liên tiếp, ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\right).\quad(1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}2x=y+z\\ y=z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)$ (2)

và $\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right).$ (3)

Cộng từng vế (1),(2),(3) ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{4}$.

Nhận xét: Ta cũng có bất đẳng thức Côsi cơ bản sau:

Với $a,b,c,d>0$ thì:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\ge 16\Rightarrow\frac{1}{a+b+c+d}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Áp dụng vào thí dụ trên, ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{x+x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

Tương tự suy ra: $\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$ và $\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$.

$$\Rightarrow\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{3}{4}$.

<u>Thí dụ 1.2</u> (Bất đẳng thức Nesbit 3 biến).

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$. (1)

Bài giải

Dễ thấy (1) $\Leftrightarrow\left(1+\dfrac{a}{b+c}\right)+\left(1+\dfrac{b}{c+a}\right)+\left(1+\dfrac{c}{a+b}\right)\geq\dfrac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow \left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\geq 9. \quad (2)$$

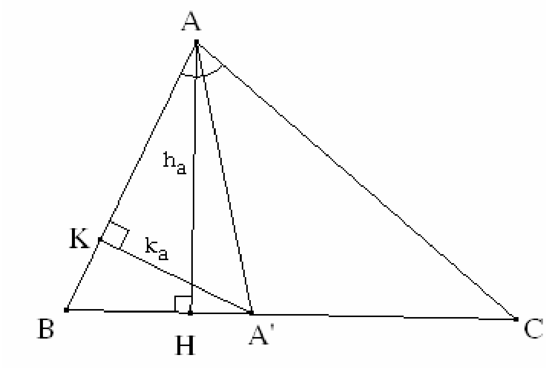
Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản thì (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Nhận xét :

- Bất đẳng thức Nesbit cũng là một trong các bất đẳng thức thông dụng, thường dùng làm bất đẳng thức trung gian để chứng minh một bất đẳng thức khác, nhằm rút gọn phép chứng minh một bất đẳng thức.
- Xin đưa ra một thí dụ hình học lý thú minh hoạ cho bất đẳng thức Nesbit sau:

Cho ΔABC. Vẽ ba phân giác AA',BB',CC'. Gọi k_a,k_b,k_c tương ứng là khoảng cách từ A',B',C' đến AB,BC,CA. Gọi h_a,h_b,h_c tương ứng là ba chiều cao hạ từ A,B,C. Chứng minh: $\dfrac{k_a}{h_a}+\dfrac{k_b}{h_b}+\dfrac{k_c}{h_c}\geq\dfrac{3}{2}$.



(Hình 1.1)

Bài giải

Ta có: $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABA'}+S_{\Delta AA'C}$ (Hình 1.1)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ck_a+\frac{1}{2}bk_a$$

$$\Rightarrow ah_a=k_a(b+c)\Rightarrow\frac{k_a}{h_a}=\frac{a}{b+c}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\dfrac{k_b}{h_b}=\dfrac{b}{c+a}$; $\dfrac{k_c}{h_c}=\dfrac{c}{a+b}$.

Từ đó suy ra: $\frac{k_a}{h_a}+\frac{k_b}{h_b}+\frac{k_c}{h_c}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$. (*)

Theo thí dụ 1.2 $\Rightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

<u>Thí dụ 1.3</u> Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. Chứng minh: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\leq\frac{3}{4}$.

Bài giải

Có: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{x+1}+1-\frac{1}{y+1}+1-\frac{1}{z+1}=3-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right)$.

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản ta có:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\geq\frac{9}{x+1+y+1+z+1}=\frac{9}{4},\qquad \text{(do: } x+y+z=1\text{)}.$$

Vậy: $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}\leq 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=y+1=z+1\\x+y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Nhận xét:

- Xin đưa ra một minh hoạ lượng giác cho thí dụ trên:

Chứng minh rằng trong mọi ΔABC, ta luôn có:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}\leq\frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Thật vậy, ta có (1) tương đương với:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}}\leq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+1}+\frac{\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+1}+\frac{\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}+1}\leq\frac{3}{4}. \qquad (2)$$

Đặt $a=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$; $b=\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}$; $c=\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}$, $(a,b,c>0)$.

Dễ thấy: $a+b+c=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1.$ (3)

Khi đó (2) trở thành: $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\le\frac{3}{4}.$ (4)

Theo thí dụ 1.3 thì từ (3),(4) $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

- Theo cách giải trên, ta cũng chứng minh được dạng tổng quát của thí dụ 1.3 sau:

  Cho $x_1,x_2,...,x_n>0$ thoả mãn: $x_1+x_2+...+x_n=1$.

  Chứng minh: $\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{x_2+1}+...+\frac{x_n}{x_n+1}\le\frac{n}{n+1}$.

<u>Thí dụ 1.4</u> Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng:

$$M=\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\le\frac{3}{4}.$$

Bài giải

Có $M=1-\frac{x+y+z}{2x+y+z}+1-\frac{x+y+z}{x+2y+z}+1-\frac{x+y+z}{x+y+2z}$

$$=3-(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)=$$

$$=3-\frac{1}{4}\left[(2x+y+z)+(x+2y+z)+(x+y+2z)\right]\left[\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right].$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\left[(2x+y+z)+(x+2y+z)+(x+y+2z)\right]\left[\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right]\ge 9.$$

Vậy $M\le 3-\frac{1}{4}.9=\frac{3}{4}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z.$

<u>Thí dụ 1.5</u> Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}<\frac{3}{16}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{a+2b+3c}=\frac{1}{(a+c)+2(b+c)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{2(b+c)}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+2b+3c}\le\frac{1}{16a}+\frac{1}{16c}+\frac{1}{32b}+\frac{1}{32c}=\frac{1}{16a}+\frac{1}{32b}+\frac{3}{32c}. \qquad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=2(b+c)\\a=c\\2b=2c\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0.$

Điều này không xảy ra vì theo giả thiết $a,b,c>0$.

Vậy ta có: $$\frac{1}{a+2b+3c}<\frac{1}{16a}+\frac{1}{32b}+\frac{3}{32c}. \qquad (2)$$

Tương tự: $$\frac{1}{b+2c+3a}<\frac{1}{16b}+\frac{1}{32c}+\frac{3}{32a}, \qquad (3)$$

và $$\frac{1}{c+2a+3b}<\frac{1}{16c}+\frac{1}{32a}+\frac{3}{32b}. \qquad (4)$$

Cộng từng vế của (2),(3),(4) ta được:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}<\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{3}{32}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \qquad (5)$$

Theo giả thiết: $ab+bc+ca=abc\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$ (*)

Suy ra (5) $\Leftrightarrow\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}<\frac{3}{16}\Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Cũng theo bất đẳng thức Côsi cơ bản ta có cách giải khác cho thí dụ trên:

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{a+2b+3c}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{3c}\right)\le\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}\right)\right]+\frac{1}{12c}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{a+2b+3c}\le\frac{1}{16a}+\frac{1}{32b}+\frac{1}{12c}. \qquad (6)$$

Đẳng thức trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b\\4b=3c\end{cases}.$

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{b+2c+3a} \le \dfrac{1}{16b} + \dfrac{1}{32c} + \dfrac{1}{12a}$, (7)

$$\frac{1}{c+2a+3b} \le \frac{1}{16c} + \frac{1}{32a} + \frac{1}{12b}. \quad (8)$$

Đẳng thức xảy ra tương ứng trong (7),(8) là $\begin{cases} c = 2a \\ 4a = 3b \end{cases}$ và $\begin{cases} b = 2c \\ 4c = 3b \end{cases}$.

Cộng từng vế của (6),(7),(8) ta được:

$$\frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{b+2c+3a} + \frac{1}{c+2a+3b} \le \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \quad (9)$$

Đẳng thức trong (9) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (6),(7),(8) xảy ra

$\Leftrightarrow a = b = c = 0$. Vô lý, vì $a, b, c > 0$ nên đẳng thức trong (9) không thể xảy ra.

Theo (*) $\Rightarrow (9) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+2b+3c} + \dfrac{1}{b+2c+3a} + \dfrac{1}{c+2a+3b} < \dfrac{17}{96} < \dfrac{3}{16} \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Bằng cách này ta chứng minh được bất đẳng thức "tốt hơn" bất đẳng thức ban đầu.

Thí dụ 1.6 Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \ge \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \ge \frac{4}{\cos A + \cos B} = \frac{2}{\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{2}{\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}} \ge \frac{2}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \ge \frac{2}{\sin\frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \cos B \\ \cos\frac{A-B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B.$

Tương tự, ta có: $\dfrac{1}{\cos B}+\dfrac{1}{\cos C}\geq\dfrac{2}{\sin\dfrac{A}{2}}$, (2)

$$\dfrac{1}{\cos C}+\dfrac{1}{\cos A}\geq\dfrac{2}{\sin\dfrac{B}{2}}. \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1),(2),(3) $\Rightarrow \dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos B}+\dfrac{1}{\cos C}\geq\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (1),(2),(3) $\Leftrightarrow A=B=C$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Thí dụ 1.7 Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn. Gọi AA', BB', CC' là ba đường cao lần lượt cắt đường tròn tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh: $\dfrac{AA'}{AA_1}+\dfrac{BB'}{BB_1}+\dfrac{CC'}{CC_1}\geq\dfrac{9}{4}$.

Bài giải

Gọi H là trực tâm ΔABC (Hình 1.2), ta có:

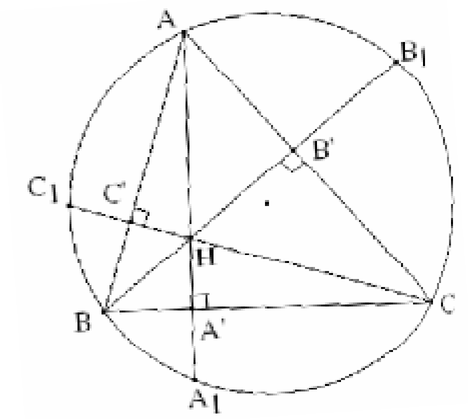
$$A'H = A'A_1,\ B'H = B'B_1,\ C'H = C'C_1. \qquad (1)$$

Có $\dfrac{AA_1}{AA'}+\dfrac{BB_1}{BB'}+\dfrac{CC_1}{CC'}=1+\dfrac{A'A_1}{AA'}+1+\dfrac{B'B_1}{BB'}+$

$$+1+\dfrac{C'C_1}{CC'}=3+\dfrac{A'H}{AA'}+\dfrac{B'H}{BB'}+\dfrac{C'H}{CC'}. \qquad (2)$$

Theo định lý Sêva, thì: $\dfrac{A'H}{AA'}+\dfrac{B'H}{BB'}+\dfrac{C'H}{CC'}=1$.

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow \dfrac{AA_1}{AA'}+\dfrac{BB_1}{BB'}+\dfrac{CC_1}{CC'}=4. \qquad (3)$$



(Hình 1.2)

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\left(\dfrac{AA_1}{AA'}+\dfrac{BB_1}{BB'}+\dfrac{CC1}{CC'}\right)\left(\dfrac{AA'}{AA_1}+\dfrac{BB'}{BB_1}+\dfrac{CC'}{CC_1}\right)\geq 9. \qquad (4)$$

Từ (3),(4) $\Rightarrow \dfrac{AA'}{AA_1}+\dfrac{BB'}{BB_1}+\dfrac{CC'}{CC_1}\geq\dfrac{9}{4}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H$ là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Thí dụ 1.8 Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn. Gọi AA', BB', CC' là ba trung tuyến tương ứng lần lượt cắt đường tròn tại $A_1,\ B_1,\ C_1$.(Hình 1.3).

Chứng minh: $\dfrac{AA'}{AA_1}+\dfrac{BB'}{BB_1}+\dfrac{CC'}{CC_1}\le\dfrac{9}{4}$.

Bài giải

Ta có: $AA'.A'A_1 = BA'.A'C = \dfrac{a^2}{4}$

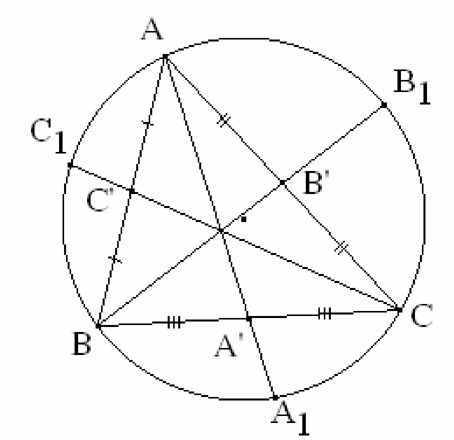
$\Rightarrow AA'.AA_1 = AA'.\left(AA' + A'A_1\right) =$

$= m_a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}$.

$\Rightarrow AA'.AA_1 = \dfrac{b^2+c^2}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AA'}{AA_1} = \dfrac{AA'^2}{AA'.AA_1} = \dfrac{2m_a^{\ 2}}{b^2+c^2}$

$= \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{2\left(b^2+c^2\right)} = 1-\dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{b^2+c^2}$.



(Hình 1.3)

Tương tự ta có: $\dfrac{BB'}{BB_1} = 1-\dfrac{1}{2}.\dfrac{b^2}{c^2+a^2}$; $\dfrac{CC'}{CC_1} = 1-\dfrac{1}{2}.\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

Từ đó $\Rightarrow \dfrac{AA'}{AA_1}+\dfrac{BB'}{BB_1}+\dfrac{CC'}{CC_1}\le\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow 3-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\right)\le\dfrac{9}{4}$.

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Theo thí dụ 1.2 thì (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét: Đây là một minh hoạ hình học nữa cho bất đẳng thức Nesbit.

Thí dụ 1.9 Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, trong đó SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ đường cao SH. Đặt $A\hat{S}H=\alpha$, $B\hat{S}H=\beta$, $C\hat{S}H=\gamma$ (Hình 1.4).

$$\text{Chứng minh: } \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma+\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\le\frac{3}{4}. \qquad (*)$$

Bài giải

Dễ thấy: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (1)

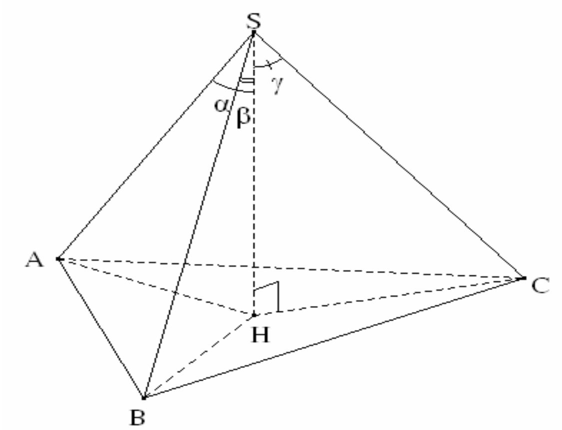
$\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. (2)

Đặt $x = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$,

$y = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$,

$z = \sin^2\gamma + \sin^2\alpha$.

Khi đó, từ (2) $\Rightarrow x + y + z = 4$. (3)



(Hình 1.4)

Từ (1)$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \dfrac{1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma} + \dfrac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma+\sin^2\alpha} + \dfrac{1-\cos^2\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta} \le \dfrac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-1}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma} + \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma-1}{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma} + \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-1}{\sin^2\beta+\sin^2\alpha} \le \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{4}. \quad (4)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \ge 9$. (5)

Từ (3),(5) $\Rightarrow$ (4) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow S.ABC$ là hình chóp đều với các góc ở đỉnh là tam diện vuông.

1.3 SỬ DỤNG TRỰC TIẾP BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI.

1.3.1 Nội dung phương pháp.

Phương pháp này thích hợp với những bất đẳng thức có thể trực tiếp áp dụng ngay bất đẳng thức Côsi, hoặc sau những biến đổi sơ cấp đơn giản là có thể sử dụng ngay được bất đẳng thức Côsi. Lớp các bất đẳng thức này rất rộng, vì thế phương pháp này cũng là một trong những phương pháp thông dụng để chứng minh bất đẳng thức

Kỹ thuật chủ yếu là lựa chọn các số thích hợp để sau khi áp dụng bất đẳng thức Côsi với các số ấy sẽ cho ta bất đẳng thức cần chứng minh .

1.3.2 Một số thí dụ minh hoạ.

Thí dụ 1.10 (Đề thi tuyển sinh Đại học, cao đẳng khối B – 2005).

Chứng minh: $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x$, với $\forall x \in R$.

Bài giải

Do $\left(\frac{12}{5}\right)^x > 0, \left(\frac{15}{4}\right)^x > 0, \left(\frac{20}{3}\right)^x > 0$, $\forall x \in R$. Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2.\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x . \left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2.3^x. \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x \Leftrightarrow x = 0$.

Tương tự, ta có: $\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2.5^x$, (2)

$$\left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2.4^x. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1),(2),(3) ta được:

$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (1),(2),(3) $\Leftrightarrow x = 0$.

Thí dụ 1.11 Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$. Chứng minh: $xyz \leq \frac{1}{8}$.

Bài giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+y} + 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{1}{1+x} \geq 2.\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}} > 0$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{y}{1+y} = \frac{z}{1+z} \Leftrightarrow y = z$.

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+y} \geq 2.\sqrt{\frac{zx}{(1+z)(1+x)}} > 0$, (2)

$$\frac{1}{1+z} \geq 2.\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}} > 0. \quad (3)$$

Nhân từng vế của (1),(2),(3) ta được:

$$\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 8.\sqrt{\left(\frac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}\right)^2} = \frac{8xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$\Leftrightarrow 1 \geq 8xyz \Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{8} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$.

Nhận xét: Với cách lập luận trên có thể xây dựng các bất đẳng thức tương tự sau:

- Cho $x,y,z,t > 0$ và $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+t} = 3$. Chứng minh: $xyzt \leq \frac{1}{81}$.
- Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0, (n \geq 2)$ và $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} = n-1$. Chứng minh: $\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \frac{1}{(n-1)^n}$.

Thí dụ 1.12 Cho $a,b,c > 0$ và $a+b+c = 3$.

Chứng minh: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $1+b^2 \geq 2b$.

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}. \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}$; $\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq (a+b+c) - \frac{ab+bc+ca}{2}$. (3)

Dễ thấy: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$ (do $a+b+c=3$).

Nên từ (3) suy ra: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (1),(2) $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét:

- Với cách làm trên cũng chứng minh được một bất đẳng thức tương tự với 4 số:

  Cho $a,b,c,d>0$ và $a+b+c+d=4$. Chứngminh:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\geq 2.$$

- Nếu ta sử dụng ngay bất đẳng thức Côsi với mẫu số thì sẽ không thu được kết quả. Tuy nhiên, khi ta sử dụng phép biến đổi sơ cấp đơn giản sau đó áp dụng bất đẳng thức Côsi với mẫu thì thí dụ được giải quyết một cách đơn giản và dễ hiểu hơn, nên sẽ thu được kết quả theo yêu cầu.

- Theo cách suy luận trên, ta có lời giải cho các thí dụ sau:

Thí dụ 1.13 Cho $a,b,c,d>0$ và $a+b+c+d=4$. Chứng minh:

$$M=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^2}\geq 2.$$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{1}{1+a^2}=1-\frac{a^2}{1+a^2}\geq 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=1$.

Tương tự ta có: $\frac{1}{1+b^2}\geq 1-\frac{b}{2}$; $\frac{1}{1+c^2}\geq 1-\frac{c}{2}$; $\frac{1}{1+d^2}\geq 1-\frac{d}{2}$. (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow M\geq 4-\frac{a+b+c+d}{2}=2\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (1),(2) $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Thí dụ 1.14 Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$.

Chứng minh: $M=\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\geq 3$.

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\geq a+1-\frac{(a+1)b^2}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}. \qquad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow b^2=1\Leftrightarrow b=1$.

Tương tự ta có: $\dfrac{b+1}{c^2+1}\geq b+1-\dfrac{bc+c}{2}$, (2)

$$\frac{c+1}{a^2+1}\geq c+1-\frac{ca+a}{2}. \qquad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $M\geq 3+\dfrac{a+b+c-(ab+bc+ca)}{2}\geq 3\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (1),(2),(3) $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét: Tương tự cũng chứng minh được bất đẳng thức với 4 số:

Cho $a,b,c,d>0$ và $a+b+c+d=4$. Chứng minh:

$$\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{d^2+1}+\frac{d+1}{a^2+1}\geq 4.$$

<u>Thí dụ 1.15</u> Cho $a,b,c,d>0$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\geq\frac{a+b+c+d}{2}.$$

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\geq a-\dfrac{ab^2}{2ab}=a-\dfrac{b}{2}$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Tương tự, ta có: $\dfrac{b^3}{b^2+c^2}\geq b-\dfrac{c}{2}$, (2)

$$\frac{c^3}{c^2+d^2}\geq c-\frac{d}{2}, \qquad (3)$$

$$\frac{d^3}{d^2+a^2}\geq d-\frac{a}{2}. \qquad (4)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3),(4) ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\geq\frac{a+b+c+d}{2}\quad\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3),(4) xảy ra

$$\Leftrightarrow a=b=c=d\,.$$

<u>Thí dụ 1.16</u> (Bất đẳng thức Minkowski).

Cho $a_1,a_2,a_3\geq 0$; $b_1,b_2,b_3\geq 0$. Chứng minh:

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{b_1b_2b_3}. \qquad (1)$$

Bài giải

- Nếu $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)=0\Rightarrow VT=0$. Ngoài ra tồn tại k $(1\leq k\leq 3)$ mà:

$a_k+b_k=0\Rightarrow a_k=b_k=0$ (do $a_k\geq 0, b_k\geq 0$) $\Rightarrow VP=0\Rightarrow$ bất đẳng thức (1) đúng.

- Nếu $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)>0.$ khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+b_1}\frac{a_2}{a_2+b_2}\frac{a_3}{a_3+b_3}}+\sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1+b_1}\frac{b_2}{a_2+b_2}\frac{b_3}{a_3+b_3}}\leq 1. \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+b_1}.\frac{a_2}{a_2+b_2}.\frac{a_3}{a_3+b_3}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2}+\frac{a_3}{a_3+b_3}\right), \qquad (3)$$

$$\sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1+b_1}.\frac{b_2}{a_2+b_2}.\frac{b_3}{a_3+b_3}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2}+\frac{b_3}{a_3+b_3}\right). \qquad (4)$$

Cộng từng vế (3),(4) $\Rightarrow$ (2) đúng .

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ Đồng thời đẳng thức trong (3),(4) xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_1+b_1}=\dfrac{a_2}{a_2+b_2}=\dfrac{a_3}{a_3+b_3}\\[2mm]\dfrac{b_1}{a_1+b_1}=\dfrac{b_2}{a_2+b_2}=\dfrac{b_3}{a_3+b_3}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\,.$$

Kết hợp hai điều trên $\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\exists k(1\leq k\leq 3): a_k=b_k=0\\ \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}\end{array}\right.$.

Nhận xét: • Xin đưa ra một minh hoạ hình học cho bất đẳng thức trên.

Cho ΔABC. Gọi M, N, P là điểm bên trong cạnh BC, AC và MN. Đặt $S = S_{\Delta ABC}$;

$S_1 = S_{\Delta APN}$; $S_2 = S_{\Delta BPM}$. Chứng minh: $\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} \leq \sqrt[3]{S}$. (5)

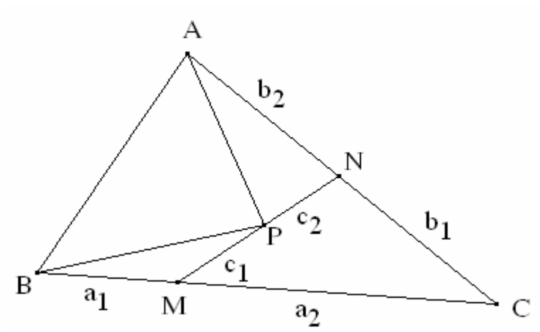
Bài giải

Đặt $BM = a_1$; $CM = a_2$; $CN = b_1$; $AN = b_2$; $MP = c_1$; $NP = c_2$. (Hình 1.5).

Ta có: $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{S_1}{S_{\Delta CMN}} . \dfrac{S_{\Delta CMN}}{S}$

$$= \frac{b_2 c_2}{b_1(c_1 + c_2)} \frac{b_1 a_2}{(b_1 + b_2)(a_1 + a_2)}$$

$$= \frac{a_2 b_2 c_2}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)}. \quad (6)$$



Tương tự, ta có: $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{a_1 b_1 c_1}{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)}$ (7)

(Hình 1.5)

Từ (6),(7) suy ra (5) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{a_1 b_1 c_1} + \sqrt[3]{a_2 b_2 c_2} \leq \sqrt[3]{(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)}$. (8)

Theo thí dụ 1.16 thì (8) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

• Hoàn toàn theo cách chứng minh trên ta cũng chứng minh được dạng tổng quát của bất đẳng thức Minkowski sau:

Cho hai dãy số không âm: $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$ $(n \geq 2, n \in ¢)$. Ta có:

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)...(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 ... b_n}.$$

<u>Thí dụ 1.17</u> Cho $n \geq 2, n \in ¥$. Chứng minh rằng: $C_n^0 . C_n^1 ... C_n^n \leq \left(\dfrac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$.

Bài giải

Vì $C_n^0 = C_n^n = 1$, nên ta có: $C_n^0 . C_n^1 ... C_n^n = C_n^1 C_n^2 ... C_n^{n-1}$. (1)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} \geq (n-1) \sqrt[n-1]{C_n^1 \cdot C_n^2 \cdots C_n^{n-1}}.$$

Vì $C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n - (C_n^0 + C_n^n)$

$$= (1+1)^n - 2 = 2^n - 2.$$

$$\Rightarrow 2^n - 2 \ge (n-1)\sqrt[n-1]{C_n^1 \cdot C_n^2 \cdots C_n^{n-1}}\,. \qquad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra: $C_n^0.C_n^1...C_n^n \le \left(\dfrac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow C_n^1 = C_n^2 = ... = C_n^{n-1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=3 \end{array}\right.$.

<u>Thí dụ 1.18</u> (Bất đẳng thức Côsi suy rộng).

Cho n số không âm: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các số hữu tỉ dương có tổng bằng 1. Chứng minh: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \ge a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n}$.

Bài giải

Vì $\alpha_k > 0, \alpha_k \in ¤ \ \left(k = \overline{1,n}\right)$ và $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.

Nên đặt $\alpha_1 = \dfrac{p_1}{M}, \alpha_2 = \dfrac{p_2}{M}, ..., \alpha_n = \dfrac{p_n}{M}$, trong đó: $p_1, p_2, ..., p_n, M$ là các số nguyên dương và: $p_1 + p_2 + ... + p_n = M$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho p_1 số a_1, p_2 số a_2,..., p_n số a_n ta có:

$$\frac{a_1 + a_1 + ... + a_1 + a_2 + ... + a_2 + ... + a_n + ... + a_n}{M} \ge \sqrt[M]{a_1^{p_1}.a_2^{p_2}...a_n^{p_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_1}{M}a_1 + \frac{p_2}{M}a_2 + ... + \frac{p_n}{M}a_n \ge a_1^{\frac{p_1}{M}}.a_2^{\frac{p_2}{M}}...a_n^{\frac{p_n}{M}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \ge a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Nhận xét : • Khi lấy $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$, ta có bất đẳng thức Côsi dưới dạng:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\,.$$

• Theo lời giải của thí dụ trên ta chứng minh được bất đẳng thức sau (Bất đẳng thức Holder).

Cho hai dãy số không âm: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$, p và q là hai số hữu tỉ dương sao cho: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Chứng minh: $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$.

Thật vậy, theo thí dụ 1.18 ta có kết quả sau:

Nếu $a\geq 0, b\geq 0$ thì $\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\geq ab$. (1)

Áp dụng (1) với $a=\dfrac{a_k}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}}$; $b=\dfrac{b_k}{\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}$; $\forall k=\overline{1,n}$. Ta có:

$$\frac{1}{p}\frac{a_k^p}{\sum_{k=1}^{n}a_k^p}+\frac{1}{q}\frac{b_k^q}{\sum_{k=1}^{n}b_k^q}\geq\frac{a_kb_k}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (2)$$

Vì (2) đúng với mọi $k=1,2,...,n$ nên cộng từng vế n bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq\frac{\sum_{k=1}^{n}a_kb_k}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}. \quad (3)$$

Do $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, nên từ (3) $\Rightarrow$ đpcm.

Đặc biệt: Nếu $p=q=2$ thì từ bất đẳng thức Hônđe ta có được bất đẳng thức Bunhiacopski: $\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$.

<u>Thí dụ 1.19</u> Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\geq\frac{R}{3r}. \quad (1)$$

Bài giải

Áp dụng hệ thức $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\geq\frac{1}{12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\geq 9\sin A\sin B\sin C$. (3)

Đẳng thức trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C$.

Mặt khác, trong mọi ΔABC thì $\cos A+\cos B+\cos C\leq \frac{3}{2}$.

Từ (3) suy ra:

$$\left(\sin A+\sin B+\sin C\right)\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)\geq 6\sin A\sin B\sin C\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\geq \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{6\sin A\sin B\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\geq \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{48\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{1}{12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét :

• Trong thí dụ này, ngoài sử dụng bất đẳng thức Côsi, còn sử dụng đồng thời các hệ thức lượng giác, bất đẳng thức lượng giác cơ bản đã biết trong tam giác và phép biến đổi tương đương để chứng minh. Việc vận dụng nhiều phương pháp khác nhau, nhiều kết quả toán học khác nhau để chứng minh một bài toán là một điều mà người học toán, làm toán cần quan tâm.

• Thông qua ví dụ này cho thấy việc phân loại các phương pháp chứng minh chỉ có tính chất tương đối mà thôi.

1.4 THÊM BỚT HẰNG SỐ KHI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI.

1.4.1 Nội dung phương pháp.

Ta hãy bắt đầu bằng một thí dụ đơn giản:

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}-1\leq \frac{2(a+b+c)}{3}$.

Bài giải

Biểu thức dưới dấu căn bậc 3 là một tích của hai thừa số. Để có thể sử dụng được bất đẳng thức Côsi ta cần viết: $ab=ab.1$; $bc=bc.1$; $ca=ca.1$.

Nói khác đi, ta đã thêm vào thừa số 1 (hằng số ở đây là 1).

Khi đó theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{ab.1} \le \dfrac{a+b+1}{3}$, (1)

$$\sqrt[3]{bc} = \sqrt[3]{bc.1} \le \frac{b+c+1}{3}, \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{ca} = \sqrt[3]{ca.1} \le \frac{c+a+1}{3}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \le \dfrac{2(a+b+c)}{3} + 1 \;\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Phương pháp giải như trên gọi là phương pháp thêm bớt hằng số khi sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Vấn đề quan trọng ở chỗ cần chọn hằng số như thế nào để có thể áp dụng được bất đẳng thức Côsi vào bất đẳng thức cần chứng minh. Đồng thời phải chọn đúng hệ số khi ghép cặp để đẳng thức có thể xảy ra được.

1.4.2 Một số thí dụ minh hoạ.

Thí dụ 1.20 Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh: $x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{4}{3}$.

Bài giải

Ta có: $x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} = x + \dfrac{1}{2}\sqrt{x.4y} + \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\dfrac{1}{2}\sqrt{x.4y} + \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z} \le \dfrac{x+4y}{4} + \dfrac{x+4y+16z}{12}$.

$\Rightarrow x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} \le \dfrac{4}{3}(x+y+z) = \dfrac{4}{3}$ (do $x + y + z = 1$) $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 4y = 16z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{16}{21} \\ y = \dfrac{4}{21} \\ z = \dfrac{1}{21} \end{cases}$.

Thí dụ 1.21 Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=\frac{3}{4}$.

Chứng minh: $\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\le 3$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\sqrt[3]{a+3b}=\sqrt[3]{(a+3b).1.1}\le\frac{a+3b+1+1}{3}$, (1)

$$\sqrt[3]{b+3c}=\sqrt[3]{(b+3c).1.1}\le\frac{b+3c+1+1}{3}, \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{c+3a}=\sqrt[3]{(c+3a).1.1}\le\frac{c+3a+1+1}{3}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được:

$\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\le\frac{4(a+b+c)+6}{3}=3\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{4}$.

Thí dụ 1.22 Cho $a,b,c>0$ và $a^4+b^4+c^4=48$. Chứng minh: $ab^2+bc^2+ca^2\le 24$.

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $a^4+b^4+b^4+2^4\ge 4\sqrt[4]{a^4.b^4.b^4.2^4}=8ab^2$, (1)

$$b^4+c^4+c^4+2^4\ge 4\sqrt[4]{b^4.c^4.c^4.2^4}=8bc^2, \quad (2)$$

$$c^4+a^4+a^4+2^4\ge 4\sqrt[4]{c^4.a^4.a^4.2^4}=8ca^2. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được:

$3(a^4+b^4+c^4)+48\ge 8(ab^2+bc^2+ca^2)\Leftrightarrow \quad ab^2+bc^2+ca^2\le 24 \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=2$.

Thí dụ 1.23 Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3abc$. Chứng minh: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge 3$.

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+1\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3}\frac{1}{b^3}.1}=\frac{3}{ab}$. (1)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1$.

Tương tự, ta có : $\dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} + 1 \geq \dfrac{3}{bc}$, (2)

$$\frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + 1 \geq \frac{3}{ca}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $2\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}\right) + 3 \geq 3\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}\right)$. (4)

Theo giả thiết: $a + b + c = 3abc \Rightarrow \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = 3$. (5)

Từ (4),(5) $\Rightarrow \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} \geq 3 \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3),(5) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Nhận xét: Qua các thí dụ trên ta đã thấy rõ cách thêm các hằng số thích hợp sẽ giúp ích rất nhiều trong chứng minh. Ở thí dụ 1.20, 1.21 hằng số thêm vào là hằng số nhân, còn hằng số thêm vào trong thí dụ 1.22 và 1.23 là hằng số cộng. Tương tự ta có lời giải cho các thí dụ sau:

<u>Thí dụ 1.24</u> Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $f(x) = x^3(2-x)^5$ trên $[0,2]$.

Bài giải

Có $f(x) = \dfrac{3^3}{5^3}\left(\dfrac{5x}{3}\right)^3(2-x)^5$.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3^3}{5^3}\left(\frac{5x}{3}\right)\left(\frac{5x}{3}\right)\left(\frac{5x}{3}\right)(2-x)(2-x)(2-x)(2-x)(2-x).$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có: $f(x) \leq \dfrac{3^3}{5^3}\left[\dfrac{1}{8}\left(3.\dfrac{5x}{3} + 5(2-x)\right)\right]^8 = \dfrac{3^3}{5^3}\dfrac{5^8}{4^8} = \dfrac{3^3.5^5}{4^8}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{5x}{3} = 2 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4} \in [0;2]$.

Vậy $Max f(x) = \dfrac{3^3.5^5}{4^8}$ khi $x = \dfrac{3}{4}$.

Nhận xét: Có thể dùng đạo hàm để giải thí dụ trên.

Thí dụ 1.25 Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh: $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3} \geq \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^3}{y^3}+1 \geq 3.\sqrt[3]{\frac{x^6}{y^6}} = 3\frac{x^2}{y^2}$, (1)

$\frac{y^3}{z^3}+\frac{y^3}{z^3}+1 \geq 3.\sqrt[3]{\frac{y^6}{z^6}} = 3\frac{y^2}{z^2}$, (2)

$\frac{z^3}{x^3}+\frac{z^3}{x^3}+1 \geq 3.\sqrt[3]{\frac{z^6}{x^6}} = 3\frac{z^2}{x^2}$. (3)

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $2\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)+3 \geq 3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)$. (4)

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsi thì: $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}.\frac{y^3}{z^3}.\frac{z^3}{x^3}} = 3$. (5)

Từ (4),(5) suy ra: $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3} \geq \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3),(5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

1.5 THÊM BỚT BIẾN KHI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI.

1.5.1 Nội dung phương pháp.

Phương pháp sử dụng trong 1.5 cũng tương tự như phương pháp trong 1.4. Điều khác nhau chỉ là ở chỗ thay cho thêm hằng số, thì việc thêm bớt vào bất đẳng thức cần chứng minh ở đây là các biểu thức chứa biến.

1.5.2 Một số thí dụ minh hoạ.

Thí dụ 1.26 Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2} \geq a^3+b^3+c^3$.

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{a^5}{b^2}+ab^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^5}{b^2}ab^2} = 2a^3$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a^5}{b^2} = ab^2 \Leftrightarrow a = b$.

Tương tự ta có: $\frac{b^5}{c^2} + bc^2 \geq 2b^3$; $\frac{c^5}{a^2} + ca^2 \geq 2c^3$. (2)

Từ (1),(2) suy ra: $M + \left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right)$. (3)

Ta chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$. (4)

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$a^3 + a^3 + c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3a^3c^3} = 3ca^2 \Rightarrow 2a^3 + c^3 \geq 3ca^2$.

Tương tự ta có: $2b^3 + a^3 \geq 3ab^2$; $2c^3 + b^3 \geq 3bc^2$.

Từ đó $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2 \Rightarrow$ (4) đúng.

Cộng từng vế của (3),(4) ta được: $M \geq a^3 + b^3 + c^3 \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(4) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

<u>Thí dụ 1.27</u> Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$.

Bài giải

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \geq 2.\sqrt{\frac{x^2}{1+y}.\frac{1+y}{4}} = x$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x^2}{1+y} = \frac{1+y}{4} \Leftrightarrow 2x = 1 + y$.

Tương tự ta có: $\frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \geq y$; $\frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \geq z$. (2)

Từ (1),(2) suy ra: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3(x+y+z)}{4} - \frac{3}{4}$. (3)

Theo bất đẳng thức Côsi thì: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$. (4)

Từ (4),(5) $\Rightarrow \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Thí dụ 1.28 Cho $x,y,z>0$ và $xy\sqrt{xy}+yz\sqrt{yz}+zx\sqrt{zx}=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^6}{x^3+y^3}+\dfrac{y^6}{y^3+z^3}+\dfrac{z^6}{z^3+x^3}\ge\dfrac{1}{2}$.

Bài giải

Đặt $a=x^3, b=y^3, c=z^3$. Khi đó bài toán trở thành:

Cho $a,b,c>0$ và $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$.

Chứng minh: $M=\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}\ge\dfrac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4}\ge 2\sqrt{\dfrac{a^2}{a+b}.\dfrac{a+b}{4}}=a$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{a+b}=\dfrac{a+b}{4}\Leftrightarrow a=b$.

Tương tự ta có: $\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4}\ge b$, (2)

$\dfrac{c^2}{c+a}+\dfrac{c+a}{4}\ge c$. (3)

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $M+\dfrac{a+b+c}{2}\ge a+b+c\Rightarrow M\ge\dfrac{a+b+c}{2}$. (4)

Dễ thấy với $a,b,c>0$ thì $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$. (5)

Từ (4),(5) $\Rightarrow M\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (1),(2),(3),(5)

$$\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}.$$

Thí dụ 1.29 Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3abc$. Chứng minh:

$$\frac{bc}{a^3(c+2b)}+\frac{ca}{b^3(a+2c)}+\frac{ab}{c^3(b+2a)}\ge 1 \quad . \tag{1}$$

Bài giải

Đặt $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{1}{b}, z=\dfrac{1}{c}$. Khi đó (1) trở thành: Cho $x,y,z>0$ và $xy+yz+zx=3$.

Chứng minh: $M=\frac{x^3}{y+2z}+\frac{y^3}{z+2x}+\frac{z^3}{x+2y}\ge 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{9x^3}{y+2z}+(y+2z)x\ge 2\sqrt{\frac{9x^3}{y+2z}(y+2z)x}=6x^2, \quad (1)$$

$$\frac{9y^3}{z+2x}+(z+2x)y\ge 2\sqrt{\frac{9y^3}{z+2x}(z+2x)y}=6y^2, \quad (2)$$

$$\frac{9z^3}{x+2y}+(x+2y)z\ge 2\sqrt{\frac{9z^3}{x+2y}(x+2y)z}=6z^2. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $9M+3(xy+yz+zx)\ge 6\left(x^2+y^2+z^2\right)$. (4)

Ta luôn có: $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ và do $xy+yz+zx=3$. (5)

Nên từ (4) suy ra: $M=\frac{x^3}{y+2z}+\frac{y^3}{z+2x}+\frac{z^3}{x+2y}\ge 1$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3),(5) xảy ra

$$\Leftrightarrow x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Thí dụ 1.30 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{(b+c)^2}+\frac{b^3}{(c+a)^2}+\frac{c^3}{(a+b)^2}\ge\frac{a+b+c}{4}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{8a^3}{(b+c)^2}+(b+c)+(b+c)\ge 3\sqrt[3]{\frac{8a^3}{(b+c)^2}(b+c)^2}=6a. \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b+c=2a$.

Tương tự ta có: $\frac{8b^3}{(c+a)^2}+(c+a)+(c+a)\ge 6b$, (2)

$$\frac{8c^3}{(a+b)^2}+(a+b)+(a+b)\ge 6c. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $8\left(\dfrac{a^3}{(b+c)^2}+\dfrac{b^3}{(c+a)^2}+\dfrac{c^3}{(a+b)^2}\right)\geq 2(a+b+c)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{(b+c)^2}+\frac{b^3}{(c+a)^2}+\frac{c^3}{(a+b)^2}\geq\frac{a+b+c}{4} \quad \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

<u>Thí dụ 1.31</u> Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ thoả mãn: $\dfrac{1}{3^x}+\dfrac{1}{3^y}+\dfrac{1}{3^z}=1$. Chứng minh :

$$\frac{9^x}{3^x+3^{y+z}}+\frac{9^y}{3^y+3^{z+x}}+\frac{9^z}{3^z+3^{x+y}}\geq\frac{3^x+3^y+3^z}{4}.$$

Bài giải

Đặt $a=3^x, b=3^y, c=3^z \Rightarrow a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=abc$. Khi đó thí dụ trên trở thành: Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{a+bc}+\frac{b^2}{b+ca}+\frac{c^2}{c+ab}\geq\frac{a+b+c}{4}. \qquad (1)$$

Có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{a^2+abc}+\dfrac{b^3}{b^2+abc}+\dfrac{c^3}{c^2+abc}\geq\dfrac{a+b+c}{4}$. (2)

Thay $abc=ab+bc+ca$ vào (2) , ta được:

(2) $\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geq\dfrac{a+b+c}{4}$. (3)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{a+b}{8}+\frac{a+c}{8}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}.\frac{a+b}{8}.\frac{a+c}{8}}=\frac{3a}{4}. \qquad (4)$$

Đẳng thức trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a^3}{(a+b)(a+c)}=\dfrac{a+b}{8}=\dfrac{a+c}{8}\Leftrightarrow a=b=c$.

Tương tự: $\dfrac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{b+c}{8}+\dfrac{b+a}{8}\geq\dfrac{3b}{4}$, (5)

$$\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\frac{c+a}{8}+\frac{c+b}{8}\geq\frac{3c}{4}. \qquad (6)$$

Cộng từng vế của (4),(5),(6) ta được:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{a+b+c}{4}\ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (4),(5),(6) xảy ra

$$\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=0.$$

<u>Thí dụ 1.32</u> Cho $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh:

$$M=\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3(1+y)(1+z)}{64(1+y)(1+z)}}=\frac{3x}{4}. \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)}=\dfrac{1+y}{8}=\dfrac{1+z}{8}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z\\2x=1+y\end{cases}.$

Tương tự ta có : $\dfrac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\dfrac{1+z}{8}+\dfrac{1+x}{8}\geq\dfrac{3y}{4},$ (2)

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8}\geq\frac{3z}{4}. \qquad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $M+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{x+y+z}{2}.$ (4)

Theo bất đẳng thức Côsi thì: $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=1.$ (5)

Từ (4),(5) $\Rightarrow M\geq\dfrac{3}{4}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (1),(2),(3),(5)

$$\Leftrightarrow x=y=z=1.$$

1.6 NHÓM CÁC SỐ HẠNG KHI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI.

1.6.1 Dạng 1.

1.6.1.2 **Nội dung phương pháp**.

Khi chứng minh bất đẳng thức, ta cần sử dụng nhiều bất đẳng thức phụ. Để dấu đẳng thức xảy trong bất đẳng thức chính ta cần đồng thời có đẳng thức trong các bất đẳng thức phụ xảy ra. Việc nhóm các số hạng trong biểu thức của bất đẳng thức ban đầu phải đảm bảo được tiêu chí đó.

Xét một thí dụ đơn giản sau: Cho $x,y,z>0$. Chứng minh:

$$M=\frac{x}{y+z}+\frac{y+z}{x}+\frac{y}{z+x}+\frac{z+x}{y}+\frac{z}{x+y}+\frac{x+y}{z}\geq\frac{15}{2}. \quad (1)$$

Nếu ta thực hiện phép nhóm: $M=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y+z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z+x}+\frac{z+x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x+y}{z}\right)$

và để ý rằng, theo bất đẳng thức Côsi thì mỗi biểu thức trong ngoặc đều ≥ 2, suy ra $M\geq 6$. Như thế chưa chứng minh được (1).

Mặt khác, đẳng thức xảy ra: Nghĩa là $M=6$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{y+z}+\frac{y+z}{x}=2\\ \frac{y}{z+x}+\frac{z+x}{y}=2\\ \frac{z}{x+y}+\frac{x+y}{z}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{y+z}=\frac{y+z}{x}\\ \frac{y}{z+x}=\frac{z+x}{y}\\ \frac{z}{x+y}=\frac{x+y}{z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+z\\ y=z+x\\ z=x+y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x,y,z>0$. Vậy $M>6$.

Nguyên nhân không chứng minh được (1) vì phép nhóm các số hạng trên chưa thích hợp.

Dạng 1 xét các phép nhóm thoả mãn tiêu chí: thoả mãn yêu cầu bài toán và đảm bảo các bất đẳng thức phụ đồng thời xảy ra đẳng thức.

1.6.1.2 **Một số thí dụ minh hoạ**.

<u>Thí dụ 1.33</u> Cho $x,y,z>0$. Chứng minh:

$$M=\frac{x}{y+z}+\frac{y+z}{x}+\frac{y}{z+x}+\frac{z+x}{y}+\frac{z}{x+y}+\frac{x+y}{z}\geq\frac{15}{2}. \quad (1)$$

Bài giải

Dễ thấy: $M = \left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$.

Ta có (theo thí dụ 1.2): $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$. (2)

Đẳng thức xảy ra trong (2) $\Leftrightarrow x = y = z$.

Theo bất đẳng thức Côsi, thì: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \quad ; \quad \frac{y}{z}+\frac{z}{y} \geq 2 \quad ; \quad \frac{z}{x}+\frac{x}{z} \geq 2$. (3)

Đẳng thức trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Từ (2),(3) suy ra: $M \geq \frac{3}{2}+6 = \frac{15}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Nhận xét: • Cách giải này lý giải vì sao phép nhóm biểu thức M trình bày trong phần mở đầu không thể dùng để chứng minh bất đẳng thức trong thí dụ 1.33 trên.

• Để sử dụng được bất đẳng thức Côsi, ta đã khéo léo tách vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành các nhóm, rồi đánh giá từng nhóm nhờ bất đẳng thức Côsi. Phép nhóm trong thí dụ này đã đảm bảo được tiêu chí: Các bất đẳng thức sử dụng trong khi chứng minh xảy ra đẳng thức đồng thời.

Thí dụ 1.34 Cho $a \geq 3$. Chứng minh: $N = a + \frac{1}{a} \geq \frac{10}{3}$.

Bài giải

Có $N = \left(\frac{a}{9}+\frac{1}{a}\right)+\frac{8a}{9}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{a}{9}+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{9}\frac{1}{a}} = \frac{2}{3}$ (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{9} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 3$.

Từ giải thiết: $a \geq 3 \Rightarrow \frac{8a}{9} \geq \frac{8}{3}$. (2)

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a = 3$.

Cộng từng vế của (1),(2) ta được : $N \geq \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra $\Leftrightarrow a = 3$.

Nhận xét:

- Rõ ràng không thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi: $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Vì dấu đẳng thức không thể xảy ra do $a \geq 3 \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 2$, nên chưa thể chứng minh được thí dụ trên.

- Lý giải vì sao lại chọn cách tách và nhóm như trên:

Thông thường ta sẽ viết: $N = ka + \frac{1}{a} + (1-k)a$, với $k \geq 0$.

Khi sử dụng bất đẳng thức Côsi: $ka + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{k}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ka = \frac{1}{a} \Leftrightarrow ka^2 = 1$. (*)

Mặt khác, nói chung đẳng thức thường đạt được tại các đầu mút của điều kiện. Ở đây $a \geq 3$, thì đẳng thức thường xảy ra khi $a = 3$. Thay lại vào (*) ta có $k = \frac{1}{9}$.

Vì vậy ta phân tích được: $N = \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) + \frac{8a}{9}$.

- Có thể dùng phương pháp khác để giải thí dụ trên (phương pháp sử dụng chiều biến thiên của hàm số) như sau:

Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$, với $x \geq 3$.

Có $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$, khi $x \geq 3 \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến khi $x \geq 3$.

Do $a \geq 3 \Rightarrow f(a) \geq f(3) \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq \frac{10}{3} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 3$.

- So sánh hai cách giải trên cho thấy, một thí dụ có thể có nhiều cách giải khác nhau. Cách giải này là đơn giản, tối ưu với thí dụ này nhưng chưa hẳn đã là tối ưu với thí dụ khác (chẳng hạn trong thí dụ 1.34 giải theo phương pháp chiều biến thiên của hàm số vừa tự nhiên, vừa gọn gàng và sáng sủa hơn rất nhiều so với phương pháp sử dụng bất đẳng thức Côsi).

Thí dụ 1.35 Cho $a \geq 2$. Chứng minh: $M = a + \frac{1}{a^2} \geq \frac{9}{4}$.

Bài giải

Có $M = \left(\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{3a}{4}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{8}\frac{a}{8}\frac{1}{a^2}} = \frac{3}{4}$. (1)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{8} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a = 2$.

Theo giả thiết $a \geq 2 \Rightarrow \frac{3a}{4} \geq \frac{6}{4}$. (2)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$.

Từ (1),(2) suy ra: $M \geq \frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong(1),(2) xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$.

Nhận xét: Tương tự thí dụ 1.34 ta có nhận xét sau:

- Lý giải vì sao có cách nhóm trên:

$M = \left(ka + ka + \frac{1}{a^2}\right) + (1-2k)a$, với $k \geq 0$.

Khi sử dụng bất đẳng thức Côsi: $ka + ka + \frac{1}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{ka.ka.\frac{1}{a^2}} = 3\sqrt[3]{k^2}$ ta sẽ triệt tiêu được biến a.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ka = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow ka^3 = 1$.

Do $a \geq 2$ nên thông thường đẳng thức xảy ra khi $a = 2$, khi đó $k = \frac{1}{8}$. Vì vậy ta có cách nhóm như trên.

• Dùng phương pháp khác để giải:

Xét hàm số $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$, với $x\geq 2$.

Ta có $f'(x)=1-\frac{2}{x^3}>0$, khi $x\geq 2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ là hàm số đồng biến khi $x\geq 2$.

Với $a\geq 2$ $\Rightarrow$ $f(a)\geq f(2)\Leftrightarrow a+\frac{1}{a^2}\geq\frac{9}{4}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=2$.

• Tương tự ta có lời giải cho các thí dụ sau:

<u>Thí dụ 1.36</u> Cho $a\geq 6$. Chứng minh: $M=a^2+\frac{18}{\sqrt{a}}\geq 36+3\sqrt{6}$.

Bài giải

Viết lại M dưới dạng: $M=\frac{a^2}{2\sqrt{6}}+\frac{18}{\sqrt{a}}+\left(1-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{a^2}{2\sqrt{6}}+\frac{18}{\sqrt{a}}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2\sqrt{6}}\frac{18}{\sqrt{a}}}=2\sqrt{\frac{9a\sqrt{a}}{\sqrt{6}}}\geq 6\sqrt{6}$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=6$.

Theo giả thiết $a\geq 6$ nên $\left(1-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)a^2\geq 36-3\sqrt{6}$. (2)

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=6$.

Từ (1),(2) $\Rightarrow M\geq 6\sqrt{6}+36-3\sqrt{6}=36+3\sqrt{6}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong(1),(2) xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=6$.

<u>Thí dụ 1.37</u> Cho $x,y>0$ và $x+y\geq 4$. Chứng minh: $M=2x+3y+\frac{6}{x}+\frac{10}{y}\geq 18$.

Bài giải

Viết lại M dưới dạng: $M=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3x}{2}+\frac{6}{x}+\frac{5y}{2}+\frac{10}{y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có : $\frac{3x}{2}+\frac{6}{x}\geq 2\sqrt{\frac{3x}{2}.\frac{6}{x}}=6$, (1)

$$\frac{5y}{2}+\frac{10}{y}\geq 2\sqrt{\frac{5y}{2}.\frac{10}{y}}=10. \qquad (2)$$

Theo giả thiết: $x+y\geq 4 \Rightarrow \frac{x+y}{2}\geq 2.$ (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra: $M\geq 2+6+10=18\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

<u>Thí dụ 1.38</u> Cho $x,y>0$ và $x+y\geq 4$. Chứng minh : $\frac{3x^2+4}{4x}+\frac{2+y^3}{y^2}\geq\frac{9}{2}$.

Bài giải

Ta có: $\frac{3x^2+4}{4x}+\frac{2+y^3}{y^2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}+2\left(\frac{1}{y^2}+\frac{y}{8}+\frac{y}{8}\right)+\frac{x+y}{2}.$ (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{4}.\frac{1}{x}}=1,$ (2)

và $2\left(\frac{1}{y^2}+\frac{y}{8}+\frac{y}{8}\right)\geq 2.3\sqrt[3]{\frac{1}{y^2}.\frac{y}{8}\frac{y}{8}}=\frac{3}{2}.$ (3)

Theo giả thiết thì: $\frac{x+y}{2}\geq 2.$ (4)

Cộng từng vế của (2),(3),(4) và theo (1) ta được: $\frac{3x^2+4}{4x}+\frac{2+y^3}{y^2}\geq\frac{9}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (2),(3),(4) $\Leftrightarrow x=y=2$.

<u>Thí dụ 1.39</u> Cho $x>y>0$. Chứng minh: $x+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}\geq 3.$

Bài giải

Có: $x+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}=(x-y)+\frac{y+1}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}-1.$ (1)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$(x-y)+\frac{y+1}{2}+\frac{y+1}{2}+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}\geq 4.\sqrt[4]{\frac{(x-y)(y+1)^2.4}{4(x-y)(y+1)^2}}=4. \qquad (2)$$

Từ (1),(2) $\Rightarrow x+\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}\geq 4-1=3\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (x-y)=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}.$

1.6.2 Dạng 2

1.6.2.1 Nội dung phương pháp

Trong khi nhóm các số hạng của biểu thức trong bất đẳng thức cần chứng minh, giống như trong dạng 1, việc nhóm đúng đóng một vai trò quyết định đến thành công trong tìm lời giải một bất đẳng thức.

Việc nhóm này thường dựa vào giả thiết của các thí dụ, và dĩ nhiên tuân thủ theo yêu cầu đề ra trong dạng 1.

1.6.2.2 Một số thí dụ minh hoạ.

<u>Thí dụ 1.40</u> Cho $a\geq 3, ab\geq 6, abc\geq 6$. Chứng minh: $M=a+b+c\geq 6$.

Bài giải

Ta có: $M=\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c\right)+\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}\right)+\dfrac{a}{3}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{6}}\geq 3$, (do $abc\geq 6$) (1)

$\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{3}.\dfrac{b}{2}}\geq 2$. (do $ab\geq 6$) (2)

Theo giả thiết $a\geq 3\ \Rightarrow\ \dfrac{a}{3}\geq 1$. (3)

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $M\geq 3+2+1=6\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong(1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=1\end{cases}.$

<u>Thí dụ 1.41</u> Cho $a,b,c>0$; $\dfrac{b}{2}+c\leq 2$; $\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+c\leq 3$; $c\leq 1$.

Chứng minh: $M=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{11}{6}.$

Bài giải

Ta có: $M = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2c}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có: $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c} \geq \frac{9}{3}=3$, (1)

$\frac{2}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{4}{\frac{b}{2}+c} \geq \frac{4}{2}=2$. (2)

Theo giả thiết: $c \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{c} \geq 1$. (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra: $M \geq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{11}{6} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$.

<u>Thí dụ 1.42</u> Cho $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh:

$$M=\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài giải

Ta có: $M=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)+\left(y^2+1\right)+2}+\frac{1}{\left(y^2+z^2\right)+\left(z^2+1\right)+2}+\frac{1}{\left(z^2+x^2\right)+\left(x^2+1\right)+2}$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì: $x^2+y^2 \geq 2xy$; $y^2+1 \geq 2y$.

$\Rightarrow \left(x^2+y^2\right)+\left(y^2+1\right)+2 \geq 2\left(xy+y+1\right) \Rightarrow \frac{1}{x^2+2y^2+3} \leq \frac{1}{2\left(xy+y+1\right)}$. (1)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Tương tự ta có: $\frac{1}{y^2+2z^2+3} \leq \frac{1}{2\left(yz+z+1\right)}$, (2)

và $\frac{1}{z^2+2x^2+3} \leq \frac{1}{2\left(zx+x+1\right)}$. (3)

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được: $M \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)$ (4)

Theo giả thiết: $xyz=1$, nên: $\frac{1}{yz+z+1}=\frac{xy}{xy^2z+xyz+xy}=\frac{xy}{xy+y+1}$, (5)

và $\frac{1}{zx+x+1}=\frac{y}{xyz+xy+y}=\frac{y}{xy+y+1}$. (6)

Thay (5),(6) vào (4) $\Rightarrow M \le \frac{1}{2}\cdot\frac{xy+y+1}{xy+y+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$.

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI

2.1 BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI (B.C.S).

2.1.1 Định lý.

Cho $2n$ số tuỳ ý: $a_1, a_2, ..., a_n$; $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó ta luôn có:

$$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right). \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$. (Qui ước nếu $b_i = 0, i = \overline{1,n}$, thì $a_i = 0$).

Chứng minh

Đặt $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$; $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$.

- Nếu $A = 0$ hoặc $B = 0 \Rightarrow$ (1) hiển nhiên đúng.
- Xét $A \ne 0$ và $B \ne 0$. Đặt $\alpha_i = \dfrac{a_i}{A}$; $\beta_i = \dfrac{b_i}{B}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

Thế thì $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2 = 1$, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\left|\alpha_i\beta_i\right| \le \dfrac{\alpha_i^2 + \beta_i^2}{2}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

$$\Rightarrow \left|\alpha_1\beta_1\right| + \left|\alpha_2\beta_2\right| + ... + \left|\alpha_n\beta_n\right| \le \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2}{2} + \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_n^2}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|a_1b_1\right| + \left|a_2b_2\right| + ... + \left|a_nb_n\right| \le AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \,.\, \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} \,.$$

$\Rightarrow$ (1) đúng.

Kết hợp hai điều trên $\Rightarrow$ (1) được chứng minh.

2.1.2 Nhận xét.

Cùng với bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Bunhiacopski (B.C.S) cũng là một trong những bất đẳng thức thường xuyên được sử dụng.

Giống như khi dùng bất đẳng thức Côsi, để có thể áp dụng thành công được bất đẳng thức B.C.S là ứng với mỗi bất đẳng thức cần chứng minh phải lựa chọn ra được hai dãy số: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thích hợp (không đòi hỏi điều kiện ≥ 0 như trong bất đẳng thức Côsi). Việc lựa chọn sẽ được minh hoạ cụ thể trong các thí dụ sau:

2.1.3 Một số thí dụ minh hoạ.

<u>Thí dụ 2.1</u> (Đề thi tuyển sinh Đại học, cao đẳng khối B – 2003).

Cho $-2 \leq x \leq 2$. Chứng minh: $-2 \leq x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2}$.

Bài giải

Hiển nhiên ta có: $x + \sqrt{4 - x^2} \geq -2$ (do $x \geq -2$ và $\sqrt{4 - x^2} \geq 0$). (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = -2$.

Xét hai dãy số: x ; $\sqrt{4 - x^2}$ và 1 ; 1.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số trên, ta có:

$$\left[x^2 + \left(4 - x^2\right)\right]\left(1^2 + 1^2\right) \geq \left(x + \sqrt{4 - x^2}\right)^2 \Leftrightarrow 8 \geq \left(x + \sqrt{4 - x^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \sqrt{4 - x^2}\right| \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow x + \sqrt{4 - x^2} \leq 2\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4 - x^2} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Từ (1),(2) $\Rightarrow$ đpcm.

<u>Thí dụ 2.2</u> Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thoả mãn: $xy + yz + zx = 4$.

Chứng minh: $x^4 + y^4 + z^4 \geq \dfrac{16}{3}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số: $x^2; y^2; z^2$ và 1 ; 1 ; 1, ta có:

$$\left(x^4 + y^4 + z^4\right)\left(1^2 + 1^2 + 1^2\right) \geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2. \qquad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2$.

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số: x , y , z và y , z , x.

ta được: $\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(y^2+z^2+x^2\right)\geq\left(xy+yz+zx\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)^2\geq 16$. (2)

Từ (1),(2) suy ra: $x^4+y^4+z^4\geq\frac{16}{3}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=y^2=z^2\\ \frac{x}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{x}\\ xy+yz+zx=4\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=z=\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ x=y=z=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right..$$

<u>Thí dụ 2.3</u> Cho $x,y,z>0$. Chứng minh: $\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\geq 1$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số:

$$\sqrt{\frac{x}{y+2z}},\sqrt{\frac{y}{z+2x}},\sqrt{\frac{z}{x+2y}} \quad \text{và} \quad \sqrt{x(y+2z)},\sqrt{y(z+2x)},\sqrt{z(x+2y)}$$

ta có: $\left(\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\right)\left[x(y+2z)+y(z+2x)+z(x+2y)\right]\geq(x+y+z)^2$

$$\Rightarrow\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}. \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Dễ thấy $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$. (2)

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Từ (1),(2) $\Rightarrow\frac{x}{y+2z}+\frac{y}{z+2x}+\frac{z}{x+2y}\geq 1$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Nhận xét: Bằng cách giải trên ta chứng minh các bất đẳng thức sau:

<u>Thí dụ 2.3.1</u> (Bất đẳng thức Nesbit 3 biến).

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số:

$\sqrt{\frac{a}{b+c}},\sqrt{\frac{b}{c+a}},\sqrt{\frac{c}{a+b}}$ và $\sqrt{a(b+c)},\sqrt{b(c+a)},\sqrt{c(a+b)}$ ta được:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]\geq(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}. \quad (3)$$

Theo (2)$\Rightarrow$(3) $\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

<u>Thí dụ 2.3.2</u> (Bất đẳng thức Nesbit 4 biến).

Cho $a,b,c,d>0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số:

$\sqrt{\frac{a}{b+c}},\sqrt{\frac{b}{c+d}},\sqrt{\frac{c}{d+a}},\sqrt{\frac{d}{a+b}}$ và $\sqrt{a(b+c)},\sqrt{b(c+d)},\sqrt{c(d+a)},\sqrt{d(a+b)}$

ta đi đến: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+ac+bd+cd+ca+da+db}$. (4)

Đẳng thức trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

Ta chứng minh: VP(4) ≥ 2. (5)

Thật vậy (5) $\Leftrightarrow (a+b+c+d)^2\geq 2ab+4ac+2bc+4bd+2cd+2da$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2\geq 2ac+2bc \Leftrightarrow (a-c)^2+(b-d)^2\geq 0. \quad (6)$$

Do (6) đúng nên (5) đúng và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$.

Từ (4),(5) $\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (4),(5) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

Thí dụ 2.3.3 Cho $a,b,c,p,q \geq 0$. Chứng minh:

$$M = \frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qa} + \frac{c}{pa+qb} \geq \frac{3}{p+q}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số:

$$\sqrt{\frac{a}{pb+qc}}, \sqrt{\frac{b}{pc+qa}}, \sqrt{\frac{c}{pa+qb}} \quad \text{và} \quad \sqrt{a(pb+qc)}, \sqrt{b(pc+qa)}, \sqrt{c(pa+qb)}$$

ta được: $M.\left[a(pb+qc)+b(pc+qa)+c(pa+qb)\right] \geq (a+b+c)^2$

$$\Leftrightarrow M.(p+q)(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)^2. \qquad (7)$$

Từ (2),(7) $\Rightarrow M \geq \dfrac{3}{p+q} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Đặc biệt: Nếu $p=q=1$ thì từ thí dụ 2.3.3 ta thu được thí dụ 2.3.1.

Thí dụ 2.4 Cho $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$M = \frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)}.$$

Bài giải

Đặt $a = \dfrac{1}{x}, b = \dfrac{1}{y}, c = \dfrac{1}{z}$.

Theo giả thiết $x,y,z>0$ và $xyz=1$ $\Rightarrow a,b,c>0$ và $abc=1$.

Khi đó: $M = \dfrac{a^3bc}{b+c} + \dfrac{b^3ca}{c+a} + \dfrac{c^3ab}{a+b} = \dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b}$.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}, \frac{b}{\sqrt{c+a}}, \frac{c}{\sqrt{a+b}} \quad \text{và} \quad \sqrt{b+c}, \sqrt{c+a}, \sqrt{a+b} \quad \text{ta có:}$$

$$M.(b+c+c+a+a+b) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow 2M(a+b+c) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow M \geq \frac{a+b+c}{2}. \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ (do $abc = 1$). (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow M \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra

$$\Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy $Min\ M = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

<u>Thí dụ 2.5</u> Cho $x, y, z \in ¡$ thoả mãn: $\begin{cases} x+y+z = a \\ xy+yz+zx = b \end{cases}$. (*)

Chứng minh: $Max\{x,y,z\} - Min\{x,y,z\} \leq \frac{4}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$.

Bài giải

Do vai trò bình đẳng giữa x, y, z nên ta có thể giả sử $x \leq y \leq z$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $z - x \leq \frac{4}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$

$$\Leftrightarrow (z-x)^2 \leq \frac{16}{9}\left[(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\right]$$
$$\Leftrightarrow 9(z-x)^2 \leq 16\left(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx\right)$$
$$\Leftrightarrow 9(z-x)^2 \leq 8\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right] \Leftrightarrow (z-x)^2 \leq 8\left[(x-y)^2 + (y-z)^2\right]. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số: $x-y, y-z$ và 1 , 1 ta có:

$$\left[(x-y)^2 + (y-z)^2\right]\left(1^2+1^2\right) \geq \left[(x-y).1 + (y-z).1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow (z-x)^2 \leq 2\left[(x-y)^2 + (y-z)^2\right]. \quad (2)$$

Từ (1),(2) $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra và thoả mãn (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = y-z \\ (x-y)^2 + (y-z)^2 = 0 \\ (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \dfrac{a}{3} \\ b = \dfrac{a^2}{3} \end{cases}.$$

Thí dụ 2.6 Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}<\frac{3}{16}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số: $\sqrt{a};\sqrt{2b};\sqrt{3c}$ và $\frac{1}{\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{b}};\frac{1}{\sqrt{c}}$

ta có: $(a+2b+3c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2.$ (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a=\sqrt{2}b=\sqrt{3}c$.

Theo giả thiết: $ab+bc+ca=abc \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow \frac{1}{a+2b+3c}\leq\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}.$ (3)

Tương tự, ta có: $\frac{1}{b+2c+3a}\leq\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2},$ (4)

$$\frac{1}{c+2a+3b}\leq\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}. \quad (5)$$

Đẳng thức xảy ra trong (4),(5) tương ứng là: $b=\sqrt{2}c=\sqrt{3}a$ và $c=\sqrt{2}a=\sqrt{3}b$.

Cộng từng vế của (3),(4),(5) ta được:

$$\frac{1}{a+2b+3c}+\frac{1}{b+2c+3a}+\frac{1}{c+2a+3b}<\frac{3}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}<\frac{3}{17}<\frac{3}{16} \Rightarrow \text{đpcm.} \quad (6)$$

Nhận xét: • Do đẳng thức không đồng thời xảy ra trong (3),(4),(5) nên trong (6) đẳng thức không thể xảy ra.

Thật vậy, để đẳng thức trong (3),(4),(5) xảy ra đồng thời

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2}b=\sqrt{3}c \\ b=\sqrt{2}c=\sqrt{3}a \\ c=\sqrt{2}a=\sqrt{3}b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$. Mâu thuẫn với giả thiết $a,b,c>0$.

- Qua lời giải trên, ta thu được bất đẳng thức "tốt hơn" bất đẳng thức ban đầu.
- Xem lời giải khác trong thí dụ 1.5 Chương 1.

Thí dụ 2.7 (Bất đẳng thức Svacxơ).

Cho a_1, a_2, a_3 ; b_1, b_2, b_3 trong đó $b_1, b_2, b_3 > 0$.

Chứng minh: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số: $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \frac{a_3}{\sqrt{b_3}}$ và $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \sqrt{b_3}$

ta có: $\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3}\right)(b_1 + b_2 + b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)^2$.

Do $b_1 + b_2 + b_3 > 0$, nên: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Nhận xét: • Như vậy, bất đẳng thức Svacxơ là trường hợp riêng của bất đẳng thức Bunhiacópski.

• Lấy $b_i = a_i c_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ ta có:

Cho a_1, a_2, a_3 ; c_1, c_2, c_3 trong đó $a_i c_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$

thì: $\frac{a_1^2}{a_1 c_1} + \frac{a_2^2}{a_2 c_2} + \frac{a_3^2}{a_3 c_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3}$.

• Với cách chứng minh trên, áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy:

$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$ và $\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n}$

ta chứng minh được dạng tổng quát của bất đẳng thức Svacsơ:

Cho hai dãy số: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ với $b_i > 0$, $(i = \overline{1, n})$

ta có: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

<u>Thí dụ 2.8</u> Cho $x, y, z > 0; a, b, c > 0$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. (*)

Chứng minh: $H=\frac{1}{ax+by+cz}+\frac{1}{bx+cy+az}+\frac{1}{cx+ay+bz}\le\frac{1}{a+b+c}$.

Bài giải

Đặt $M=a+b+c>0$. Áp dụng bất đẳng thức Svacxơ ta có:

$$\frac{a^2}{ax}+\frac{b^2}{by}+\frac{c^2}{cz}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}\Rightarrow\frac{1}{ax+by+cz}\le\frac{1}{M^2}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right). \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{ax}=\frac{b}{by}=\frac{c}{cz}\\(*)\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Tương tự, ta có : $$\frac{1}{bx+cy+az}\le\frac{1}{M^2}\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{y}+\frac{a}{z}\right), \quad (2)$$

$$\frac{1}{cx+ay+bz}\le\frac{1}{M^2}\left(\frac{c}{x}+\frac{a}{y}+\frac{b}{z}\right). \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được:

$$H\le\frac{1}{M^2}\left[a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+c\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]=\frac{a+b+c}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{a+b+c}.$$

(do (*) và $M=a+b+c$) $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=3$.

<u>Thí dụ 2.9</u> Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh:

$$M=\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\ge\frac{3}{2}.$$

Bài giải

Có: $M=\frac{a^2}{ab+2ac+3ad}+\frac{b^2}{bc+2bd+3ba}+\frac{c^2}{cd+2ca+3cb}+\frac{d^2}{da+2db+3dc}$

Áp dụng bất đẳng thức Svacxơ ta có: $M\ge\frac{(a+b+c+d)^2}{4(ab+bc+cd+da+ac+bd)}$. (1)

Dễ thấy: $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+cd+da+ac+bd)$

và $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{2}{3}(ab+bc+cd+da+ac+bd)$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^2 \geq \frac{8}{3}(ab+bc+cd+da+ac+bd). \qquad (2)$$

Từ (1),(2) $\Rightarrow M \geq \frac{2}{3} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$.

<u>Thí dụ 2.10</u> Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ và $a = x_1+x_2+\ldots+x_n$. Chứng minh:

$$M = \left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2 \geq n\left(\frac{n}{a}+\frac{a}{n}\right)^2.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số:

$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n \text{ số } 1}$ và $x_1+\frac{1}{x_1}, x_2+\frac{1}{x_2}, \ldots, x_n+\frac{1}{x_n}$ ta có:

$$n\left[\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2+\ldots+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)^2\right] \geq \left(x_1+x_2+\ldots+x_n+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow n.M \geq \left(a+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)^2. \qquad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow x_1+\frac{1}{x_1} = x_2+\frac{1}{x_2} = \ldots = x_n+\frac{1}{x_n}$.

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, thì: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n} = \frac{n^2}{a}$. (2)

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$.

Từ (1),(2) suy ra: $n.M \geq \left(a+\frac{n^2}{a}\right)^2 \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{n}\left(a+\frac{n^2}{a}\right)^2 = n\left(\frac{a}{n}+\frac{n}{a}\right)^2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}.$$

Nhận xét: • Trong chương 1 ta đã chứng minh bất đẳng thức (2) theo bất đẳng thức Côsi và thấy rõ được tầm quan trọng của bất đẳng thức này.

• Ta cũng có thể chứng minh (2) bằng bất đẳng thức B.C.S như sau:

Do $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, nên áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số:

$\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, ..., \sqrt{x_n}$ và $\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}}$ ta có :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$. Vậy (2) được chứng minh.

<u>Thí dụ 2.11</u> Cho $a, b, c > 0$ và $a\sin x + b\cos y = c$.

Chứng minh: $\frac{\cos^2 x}{a} + \frac{\sin^2 y}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3}$. (1)

Bài giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 x}{a} + \frac{1 - \cos^2 y}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{c^2}{a^3 + b^3} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} \geq \frac{c^2}{a^3 + b^3}$. (2)

Theo bất đẳng thức B.C.S với hai dãy số: $\frac{\sin x}{\sqrt{a}}; \frac{\cos y}{\sqrt{b}}$ và $a\sqrt{a}; b\sqrt{b}$

ta có: $\left(\frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b}\right)(a^3 + b^3) \geq (a\sin x + b\cos y)^2 = c^2$

$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} + \frac{\cos^2 y}{b} \geq \frac{c^2}{a^3 + b^3} \Rightarrow (2) \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{a^2} = \frac{\cos y}{b^2} \\ a\sin x + b\cos y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{a^2 c}{a^3 + b^3} \\ \cos y = \frac{b^2 c}{a^3 + b^3} \end{cases}$.

<u>Thí dụ 2.12</u> Cho n là số nguyên dương. Chứng minh:

$$\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} + ... + \sqrt{C_n^n} \leq \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S với hai dãy số: $\sqrt{C_n^1}, \sqrt{C_n^2}, ..., \sqrt{C_n^n}$ và $\underbrace{1,1,...,1}_{n \text{ số } 1}$.

Ta có: $\left(\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+...+\sqrt{C_n^n}\right)^2 \le n.\left(C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\right)$. (1)

Theo nhị thức Newtơn: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, với $a=b=1$, ta có:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n - 1.$$

Vậy từ (1) suy ra: $\sqrt{C_n^1}+\sqrt{C_n^2}+...+\sqrt{C_n^n} \le \sqrt{n\left(2^n-1\right)}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow C_n^1 = C_n^2 = ... = C_n^n \Leftrightarrow n=1$.

Thí dụ 2.13 Chứng minh rằng, trong mọi tam giác ta luôn có:

$$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C} \le \sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S cho hai dãy số: $\sqrt{\sin A};\sqrt{\sin B}$ và 1 ; 1

ta có: $\left(\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}\right)^2 \le 2(\sin A+\sin B) = 4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B} \le 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}. \quad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \sin B \\ \cos\frac{A-B}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B$.

Tương tự ta có: $\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C} \le 2\sqrt{\cos\frac{A}{2}}$, (2)

$$\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin A} \le 2\sqrt{\cos\frac{B}{2}}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1),(2),(3) ta được:

$$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C} \le \sqrt{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt{\cos\frac{C}{2}} \quad \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra

$$\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Thí dụ 2.14 Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta có:

$$l_a + l_b + l_c \le \frac{3}{2}\sqrt{ab + bc + ca}\,.$$

(với l_a, l_b, l_c là độ dài ba đường phân giác trong xuất phát từ ba đỉnh A, B, C).

Bài giải

Ta có: $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$. Theo bất đẳng thức Côsi thì:

$$b + c \ge 2\sqrt{bc} \Rightarrow l_a \le \sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2}.$$

Tương tự : $l_b \le \sqrt{ca}.\cos\dfrac{B}{2}$; $l_c \le \sqrt{ab}.\cos\dfrac{C}{2}$.

$$\Rightarrow l_a + l_b + l_c \le \sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2} + \sqrt{ca}.\cos\frac{B}{2} + \sqrt{ab}.\cos\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\left(\sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2} + \sqrt{ca}.\cos\frac{B}{2} + \sqrt{ab}.\cos\frac{C}{2}\right)^2 \le (bc + ca + ab)\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right). \quad (2)$$

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sqrt{bc}} = \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sqrt{ca}} = \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sqrt{ab}}$.

(Chú ý rằng nếu ΔABC đều thì điều kiện trên thoả mãn)

Ta lại có: $\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{2} \le \dfrac{3 + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{9}{4}$. (3)

Đẳng thức trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow l_a + l_b + l_c \le \dfrac{3}{2}\sqrt{ab + bc + ca}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2),(3) xảy ra

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

2.2 BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPSKI MỞ RỘNG .

2.2.1 Định lý

Cho m dãy số không âm: $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$; $a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}$;...; $a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}$.

Ta có: $\left(a_{11}^m + a_{12}^m + ... + a_{1n}^m\right)\left(a_{21}^m + a_{22}^m + ... + a_{2n}^m\right)...\left(a_{m1}^m + a_{m2}^m + ... + a_{mn}^m\right)$

$$\geq \left(a_{11}a_{21}...a_{m1} + a_{12}a_{22}...a_{m2} + ... + a_{1n}a_{2n}...a_{mn}\right)^m .$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_{11} : a_{21} : ... : a_{m1} = a_{12} : a_{22} : ... : a_{m2} = ... = a_{1n} : a_{2n} : ... : a_{mn}$.

Chứng minh

Đặt $A_1 = \left(a_{11}^m + a_{12}^m + ... + a_{1n}^m\right)^{\frac{1}{m}}$; $A_2 = \left(a_{21}^m + a_{22}^m + ... + a_{2n}^m\right)^{\frac{1}{m}}$;

$$;...; A_m = \left(a_{m1}^m + a_{m2}^m + ... + a_{mn}^m\right)^{\frac{1}{m}} .$$

- Nếu $A_i = 0$, $(i = \overline{1,m})$ thì bất đẳng thức luôn đúng, do 2 vế đều bằng 0.
- xét $A_i \neq 0$, $(i = \overline{1,m})$.

Đặt $x_{11} = \dfrac{a_{11}}{A_1}; x_{12} = \dfrac{a_{12}}{A_1}; ...; x_{1n} = \dfrac{a_{1n}}{A_1}; x_{21} = \dfrac{a_{21}}{A_2}; x_{22} = \dfrac{a_{22}}{A_2}; ...; x_{2n} = \dfrac{a_{2n}}{A_2};$

$$...; x_{m1} = \frac{a_{m1}}{A_m}; x_{m2} = \frac{a_{m2}}{A_m}; ...; x_{mn} = \frac{a_{mn}}{A_m}.$$

Khi đó: $\sum_{k=1}^{n} x_{1k}^m = \sum_{k=1}^{n} x_{2k}^m = ... = \sum_{k=1}^{n} x_{mk}^m = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho m số: $x_{11}^m, x_{21}^m, ..., x_{m1}^m$

ta có: $x_{11}.x_{21}...x_{m1} \leq \dfrac{x_{11}^m + x_{21}^m + ... + x_{m1}^m}{m}$.

Tương tự: $x_{12}.x_{22}...x_{m2} \leq \dfrac{x_{12}^m + x_{22}^m + ... + x_{m2}^m}{m}$

....

$$x_{1n}.x_{2n}...x_{mn} \leq \frac{x_{1n}^m + x_{2n}^m + ... + x_{mn}^m}{m}.$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức trên ta được :

$$\sum_{k=1}^{n} x_{1k}.x_{2k}...x_{mk} \le \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{1k}^m + \sum_{k=1}^{n} x_{1k}^m + ... + \sum_{k=1}^{n} x_{mk}^m\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_{11}.a_{21}...a_{m1}}{A_1.A_2...A_m} + \frac{a_{12}.a_{22}...a_{m2}}{A_1.A_2...A_m} + ... + \frac{a_{1n}.a_{2n}...a_{mn}}{A_1.A_2...A_m} \le 1 \ .$$

$$\Leftrightarrow a_{11}.a_{21}...a_{m1} + a_{12}.a_{22}...a_{m2} + ... + a_{1n}.a_{2n}...a_{mn} \le A_1.A_2...A_m \, .$$

Kết hợp hai điều trên $\Rightarrow$ định lý được chứng minh.

Nhận xét: • Trong chứng minh trên ta sử dụng bất đẳng thức Côsi cho m số: x_{ij}^m $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ nên cần điều kiện $x_{\text{ij}} \ge 0$. Do đó khi m chẵn thì định lý trên không cần giả thiết $x_{\text{ij}} \ge 0$.

• Khi $m = 2$, ta thu được bất đẳng thức Bunhiacopski thông thường.

2.2.2 Một số thí dụ minh hoạ.

<u>Thí dụ 2.15</u> (Bất đẳng thức Minkowski).

Cho $a_i, b_i \ge 0, (i = \overline{1,n})$. Chứng minh:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \, .$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S mở rộng, ta có:

$$\left(\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a_1}.\sqrt[n]{a_2}...\sqrt[n]{a_n} + \sqrt[n]{b_1}.\sqrt[n]{b_2}...\sqrt[n]{b_n}\right)^n$$

$$\le \left[\left(\sqrt[n]{a_1}\right)^n + \left(\sqrt[n]{b_1}\right)^n\right].\left[\left(\sqrt[n]{a_2}\right)^n + \left(\sqrt[n]{b_2}\right)^n\right]...\left[\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n + \left(\sqrt[n]{b_n}\right)^n\right]$$

$$= (a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n).$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Nhận xét: Từ thí dụ trên thu được các kết luận sau:

- $\left(1 + \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\right)^n \le (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)$, với $a_i > 0\,(i = \overline{1,n})$. (1)
- $1 + \sqrt[n]{n!} \le \sqrt[n]{(n+1)!}$. (2)

Thật vậy, theo thí dụ 2.15 thay $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$, ta được:

$$\left(1+\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\right)^n \le (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \Rightarrow \text{(1) đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Tương tự, trong (1) thay: $a_1 = 1, a_2 = 2, ..., a_n = n$ ta thu được: $1+\sqrt[n]{n!} \le \sqrt[n]{(n+1)!}$.

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow n = 1$.

Thí dụ 2.16 Cho $a,b,c > 0$; m,n là các số nguyên dương. Chứng minh:

$$a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n \le a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n}.$$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S mở rộng cho ($m+n$) bộ ba số: Gồm m bộ (a,b,c) và n bộ (b,c,a) ta được:

$$\left(a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n\right)^{m+n} \le$$

$$\le \left(a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n}\right)^m \left(b^{m+n} + c^{m+n} + a^{m+n}\right)^n = \left(a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n}\right)^{m+n}$$

$\Rightarrow a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n \le a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Thí dụ 2.17 Cho $a,b,c > 0$ và n là số nguyên dương. Chứng minh:

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}. \qquad (1)$$

Bài giải

• Với $n = 1 \Rightarrow$ (1) trở thành: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$. Theo thí dụ 2.3.1 $\Rightarrow$ (1) đúng.

• Với $n \ge 2$. Áp dụng bất đẳng thức B.C.S mở rộng, ta có:

$$(a+b+c)^n = \left(\frac{a}{\sqrt[n]{b+c}}.\sqrt[n]{b+c}.\underbrace{1.1...1}_{\text{n-2 thừa số 1}} + \frac{b}{\sqrt[n]{c+a}}.\sqrt[n]{c+a}.\underbrace{1.1...1}_{\text{n-2 thừa số 1}} + \frac{c}{\sqrt[n]{a+b}}.\sqrt[n]{a+b}.\underbrace{1.1...1}_{\text{n-2 thừa số 1}}\right)^n$$

$$\le \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b}\right)\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\underbrace{(1+1+1)(1+1+1)...(1+1+1)}_{n-2 \text{ thừa số}}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^n \le \left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right).2(a+b+c).3^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \text{(1) đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét: Thí dụ 2.17 là thí dụ mở rộng của hai thí dụ 2.3.1 (khi $n=1$) và ý (1) của thí dụ 2.4 (khi $n=2$). Tuy nhiên, bằng lược đồ giải trên không thể áp dụng để chứng minh khi $n=1$, tức là từ cách chứng minh bất đẳng thức trên không thể suy ra chứng minh bất đẳng thức Nesbit ba biến (khi $n=1$ ta phải chứng minh độc lập với phương pháp giải trên). Đây cũng là cái hay của bất đẳng thức tổng quát này.

<u>Thí dụ 2.18</u> Cho $x,y,z,p,q>0$ và n là số nguyên dương.

Chứng minh: $$M=\frac{x^n}{py+qz}+\frac{y^n}{pz+qx}+\frac{z^n}{px+qy} \ge \frac{x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}}{p+q}. \quad (1)$$

Bài giải

• Với $n=1$, ta được: $\dfrac{x}{py+qz}+\dfrac{y}{pz+qx}+\dfrac{z}{px+qy} \ge \dfrac{3}{p+q}$.

Theo thí dụ 2.3.3 $\Rightarrow$ (1) đúng.

• Với $n \ge 2$, theo bất đẳng thức B.C.S ta có: $\left(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}\right)^2=$

$$=\left[\sqrt{x^{n-2}(py+qz)}.\sqrt{\frac{x^n}{py+qz}}+\sqrt{y^{n-2}(pz+qx)}.\sqrt{\frac{y^n}{pz+qx}}+\sqrt{z^{n-2}(px+qy)}.\sqrt{\frac{z^n}{px+qy}}\right]^2$$

$$\le M.\left[p\left(x^{n-2}y+y^{n-2}z+z^{n-2}x\right)+q\left(x^{n-2}z+y^{n-2}x+z^{n-2}y\right)\right]. \quad (2)$$

Theo thí dụ 2.16, ta có: $x^{n-2}y+y^{n-2}z+z^{n-2}x \le x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}$, (3)

$$x^{n-2}z+y^{n-2}x+z^{n-2}y \le x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}. \quad (4)$$

Thay (3),(4) vào (2) ta được: $\left(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}\right)^2 \le M.(p+q).\left(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}\right)$.

Do $x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}>0$, nên: $M \ge \dfrac{x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}}{p+q} \Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC VỚI CÁC DÃY ĐƠN ĐIỆU

3.1 BẤT ĐẲNG THỨC VỚI CÁC DÃY ĐƠN ĐIỆU.

3.1.1 Định lý.

Cho hai dãy đơn điệu cùng tăng: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$;

hoặc cùng giảm: $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$.

Nếu $i_1, i_2, ..., i_n$ là một hoán vị tuỳ ý của $1, 2, ..., n$ thì ta có:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_nb_{i_n}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$.

Chứng minh

- Rõ ràng bất đẳng thức đúng khi $n = 1$.
- Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k - 1$.
- Xét khi $n = k$. Gọi $i_1, i_2, ..., i_k$ là một hoán vị bất kỳ của $1, 2, ..., k$ và giả sử $i_j = 1$.

Ta có: $a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_jb_{i_j} + ... + a_nb_{i_k} = \left(a_1b_{i_1} + a_jb_1\right) + \left(a_2b_{i_2} + ... + a_kb_{i_k}\right)$.

Do $a_1 \le a_j; b_1 \le b_{i_1} \Rightarrow a_1b_{i_1} + a_jb_i \le a_jb_{i_1} + a_1b_1$.

Lại có: $a_2 \le a_3 \le ... \le a_k$; $b_2 \le b_3 \le ... \le b_k$, nên theo giả thiết quy nạp ta có:

$a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_kb_k \ge a_2b_{i_2} + ... + a_kb_{i_k} \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k \ge a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_kb_{i_k}$.

Vậy bất đẳng thức đúng đến $n = k$. Theo nguyên lý quy nạp $\Rightarrow$ đpcm.

3.1.2 Hệ quả.

Từ định lý trên ta suy ra trực tiếp được hai hệ quả sau:

3.1.2.1 Hệ quả 1. Nếu hai dãy: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ có tính chất $a_i > a_j \Leftrightarrow b_i > b_j$ và ngược lại $\forall i, j$ (hai dãy đó gọi là cùng một thứ tự).

Khi đó ta có: $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_nb_{i_n}$,

trong đó $i_1, i_2, ..., i_n$ là một hoán vị bất kỳ của $1, 2, ..., n$.

3.1.2.2 Hệ quả 2. Nếu hai dãy: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ có tính chất: $a_i > a_j \Leftrightarrow b_i < b_j$ và ngược lại $\forall i, j$ (hai dãy đó gọi là ngược thứ tự).

Khi đó ta có: $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_nb_{i_n}$,

trong đó $i_1, i_2, ..., i_n$ là một hoán vị bất kỳ của $1, 2, ..., n$.

3.2 MỘT SỐ THÍ DỤ MINH HOẠ.

<u>Thí dụ 3.1</u> Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\dfrac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. (1)

Bài giải

Có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a^5}{b^3c^3} + \dfrac{b^5}{c^3a^3} + \dfrac{c^5}{a^3b^3} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. (2)

Xét hai dãy sau: $\left(a^5, b^5, c^5\right)$ và $\left(\dfrac{1}{b^3c^3}, \dfrac{1}{c^3a^3}, \dfrac{1}{a^3b^3}\right)$, rõ ràng đây là hai dãy cùng thứ tự.

Theo hệ quả 1 ta có:

$$\frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{c^3a^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq a^5.\frac{1}{c^3a^3} + b^5.\frac{1}{a^3b^3} + c^5.\frac{1}{b^3c^3} = \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}. \quad (3)$$

Tương tự, áp dụng hệ quả 2 cho hai dãy ngược thứ tự: $\left(a^2, b^2.c^2\right)$ và $\left(\dfrac{1}{a^3}, \dfrac{1}{b^3}, \dfrac{1}{c^3}\right)$,

ta được: $\dfrac{a^2}{a^3} + \dfrac{b^2}{b^3} + \dfrac{c^2}{c^3} \leq a^2.\dfrac{1}{c^3} + b^2.\dfrac{1}{a^3} + c^2\dfrac{1}{b^3} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{c^3} + \dfrac{b^2}{a^3} + \dfrac{c^2}{b^3} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. (4)

Từ (3),(4) suy ra: $\dfrac{a^5}{b^3c^3} + \dfrac{b^5}{c^3a^3} + \dfrac{c^5}{a^3b^3} \geq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (3),(4) $\Leftrightarrow a = b = c$.

<u>Thí dụ 3.2</u> Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác. Chứng minh:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}.$$

Bài giải

Do vai trò bình đẳng giữa các biến a,b,c nên có thể giả sử: $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó hai dãy sau cùng thứ tự: (a,b,c) và $\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right)$ ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}. \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Vì a,b,c là ba cạnh của tam giác nên: $0<\frac{a}{b+c}<1; 0<\frac{b}{c+a}<1; 0<\frac{c}{a+b}<1$.

Do đó: $$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}. \qquad (2)$$

Từ (1),(2) $\Rightarrow \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 3.3 Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác, p là nửa chu vi.

Chứng minh: $$\frac{ab}{p-c}+\frac{bc}{p-a}+\frac{ca}{p-b} \geq 4p. \qquad (1)$$

Bài giải

Đặt $x=a+b-c$; $y=b+c-a$; $z=c+a-b$.

Do a,b,c là ba cạnh của tam giác nên $x,y,z>0$. Ta có $x+y+z=a+b+c=2p$.

Lại có: $(x+y)(y+z)=4bc$; $(y+z)(z+x)=4ac$; $(z+x)(x+y)=2ab$,

và $p-c=\frac{a+b-c}{2}=\frac{x}{2}$; $p-a=\frac{b+c-a}{2}=\frac{y}{2}$; $p-b=\frac{a+c-b}{2}=\frac{z}{2}$.

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{(x+z)(x+y)}{2x}+\frac{(x+y)(y+z)}{2y}+\frac{(y+z)(z+x)}{2z} \geq 2(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+\frac{yz}{x}+x+y+z+\frac{zx}{y}+x+y+z+\frac{xy}{z} \geq 4(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z} \geq x+y+z. \qquad (2)$$

Do vai trò bình đẳng giữa x,y,z nên có thể giả sử $x \geq y \geq z > 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{z} \Rightarrow yz \le zx \le xy.$$

Áp dụng bất đẳng thức với hai dãy cùng thứ tự: (yz, zx, xy) và $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ ta có:

$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \ge yz.\frac{1}{y} + zx.\frac{1}{z} + xy.\frac{1}{x} = x + y + z \Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Thí dụ 3.4 Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc. \quad (1)$$

Bài giải

Có (1) $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$

$$\Leftrightarrow a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab) \ge a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc) + c(ac + bc). \quad (2)$$

Do vai trò bình đẳng giữa a, b, c nên giả sử $a \ge b \ge c > 0 \Rightarrow a^2 + bc \ge b^2 + ca$.

Áp dụng với hai dãy cùng thứ tự: (a, b) và $(a^2 + bc, b^2 + ca)$ ta có:

$$a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) \ge a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc), \quad (3)$$

tiếp tục áp dụng với hai dãy cùng thứ tự: (b, c) và (a, c) ta có:

$$ab + c^2 \ge bc + ba \Rightarrow c(c^2 + ab) \ge c(bc + ab). \quad (4)$$

Cộng từng vế của (3),(4) $\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (3),(4) xảy ra

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Nhận xét: • Có cách giải khác cho thí dụ trên:

Ta có (1) $\Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) \le 3abc$. (5)

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác thì:

(5) $\Leftrightarrow 2abc.\cos A + 2abc.\cos B + 2abc.\cos C \le 3abc \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$. (6)

Dễ thấy (6) đúng (đây là bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác) $\Rightarrow$ đpcm.

• Cách giải trên vẫn đúng khi $a,b,c>0$. Chú ý rằng khi $a,b,c>0$ thì không thể dùng cách giải ngắn gọn nhờ hệ thức lượng giác trong tam giác được. Lúc này phương pháp sử dụng bất đẳng thức với các dãy đơn điệu tỏ rõ hiệu quả của nó.

Thí dụ 3.5 (Bất đẳng thức Nesbit ba biến).

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Bài giải

Không mất tính tổng quát, giả sử: $a\geq b\geq c>0\Rightarrow\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$.

Áp dụng cho hai dãy cùng thứ tự: (a,b,c) và $\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right)$ ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b} \quad (1)$$

và $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}. \quad (2)$$

Cộng từng vế của (1),(2) ta được:

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Thí dụ 3.6 (Bất đẳng thức Côsi)

Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh: $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$.

Bài giải

- Nếu $a=0\vee b=0\vee c=0$ thì $VP=0$, $VT\geq 0$ $\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng.
- Xét khi $a,b,c>0$. Đặt $B=\sqrt[3]{abc}$, khi đó ta có hai dãy sau là ngược thứ tự:

$\left(\frac{a}{B},\frac{ab}{B^2},\frac{abc}{B^3}\right)$ và $\left(\frac{B}{a},\frac{B^2}{ab},\frac{B^3}{abc}\right)$ theo hệ quả 2 ta có:

$$\frac{a}{B}.\frac{B}{a}+\frac{ab}{B^2}\frac{B^2}{ab}+\frac{abc}{B^3}\frac{B^3}{abc}\leq\frac{a}{B}\frac{B^3}{abc}+\frac{ab}{B^2}\frac{B}{a}+\frac{abc}{B^3}\frac{B^2}{ab}$$

$$\Leftrightarrow 3\leq\frac{a+b+c}{B}\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự như chứng minh trên cũng dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức Côsi dạng tổng quát:

Cho $a_1,a_2,...,a_n\geq 0$. Chứng minh: $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$.

Thí dụ 3.7 (Bất đẳng thức Trêbưsép).

Cho hai dãy đơn điệu cùng chiều: $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$.ta có:

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(b_1+b_2+...+b_n\right)\leq n\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right).$$

Bài giải

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức về các dãy đơn điệu cùng chiều, ta có:

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\geq a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\geq a_1b_2+a_2b_3+...+a_nb_1$$

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\geq a_1b_3+a_2b_4+...+a_nb_2$$

....

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\geq a_1b_n+a_2b_1+...+a_nb_{n-1}.$$

Cộng từng vế n bất đẳng thức trên ta có:

$$n\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)$$
$$\geq a_1\left(b_1+b_2+...+b_n\right)+a_2\left(b_1+b_2+....+b_n\right)+...+a_n\left(b_1+b_2+...+b_n\right).$$

$$\Rightarrow\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(b_1+b_2+...+b_n\right)\leq n\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a_1=a_2=...=a_n\\ b_1=b_2=...=b_n\end{array}\right.$.

Nhận xét: • Với hai dãy ngược chiều, ta có bất đẳng thức theo chiều ngược lại:

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(b_1+b_2+...+b_n\right)\geq n\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right).$$

• Bất đẳng thức Trêbưsép là một trong các bất đẳng thức thông dụng, thường dùng (và rất hiệu quả) làm bất đẳng thức trung gian để chứng minh bất đẳng thức khác (xem ứng dụng của bất đẳng thức Trêbưsép Chương 4).

Thí dụ 3.8 Cho n số nguyên dương phân biệt: $a_1, a_2, ..., a_n$.

Chứng minh: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Bài giải

Xếp lại n số đã cho theo thứ tự tăng dần: $a_{i_1} < a_{i_2} < ... < a_{i_n}$, trong đó $i_1, i_2, ..., i_n$ là một hoán vị của $1, 2, ..., n$.

Áp dụng cho hai dãy ngược thứ tự: $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}$ và $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{n^2}$,

ta có: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{i_k}}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$. (1)

Đẳng thức trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow a_{i_k} = a_k, \ \forall k = \overline{1, n}$.

Vì $a_{i_1} < a_{i_2} < ... < a_{i_n}$ là n số nguyên dương phân biệt, nên hiển nhiên ta có:

$a_{i_k} \geq k, \forall k = \overline{1, n}$. Do vậy: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{i_k}}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. (2)

Đẳng thức trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a_k = k, \ \forall k = \overline{1, n}$.

Từ (1),(2) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (1),(2) xảy ra $\Leftrightarrow a_k = k, \forall k = \overline{1, n}$.

Thí dụ 3.9 Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh: $a_1^{a_1}.a_2^{a_2}...a_n^{a_n} \geq a_1^{a_2}.a_2^{a_3}...a_n^{a_1}$.

Bài giải

Do vai trò bình đẳng giữa các $a_i, \forall i = \overline{1, n}$, nên giả sử: $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.

$\Rightarrow \ln a_1 \leq \ln a_2 \leq ... \leq \ln a_n$.

Áp dụng với hai dãy cùng thứ tự: $(a_1, a_2, ..., a_n.)$ và $(\ln a_1, \ln a_2, ..., \ln a_n)$ ta có:

$$a_1.\ln a_1 + a_2.\ln a_2 + ... + a_n.\ln a_n \geq a_1.\ln a_n + a_2.\ln a_1 + ... + a_n.\ln a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(a_1^{a_1}.a_2^{a_2}...a_n^{a_n}\right) \geq \ln\left(a_1^{a_2}.a_2^{a_3}...a_n^{a_1}\right) \Leftrightarrow a_1^{a_1}.a_2^{a_2}...a_n^{a_n} \geq a_1^{a_2}.a_2^{a_3}...a_n^{a_1} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n > 0$.

<u>Thí dụ 3.10</u> Cho $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n$. Giả sử $z_1, z_2, ..., z_n$ là một hoán vị bất kỳ của $y_1, y_2, ..., y_n$.

Chứng minh: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$.

Bài giải

Do $z_1, z_2, ..., z_n$ là một hoán vị bất kỳ của $y_1, y_2, ..., y_n$, nên theo bất đẳng thức với hai dãy đơn điệu cùng chiều ta có: $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{n} x_i z_i$. (1)

Theo giả thiết, hiển nhiên ta có: $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$. (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_i = y_i = z_i$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Chương 4

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TRÊBƯSÉP

4.1 BẤT ĐẲNG THỨC TRÊBƯSÉP**(T.B.S).**

4.1.1 Định lý.

Cho hai dãy đơn điệu cùng chiều: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$

(hoặc: $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$) .

Khi đó ta có: $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \le n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$.

Chứng minh

Đặt $a = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, do: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$, nên tồn tại chỉ số i sao cho:

$a_1 \le a_2 \le ... \le a_i \le a \le a_{i+1} \le ... \le a_n$. Lấy số b tuỳ ý sao cho:

$b_1 \le b_2 \le ... \le b_i \le b \le b_{i+1} \le ... \le b_n$.

Ta có: $(a_k - a)(b_k - b) \ge 0$,$(\forall k = \overline{1,n})$ $\Rightarrow a_kb_k - ba_k - ab_k + ab \ge 0, (\forall k = \overline{1,n})$. (1)

Cộng từng vế n bất đẳng thức dạng (1), ta được:

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k - b\sum_{k=1}^{n} a_k - a\sum_{k=1}^{n} b_k + nab \ge 0. \quad (2)$$

Ta có: $nab - b\sum_{k=1}^{n} a_k = b\left[(a_1 + a_2 + ... + a_n) - \sum_{k=1}^{n} a_k\right] = 0$.

Từ (2) suy ra: $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k - a\sum_{k=1}^{n} b_k \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_kb_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.\sum_{k=1}^{n} b_k \ge 0$.

$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \le n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \Rightarrow$ đpcm.

4.1.2 **Nhận xét.**

- Bất đẳng thức Trêbưsép (T.B.S) được phát biểu dưới dạng tương đương sau:

Cho hai dãy đơn điệu ngược chiều: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$

(hoặc: $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$).

Khi đó ta có: $(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n) \ge n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$.

Thật vậy, đặt $b_k^{'} = -b_k, \left(\forall k = \overline{1,n}\right)$ thì ta có: $b_1^{'} \le b_2^{'} \le ... \le b_n^{'}$.

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều $\{a_k\};\{b_k^{'}\}$,$\left(\forall k = \overline{1,n}\right)$

ta có: $\sum_{k=1}^{n} a_k . \sum_{k=1}^{n} b_k^{'} \le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k^{'} \Leftrightarrow -\sum_{k=1}^{n} a_k . \sum_{k=1}^{n} b_k \le -n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k . \sum_{k=1}^{n} b_k \ge n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \Rightarrow$ đpcm.

- Bất đẳng thức Trêbưsép là hệ quả của bất đẳng thức với các dãy đơn điệu (xem thí dụ 3.7).

- Sử dụng bất đẳng thức Trêbưsép để chứng minh bất đẳng thức là một trong những phương pháp hiệu quả thường được sử dụng. Nó có nhiều ứng dụng hay và làm cho bài toán được giải quyết đơn giản hơn trong khá nhiều trường hợp. Điểm đặc biệt của bất đẳng thức Trêbưsép (cũng như bất đẳng thức với các dãy đơn điệu) là bất đẳng thức dùng cho hai dãy số sắp thứ tự (hai dãy đơn điệu cùng chiều hoặc ngược chiều) và số hạng của các dãy không cần phải dương. Tuy nhiên bất đẳng thức Trêbưsép ít được dùng đại trà trong nhà trường phổ thông.

4.2 MỘT SỐ THÍ DỤ MINH HOẠ**.**

Thí dụ 4.1 (Bất đẳng thức Côsi cơ bản).

Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh: $(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$.

Bài giải

Do vai trò bình đẳng giữa $a_1, a_2, ..., a_n$, không làm mất tính tổng quát có thể giả sử:

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_1} \leq \frac{1}{a_2} \leq ... \leq \frac{1}{a_n}.$$

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy trên, ta có:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n\left(a_1.\frac{1}{a_1} + a_2.\frac{1}{a_2} ... + a_n.\frac{1}{a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Thí dụ 4.2 (Bất đẳng thức Nesbit ba biến).

Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$.

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử: $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow b + c \leq c + a \leq a + b$ (1)

và $\dfrac{a}{b+c} \geq \dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{c}{a+b}$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy ngược chiều (1),(2), ta có:

$$[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3(a+b+c). \quad (3)$$

Do $a + b + c > 0$, nên từ (3)$\Rightarrow \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đẳng thức trong (1),(2) xảy ra

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c \\ \dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b} \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = c.$$

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự như chứng minh trên, ta cũng chứng minh được bất đẳng thức sau: Cho $a,b,c > 0$ và n là số nguyên dương, khi đó ta có:

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2}.\frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c}.$$

<u>Thí dụ 4.3</u> Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2\geq 1$.

Chứng minh: $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\geq\dfrac{1}{2}$.

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử: $a\geq b\geq c>0 \Rightarrow a^2\geq b^2\geq c^2$ (1)

và $\dfrac{a}{b+c}\geq\dfrac{b}{c+a}\geq\dfrac{c}{a+b}$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều (1),(2) ta có:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\leq 3\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\right). \quad (3)$$

Theo thí dụ 4.2 ta có: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}$ và theo giả thiết $a^2+b^2+c^2\geq 1$.

Nên từ (3) suy ra: $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\geq\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} a^2=b^2=c^2 \\ \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}\end{array}\right. \\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

<u>Thí dụ 4.4</u> Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\dfrac{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}{a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}}\geq\dfrac{a+b+c}{3}$. (*)

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử: $a\geq b\geq c>0$ (1)

$\Rightarrow a^{2008}\geq b^{2008}\geq c^{2008}$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều (1),(2) ta có:

$$(a+b+c)\left(a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}\right)\leq 3\left(a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}}{a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}}\geq\frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a^{2008}=b^{2008}=c^{2008}\end{array}\right. \Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét:

- Nếu thêm điều kiện $abc \geq 1$ vào thí dụ 4.4 và do $a,b,c > 0$, nên theo bất đẳng thức Côsi ta có: $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Khi đó:

(*) $\Leftrightarrow a^{2009}+b^{2009}+c^{2009} \geq a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}$ ta được dạng khác của thí dụ 4.4.

- Vậy, theo cách lập luận trên và theo lời giải của thí dụ 4.4 ta cũng chứng minh được dạng tổng quát sau:

Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ và $a_1.a_2...a_n \geq 1$. Chứng minh rằng, với mọi m nguyên dương thì ta có: $a_1^{m+1}+a_2^{m+1}+...+a_n^{m+1} \geq a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

<u>Thí dụ 4.5</u> Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. Chứng minh:

$$\left(x_1.x_2...x_n\right)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)} \leq x_1^{x_1}.x_2^{x_2}...x_n^{x_n}. \quad (1)$$

Bài giải

Có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{n}(x_1+x_2+...+x_n)\ln\left(x_1.x_2...x_n\right) \leq x_1\ln x_1 + x_2\ln x_2 + ... + x_n \ln x_n$

$\Leftrightarrow \left(x_1+x_2+...+x_n\right)\left(\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n\right) \leq n\left(x_1\ln x_1 + x_2 \ln x_2 + ... + x_n \ln x_n\right)$. (2)

Không làm mất tính tổng quát, giả sử: $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n > 0$ (3)

$\Rightarrow \ln x_1 \geq \ln x_2 \geq ... \geq \ln x_n$. (4)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều (3),(4) ta có:

$\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\left(\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n\right) \leq n\left(x_1\ln x_1 + x_2 \ln x_2 + ... + x_n \ln x_n\right)$.

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = ... = x_n \\ \ln x_1 = \ln x_2 = ... = \ln x_n \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$.

<u>Thí dụ 4.6</u> Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các cạnh của một đa giác lồi n cạnh. Gọi C là chu vi của đa giác đó. Chứng minh: $\dfrac{a_1}{C-2a_1} + \dfrac{a_2}{C-2a_2} + ... + \dfrac{a_n}{C-2a_n} \geq \dfrac{n}{n-2}$.

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử: $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0$

$$\Rightarrow C-2a_1 \le C-2a_2 \le \ldots \le C-2a_n \quad (1)$$

$$\text{và } \frac{a_1}{C-2a_1} \ge \frac{a_2}{C-2a_2} \ge \ldots \ge \frac{a_n}{C-2a_n}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy ngược chiều (1),(2) ta có:

$$\left(C-2a_1+C-2a_2+\ldots+C-2a_n\right)\left(\frac{a_1}{C-2a_1}+\frac{a_2}{C-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{C-2a_n}\right) \ge$$

$$\ge n\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right).$$

$$\Leftrightarrow \left[nC-2\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\right]\left(\frac{a_1}{C-2a_1}+\frac{a_2}{C-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{C-2a_n}\right) \ge nC$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{C-2a_1}+\frac{a_2}{C-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{C-2a_n} \ge \frac{nC}{nC-2C}=\frac{n}{n-2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C-2a_1=C-2a_2=\ldots=C-2a_n \\ \dfrac{a_1}{C-2a_1}=\dfrac{a_2}{C-2a_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{C-2a_n}\end{array}\right. \Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n=\dfrac{C}{n}.$

$\Leftrightarrow$ đa giác đã cho là đa giác đều.

Thí dụ 4.7 Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ và $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \ge 1$. Chứng minh:

$$M=\frac{a_1^3}{a-a_1}+\frac{a_2^3}{a-a_2}+\ldots+\frac{a_n^3}{a-a_n} \ge \frac{1}{n-1}, \text{ với } a=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử: $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n > 0$

$$\Rightarrow a_1^2 \ge a_2^2 \ge \ldots \ge a_n^2 \quad (1)$$

$$\text{và } \frac{a_1}{a-a_1} \ge \frac{a_2}{a-a_2} \ge \ldots \ge \frac{a_n}{a-a_n}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều (1),(2) ta có:

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(\frac{a_1}{a-a_1}+\frac{a_2}{a-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a-a_n}\right) \le n.M$$

$$\Leftrightarrow M \ge \frac{1}{n}.\left(\frac{a_1}{a-a_1}+\frac{a_2}{a-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{a-a_n}\right). \quad (3)$$

Ta có: $\frac{a_1}{a-a_1}+\frac{a_2}{a-a_2}+...+\frac{a_n}{a-a_n}=\left(1+\frac{a_1}{a-a_1}\right)+\left(1+\frac{a_2}{a-a_2}\right)+...+\left(1+\frac{a_n}{a-a_n}\right)-n$

$$=a\left(\frac{1}{a-a_1}+\frac{1}{a-a_2}+...+\frac{1}{a-a_n}\right)-n. \quad (4)$$

Theo thí dụ 4.1, ta có:

$$\frac{1}{a-a_1}+\frac{1}{a-a_2}+...+\frac{1}{a-a_n}\geq\frac{n^2}{a-a_1+a-a_2+...+a-a_n}=\frac{n^2}{na-a}. \quad (5)$$

Từ (3),(4),(5) $\Rightarrow M\geq\frac{1}{n}\left(a.\frac{n^2}{na-a}-n\right)=\frac{1}{n-1}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=\frac{\sqrt{n}}{n}$.

(Nếu $n=3$ ta có được thí dụ 4.3).

Thí dụ 4.8 Cho ΔABC nhọn. Chứng minh:

$$\frac{sinA+sinB+sinC}{\cos A+cosB+cosC}\leq\frac{\tan A.\tan B.\tan C}{3}.$$

Bài giải

Do vai trò bình đẳng giữa A,B,C nên giả sử: $0<C\leq B\leq A<\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \cos A\leq cosB\leq cosC \quad (1)$$

$$\text{và} \quad \tan A\geq\tan B\geq\tan C. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy ngược chiều (1),(2) ta có:

$$(\cos A+cosB+cosC)(\tan A+\tan B+\tan C)\geq 3(\cos A.\tan A+\cos B.\tan B+\cos C.\tan C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A+cosB+cosC)(\tan A+\tan B+\tan C)\geq 3(\sin A+\sin B+\sin C). \quad (3)$$

Do ΔABC nhọn $\Rightarrow \cos A+cosB+cosC>0$

và $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$,

nên $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ $\frac{sinA+sinB+sinC}{\cos A+cosB+cosC}\leq\frac{\tan A.\tan B.\tan C}{3}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos A=\cos B=\cos C\\ \tan A=\tan B=\tan C\end{array}\right.\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Nhận xét: Theo lời giải trên, để ý rằng nếu $0 < C \le B \le A < \frac{\pi}{2}$ thì:

$\sin A \ge \sin B \ge \sin C$ và $\cot A \le \cot B \le \cot C$. Nên theo bất đẳng thức T.B.S cũng dễ dàng suy ra được lời giải cho thí dụ sau:

Cho ΔABC nhọn. Khi đó ta luôn có:

$$\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} \le \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

<u>Thí dụ 4.9</u> Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\frac{a}{h_b + h_c} + \frac{b}{h_c + h_a} + \frac{c}{h_a + h_b} \le \frac{R\sqrt{3}}{2r}.$$

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c$ (1)

$$\Rightarrow \frac{2S}{h_a} \le \frac{2S}{h_b} \le \frac{2S}{h_c} \Rightarrow h_a \ge h_b \ge h_c \Rightarrow h_b + h_c \le h_c + h_a \le h_a + h_b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_b + h_c} \ge \frac{1}{h_c + h_a} \ge \frac{1}{h_a + h_b}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy ngược chiều (1),(2) ta có:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{h_b + h_c} + \frac{1}{h_c + h_a} + \frac{1}{h_a + h_b}\right) \ge 3\left(\frac{a}{h_b + h_c} + \frac{b}{h_c + h_a} + \frac{c}{h_a + h_b}\right). \quad (3)$$

Trong mọi tam giác ΔABC, ta luôn có:

$$a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \le 2R.\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}R. \quad (4)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, thì:

$$\frac{4}{h_b + h_c} + \frac{4}{h_c + h_a} + \frac{4}{h_a + h_b} \le \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) + \left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a}\right) + \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_b + h_c} + \frac{1}{h_c + h_a} + \frac{1}{h_a + h_b} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = \frac{1}{2r}. \quad (5)$$

Từ (4),(5) $\Rightarrow (3) \Leftrightarrow \frac{a}{h_b + h_c} + \frac{b}{h_c + h_a} + \frac{c}{h_a + h_b} \le \frac{R\sqrt{3}}{2r} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (3),(4),(5) xảy ra

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Thí dụ 4.10 Cho ΔABC không có góc tù. Chứng minh:

$$3(a+b+c) \le \pi\left(\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}\right). \quad (1)$$

Bài giải

Theo định lý hàm số sin trong ΔABC, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3(\sin A+\sin B+\sin C) \le \pi\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right). \quad (2)$$

Dễ thấy hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nghịch biến khi $0 < x \le \frac{\pi}{2}$,

nên giả sử $A \ge B \ge C \Rightarrow \frac{\sin A}{A} \le \frac{\sin B}{B} \le \frac{\sin C}{C}$.

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy ngược chiều trên, ta có:

$$(A+B+C)\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right) \ge 3(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$\Leftrightarrow \pi\left(\frac{\sin A}{A}+\frac{\sin B}{B}+\frac{\sin C}{C}\right) \ge 3(\sin A+\sin B+\sin C) \Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét: • Trong thí dụ này, để xác định được hai dãy tỉ lệ khi chứng minh (2) ta phải sử dụng đến tính đơn điệu của hàm số, cụ thể trong thí dụ này là tính nghịch biến của hàm $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

• Với lập luận như trên, ta có được các bất đẳng thức tương tự (2) sau:

∗ Hàm $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nên nếu $A \ge B \ge C$ thì

$\frac{\tan A}{A} \ge \frac{\tan B}{B} \ge \frac{\tan C}{C}$. Theo bất đẳng thức T.B.S ta có:

$3(\tan A+\tan B+\tan C) \ge \pi\left(\frac{\tan A}{A}+\frac{\tan B}{B}+\frac{\tan C}{C}\right)$, với $\forall \Delta ABC$ nhọn.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

$*$ Hàm $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$3(\cos A+\cos B+\cos C)\le \pi\left(\frac{\cos A}{A}+\frac{\cos B}{B}+\frac{\cos C}{C}\right), \text{ với } \forall\Delta ABC \text{ nhọn.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Thí dụ 4.11 Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\sqrt{3}(\cos A+\cos B+\cos C).$$

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $A\ge B\ge C$.

Do $y=\cos x$ nghịch biến khi $0<x<\pi$, nên $\cos A\le\cos B\le\cos C$. (1)

- Nếu $0<B\le A\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \sin A\ge\sin B$.
- Nếu $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi\Rightarrow 0<B+C<\dfrac{\pi}{2}$ có $\sin A=\sin(B+C)>\sin B$.

Vậy trong mọi ΔABC nếu $A\ge B\ge C$ ta có: $\sin A\ge\sin B\ge\sin C$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy ngược chiều (1),(2) ta có:

$$(\sin A+\sin B+\sin C)(\cos A+\cos B+\cos C)\ge\frac{3}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C). \quad (3)$$

Trong mọi ΔABC ta luôn có: $\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. (4)

Từ (3),(4) $\Rightarrow \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\le\sqrt{3}(\cos A+\cos B+\cos C)$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức xảy ra trong (3),(4)

$\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Thí dụ 4.12 Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge\frac{4}{3}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right).$$

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $A\ge B\ge C$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\ge\sin\frac{B}{2}\ge\sin\frac{C}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{A}{2}\ge\sin^2\frac{B}{2}\ge\sin^2\frac{C}{2}, \quad (1)$$

và $\quad \cos\frac{A}{2}\le\cos\frac{B}{2}\le\cos\frac{C}{2}\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}\ge\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}\ge\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều (1),(2) ta có:

$$\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right)\le 3\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\right).$$

(3)

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\ge\frac{9}{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}. \quad (4)$$

Mặt khác, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{3+\cos A+\cos B+\cos C}{2}\le\frac{3+\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{4}. \quad (5)$$

Từ (3),(4),(5)$\Rightarrow$ $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge\frac{4}{3}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (3),(4),(5) xảy ra

$\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

<u>Thí dụ 4.13</u> Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Bài giải

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow\sqrt{a}\ge\sqrt{b}\ge\sqrt{c}$ (1)

và $\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}\ge\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}\ge\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều (1),(2) ta có:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\right)\le$$

$$\le 3\left(\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\right). \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\ge 3.\sqrt[6]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}. \qquad (4)$$

Ta lại có: $abc \ge (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$. (5)

Từ (3),(4),(5) $\Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b-c}}\ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (3),(4),(5) xảy ra

$\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét: • Đặt $x=b+c-a>0$; $y=c+a-b>0$; $z=a+b-c>0$.

Ta có: $(x+y)(y+z)(z+x)=8abc$.

Theo bất đẳng thức Côsi, thì: $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$ $\Rightarrow$ (5) đúng.

• Theo lời giải trên, ta có lời giải cho dạng tổng quát của thí dụ 4.13 sau:

Trong mọi ΔABC và với $\forall x,y>0$; $x\ge y$, ta có:

$$\frac{a^x}{(b+c-a)^y}+\frac{b^x}{(c+a-b)^y}+\frac{c^x}{(a+b-c)^y}\ge a^{x-y}+b^{x-y}+c^{x-y}. \qquad (6)$$

Thật vậy, giả sử $a\ge b\ge c \Rightarrow \dfrac{a}{b+c-a}\ge\dfrac{b}{c+a-b}\ge\dfrac{c}{a+b-c}$

$$\Rightarrow\begin{cases} a^{x-y}\ge b^{x-y}\ge c^{x-y} \\ \left(\dfrac{a}{b+c-a}\right)^y\ge\left(\dfrac{b}{c+a-b}\right)^y\ge\left(\dfrac{c}{a+b-c}\right)^y \end{cases}. \qquad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy cùng chiều trong (*), ta có:

$$\frac{a^x}{(b+c-a)^y}+\frac{b^x}{(c+a-b)^y}+\frac{c^x}{(a+b-c)^y}\ge$$

$$\ge\frac{1}{3}\left(a^{x-y}+b^{x-y}+c^{x-y}\right)\left[\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^y+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^y+\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^y\right]$$

$$\geq \left(a^{x-y}+b^{x-y}+c^{x-y}\right).\sqrt[3]{\left[\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}\right]^{y}} \geq a^{x-y}+b^{x-y}+c^{x-y}.$$

(Theo (4),(5)). Vậy (6) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Thí dụ 4.14 Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta có:

$$\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)\left(h_a^2+h_b^2+h_c^2\right) \geq 27S^2, \qquad (1)$$

với $m_a, m_b, m_c; h_a, h_b, h_c$ lần lượt tương ứng là độ dài ba đường trung tuyến và ba đường cao của ΔABC, $S=S_{\Delta ABC}$.

Bài giải

Trong ΔABC, ta có: $m_a^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}; m_b^2=\dfrac{2c^2+2a^2-b^2}{4}; m_c^2=\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$

$$\Rightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(h_a^2+h_b^2+h_c^2\right) \geq 36S^2. \qquad (2)$$

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a^2 \geq b^2 \geq c^2$ (3)

$$\text{và } \frac{2S}{a} \leq \frac{2S}{b} \leq \frac{2S}{c} \Leftrightarrow h_a \leq h_b \leq h_c. \qquad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy ngược chiều (1),(2) ta có:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(h_a^2+h_b^2+h_c^2\right) \geq 3\left(a^2h_a^2+b^2h_b^2+c^2h_c^2\right). \qquad (5)$$

Mặt khác, trong mọi ΔABC ta luôn có: $a^2h_a^2=b^2h_b^2=c^2h_c^2=4S^2$. (6)

Từ (5),(6) $\Rightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(h_a^2+h_b^2+h_c^2\right) \geq 36S^2$ $\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét: Với phép suy luận trên, ta cũng có thể chứng minh được cho dạng tổng quát của (2) sau: Chứng minh rằng trong mọi ΔABC, và với $\forall n \in$ ¥* ta có:

$$\left(a^n+b^n+c^n\right)\left(h_a^n+h_b^n+h_c^n\right) \geq 9.2^n.S^n.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

<u>Thí dụ 4.15</u> Cho ΔABC không tù. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$M=\frac{a^2\cos A}{bc}+\frac{b^2\cos B}{ca}+\frac{c^2\cos C}{ab}.$$

Bài giải

Ta có: $M=\frac{1}{4S}\left(a^2\sin 2A+b^2\sin 2B+c^2\sin 2C\right)$.

Không làm mất tính tổng quát, giả sử: $0<C\le B\le A\le\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow a\ge b\ge c\Rightarrow a^2\ge b^2\ge c^2 \quad (1)$$

và $\sin 2A\le\sin 2B\le\sin 2C$. (2)

Áp dụng bất đẳng thức T.B.S cho hai dãy (1),(2) ta có:

$$M\le\frac{1}{12S}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{3S}\sin A.\sin B.\sin C.$$

$$\Rightarrow M\le\frac{a^2+b^2+c^2}{3S}.\frac{S}{2R^2}=\frac{2}{3}.\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}=\frac{2}{3}\left(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\right)$$

$$\Rightarrow M\le\frac{2}{3}.\frac{9}{4}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều.

Vậy $\mathrm{Max}M=\frac{3}{2}$ đạt được khi ΔABC đều.

Nhận xét: Trong chứng minh trên, đã sử dụng một số hệ thức lượng cơ bản trong tam giác:

- $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$.
- $\sin A.\sin B.\sin C=\frac{S}{2R^2}$.
- $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}$.
- $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\le\frac{9}{4}$.

Chương 5

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

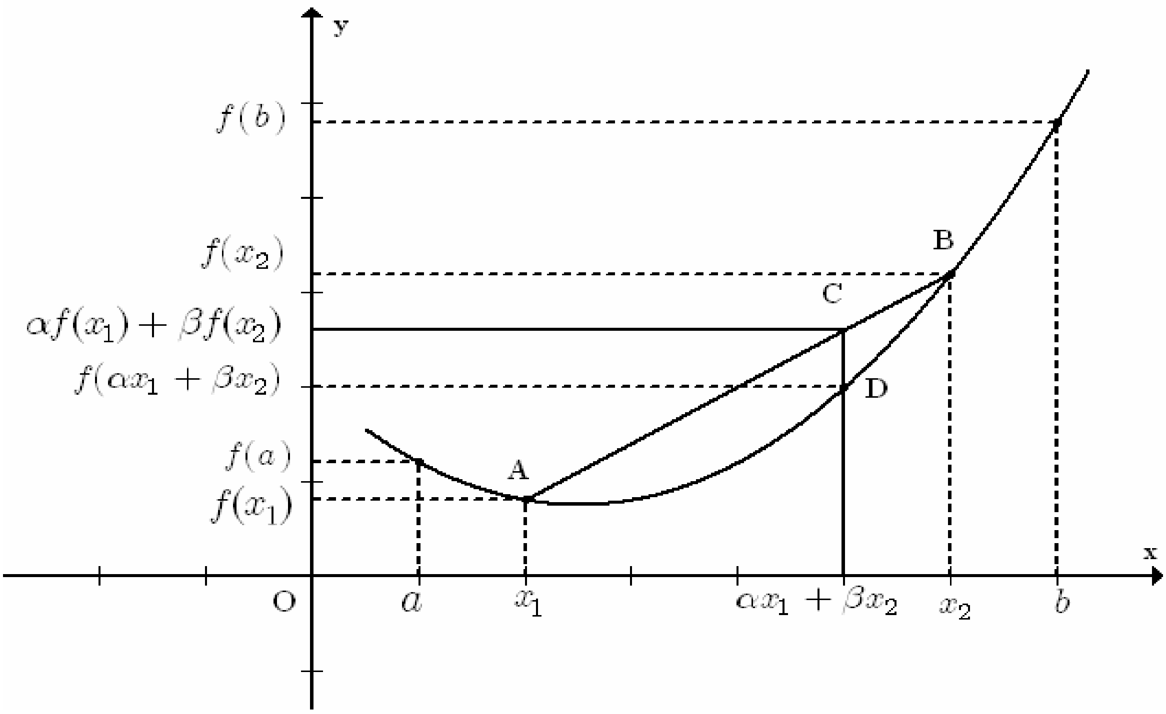
5.1 ĐỊNHNGHĨA HÀM LỒI.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Hàm số $f(x)$ được gọi là lồi trên đó, nếu như thoả mãn điều kiện sau: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ và $\forall \alpha, \beta \geq 0$ sao cho $\alpha + \beta = 1$ thì

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \quad (1)$$

Về mặt hình học, thì (1) có ý nghĩa như sau:

Nếu gọi $A(x_1, f(x_1)); B(x_2, f(x_2))$ là hai điểm nằm trên đường cong $y = f(x)$; với $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$, thì mọi điểm nằm trên cung AB của đồ thị đều nằm dưới cát tuyến AB. Có thể thấy ngay toạ độ của điểm C là $C(\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha f(x_1) + \beta f(x_2))$, còn toạ độ của điểm D là $D(\alpha x_1 + \beta x_2; f(\alpha x_1 + \beta x_2))$. (Hình vẽ).



Nhận xét: Ngược lại, nếu hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a,b]$ được gọi là lõm trên đó, nếu như thoả mãn các điều kiên sau: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ và $\forall \alpha, \beta \geq 0$ sao cho $\alpha + \beta = 1$ thì $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$.

5.2 ĐIỀU KIỆN ĐỦ VỀ TÍNH LỒI CỦA HÀM SỐ.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục đến đạo hàm cấp 2 trên (a,b).

- Nếu $f''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên (a,b).
- Ngược lại, nếu $f''(x) < 0, \forall x \in (a,b)$ thì $f(x)$ là hàm lõm trên (a,b).

5.3 BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN.

5.3.1 Định lý.

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[a,b]$. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$; $\alpha_i > 0$ $\left(\forall i = \overline{1,n}\right)$ sao cho: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Chứng minh: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$. (1)

Chứng minh

- Với $n = 2$ thì (1) đúng (theo định nghĩa hàm lồi).
- Giả sử (1) đúng đến $n = k - 1$.
- Xét khi $n = k$. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_k \in [a,b]$ và $\alpha_i > 0$ $\left(\forall i = \overline{1,k}\right)$ sao cho: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

Ta có: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k-2} \alpha_i x_i + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k x_k$. (2)

Đặt $\alpha = \sum_{i=1}^{k-2} \alpha_i x_i \Rightarrow 0 < \alpha < 1$, vì thế từ (2) suy ra:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k-2} \alpha_i x_i + (1-\alpha)\left[\frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}.x_{k-1} + \frac{\alpha_k}{1-\alpha} x_k\right], \text{ do } \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha} + \frac{\alpha_k}{1-\alpha} = 1$$

mà $x_{k-1}, x_k \in [a,b] \Rightarrow x^* = \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha} x_{k-1} + \frac{\alpha_k}{1-\alpha} x_k \in [a,b]$.

Áp dụng giả thiết qui nạp với $k-1$ điểm $x_1, x_2, ..., x_{k-2}, x^*$ và bộ số:

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-2}, 1-\alpha$ (ta có: $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{k-2} + 1 - \alpha = 1$).

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)= f\left(\sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i x_i+(1-\alpha)x^*\right)\le \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i f(x_i)+(1-\alpha)f(x^*). \qquad (3)$$

Mặt khác, theo định nghĩa hàm lồi ta có:

$$f(x^*)= f\left(\frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}x_{k-1}+\frac{\alpha_k}{1-\alpha}x_k\right)\le \frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}f(x_{k-1})+\frac{\alpha_k}{1-\alpha}f(x_k). \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\le \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i f(x_i)+(1-\alpha)\left[\frac{\alpha_{k-1}}{1-\alpha}f(x_{k-1})+\frac{\alpha_k}{1-\alpha}f(x_k)\right]$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\le \sum_{i=1}^{k-2}\alpha_i f(x_i)+\alpha_{k-1}.f(x_{k-1})+\alpha_k.f(x_k)\alpha_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i\right)\le \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f(x_i).$$

Vậy bất đẳng thức Jensen đúng khi $n=k$.

Theo nguyên lý qui nạp suy ra điều phải chứng minh.

5.3.2 Hệ quả.

Từ định lý, nếu $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=\frac{1}{n}$ ta suy ra trực tiếp được hệ quả quan trọng sau: Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[a,b]$, thì $\forall x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$, ta có:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\le \frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\right].$$

5.3.3 Nhận xét.

- Bất đẳng thức Jensen còn được phát biểu dưới dạng sau:

Cho $f(x)$ là hàm lõm trên $[a,b]$. Giả sử $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$; $\alpha_i>0$ $\left(\forall i=\overline{1,n}\right)$ sao cho: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. Ta có: $f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\ge \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$.

- Phương pháp dùng bất đẳng thức Jensen là một phương pháp hiệu quả để chứng minh bất đẳng thức. Tuy nhiên, vì bất đẳng thức Jensen không được giới thiệu trong chương trình toán trong nhà trường phổ thông, nên học sinh phổ thông ít có điều kiện tiếp xúc và sử dụng bất đẳng thức này.

5.4 MỘT SỐ THÍ DỤ MINH HOẠ**.**

Thí dụ 5.1 (Bất đẳng thức Côsi).

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$. Chứng minh: $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$. (1)

Bài giải

• Xét hàm số $f(x) = -\ln x$, với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$; $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, $\forall x > 0$.

$\Rightarrow f(x) = -\ln x$ lồi khi $x > 0$. Theo bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)\right]$$

$$\Leftrightarrow -\ln\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leq -\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \ln\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}. \qquad (2)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n > 0$.

• Xét n số: $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, có hai khả năng xảy ra:

- Nếu $a_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ thì (1) hiển nhiên đúng.

- Nếu $a_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ theo (2) ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}.$$

Vậy (1) đúng $\forall a_i \geq 0, i = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Thí dụ 5.2 (Bất đẳng thức Bunhiacópski).

Cho $2n$ số thực: $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Chứng minh:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2. \qquad (1)$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=x^2$, với $x\in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=2x$; $f''(x)=2>0,\forall x\in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)=x^2$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có: $\forall \alpha_i \geq 0, x_i,\ i=\overline{1,n}$ và $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i>0$, thì:

$$f\left(\frac{\alpha_1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}x_1+\frac{\alpha_2}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}x_2+...+\frac{\alpha_n}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}x_n\right)\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}.f\left(x_k\right).$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2}\leq \frac{\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+...+\alpha_nx_n^2}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$$

$$\Rightarrow \left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n\right)^2\leq \left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)\left(\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+...+\alpha_nx_n^2\right). \qquad (2)$$

Giả sử $b_i\neq 0, i=\overline{1,n}$ (vì nếu tồn tại $b_i=0$, ta chỉ cần loại cặp $\left(a_i,b_i\right)$ đi, và cứ làm như thế cho đến khi chỉ còn lại các cặp $\left(a_j;b_j\right)$ với $b_j\neq 0$).

Đặt $\alpha_i=b_i^2$ và $x_i=\frac{a_i}{b_i}$, $i=\overline{1,n}$. Nên từ (2) suy ra:

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2\leq \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$.

Thí dụ 5.3 (Bất đẳng thức Minkowski).

Cho $a_i,b_i>0,\left(i=\overline{1,n}\right)$. Chứng minh:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2...b_n}\leq \sqrt[n]{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)...\left(a_n+b_n\right)}.$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$, với $\forall\ x\in \mathbb{R}$.

Có $f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$; $f''(x)=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0,\ \forall x\in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = \ln\left(1+e^x\right)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$. Theo bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_n\right)\right].$$

Chọn $x_i = \ln\dfrac{b_i}{a_i}$, $i=\overline{1,n}$. Ta có:

$$\ln\left(1+e^{\frac{1}{n}\left(\ln\frac{b_1}{a_1}+...+\ln\frac{b_n}{a_n}\right)}\right) \le \frac{1}{n}.\left[\ln\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)+\ln\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)\right].$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt[n]{\frac{b_1.b_2...b_n}{a_1.a_2...a_n}}\right) \le \ln\sqrt[n]{\frac{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)...\left(a_n+b_n\right)}{a_1.a_2...a_n}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\sqrt[n]{\frac{b_1.b_2...b_n}{a_1.a_2...a_n}} \le \sqrt[n]{\frac{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)...\left(a_n+b_n\right)}{a_1.a_2...a_n}}$$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1.b_2...b_n} \le \sqrt[n]{\left(a_1+b_1\right)\left(a_2+b_2\right)...\left(a_n+b_n\right)}$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$.

<u>Thí dụ 5.4</u> (Bất đẳng thức Svacxơ).

Cho a_i, b_i và $b_i > 0\left(i=\overline{1,n}\right)$. Chứng minh:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}. \qquad (1)$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=x^2$, với $x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=2x$; $f''(x)=2>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=x^2$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n\right) \le \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+...+\alpha_n f(x_n). \qquad (2)$$

Với $\alpha_i > 0$ $\left(\forall i=\overline{1,n}\right)$ sao cho: $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$. Chọn $\alpha_i = \dfrac{b_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j}$; $x_i = \dfrac{b_i}{a_i}$, $\forall i=\overline{1,n}$.

Từ (2) $\Rightarrow \left(\frac{b_1}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j} . \frac{a_1}{b_1} + ... + \frac{b_n}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j} . \frac{a_n}{b_n} \right)^2 \le \frac{b_1}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j} . \left(\frac{a_1}{b_1} \right)^2 + ... + \frac{b_n}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j} . \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \le \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

<u>Thí dụ 5.5</u> (Bất đẳng thức Nesbit ba biến).

Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$. (1)

Bài giải

Đặt $A = a + b + c > 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{A-a} + \frac{b}{A-b} + \frac{c}{A-c} \ge \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{A-x}$, với $x \in (0; A)$.

Có $f'(x) = \frac{A}{(A-x)^2}$; $f''(x) = \frac{2A}{(A-x)^3} > 0$, với $\forall\ x \in (0; A)$.

$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{A-x}$ là hàm lồi trên $(0; A)$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có: $f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right) \le \frac{1}{3}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \right]$.

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3A-(a+b+c)} \le \frac{1}{3}\left(\frac{a}{A-a} + \frac{b}{A-b} + \frac{c}{A-c} \right)$$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Nhận xét: • Bất đẳng thức Nesbit ba biến ngoài cách chứng minh trên, đã được chứng minh bằng các phương pháp: bất đẳng thức Côsi (thí dụ 1.2), bất đẳng thức Bunhiacopski (thí dụ 2.3.1), bất đẳng thức với các dãy đơn điệu (thí dụ 3.5) và bất đẳng thức Trêbưsép (thí dụ 4.2).

• Cũng như bất đẳng thức Nesbit: bất đẳng thức Côsi cơ bản, bất đẳng thức Svacxơ và một số bất đẳng thức, thí dụ khác cho thấy, một bất đẳng thức có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau. Qua đó cũng cho thấy được sự đa dạng và phong phú về các phương pháp trong chứng minh bất đẳng thức.

Thí dụ 5.6 Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}.$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

Có $f'(x)=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$; $f''(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$, $\forall x>0$.

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ lồi khi $x>0$. Theo hệ quả của bất đẳng thức Jensen, ta có: $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\right]$.

Chọn $x_i = \ln a_i$, $\forall i = \overline{1,n}$. Ta có:

$$\frac{1}{1+\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\right).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}} \quad \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n > 1$.

Thí dụ 5.7 Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:

$$(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c \leq \left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c}. \quad (1)$$

Bài giải

Có (1) $\Leftrightarrow \frac{a\ln(b+c)+b\ln(c+a)+c\ln(a+b)}{a+b+c} \leq \ln\left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]$. (2)

Xét hàm số $f(x) = -\ln(a+b+c-x)$, với $x \in (0, a+b+c)$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{a+b+c-x}$; $f''(x) = \dfrac{1}{(a+b+c-x)^2} > 0$, với $x \in (0, a+b+c)$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $(0, a+b+c)$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f\left(\frac{a}{a+b+c}.a + \frac{b}{a+b+c}.b + \frac{c}{a+b+c}.c\right) \le \frac{a.f(a) + bf(b) + cf(c)}{a+b+c}.$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(a+b+c-\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right) \le \frac{-a\ln(b+c) - b\ln(c+a) - c\ln(a+b)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{2ab+2bc+2ca}{a+b+c} \ge \frac{a\ln(b+c) + b\ln(c+a) + c\ln(a+b)}{a+b+c}. \qquad (3)$$

Dễ thấy, với $a,b,c > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(a+b+c) \ge \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \ln\left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right] \ge \ln\left[\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}\right]. \qquad (4)$$

Từ (3),(4) $\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời đẳng thức trong (3),(4) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

<u>Thí dụ 5.8</u> Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh: $a^a b^b c^c \ge \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.

Bài giải

Xét hàm số $f(x) = x\ln x$, với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = 1 + \ln x$; $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, $\forall x > 0$.

$\Rightarrow f(x) = x\ln x$ là hàm lồi khi $x > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có: $f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) \le \dfrac{1}{3}[f(a) + f(b) + f(c)]$.

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3} \le \frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{3}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \le \ln\left(a^a b^b c^c\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \le a^a b^b c^c \ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Nhận xét: Với cách giải trên ta cũng chứng minh được dạng tổng quát cho thí dụ 5.8 sau: Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$a_1^{a_1}.a_2^{a_2}...a_n^{a_n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+...+a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n > 0$.

(Nếu $n = 3$ ta thu được thí dụ 5.8).

<u>Thí dụ 5.9</u> Cho $a, b, x, y > 0$. Chứng minh: $x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \ge (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$.

Bài giải

Xét hàm số $f(x) = x\ln x$, với $x > 0$.

Có $f'(x) = \ln x + 1$; $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, với $\forall x > 0$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi khi $x > 0$.

Đặt $\alpha_1 = \frac{a}{a+b}$; $\alpha_2 = \frac{b}{a+b} \Rightarrow \alpha_1; \alpha_2 > 0$ và $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

$x_1 = \frac{x}{a}$; $x_2 = \frac{y}{b}$.

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$.

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \le \frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{a+b}\ln\frac{x+y}{a+b} \le \frac{x}{a+b}\ln\frac{x}{a} + \frac{y}{a+b}\ln\frac{y}{b}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \le x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ a = b \end{cases}$.

<u>Thí dụ 5.10</u> Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12.$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, với $x \in (0, \pi)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{-2\cos x}{\sin^3 x}$; $f''(x) = \frac{2\sin^2 x + 6\cos^2 x}{\sin^4 x} > 0$, với $\forall\ x \in (0, \pi)$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $(0, \pi)$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 \dfrac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét:

- Theo thí dụ trên cho thấy, ngoài các phương pháp đã dùng để chứng minh bất đẳng thức lượng giác thì phương pháp dùng tính lồi của hàm số (Bất đẳng thức Jensen) cũng được vận dụng một cách có hiệu quả để chứng minh bất đẳng thức lượng giác, đặc biệt là các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.
- Với cách làm trên có thể xây dựng được các bất đẳng thức tương tự sau:

- Trong mọi ΔABC ta có: $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq 4$.

- Với $\forall x_i \in (0, \pi), i = \overline{1, n}$ thì: $\frac{1}{\sin^2 x_1} + \frac{1}{\sin^2 x_2} + ... + \frac{1}{\sin^2 x_n} \geq \frac{n}{\sin^2 \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}}$.

<u>Thí dụ 5.11</u> Cho ΔABC. Chứng minh: $\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 6$.

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$, với $x\in(0,\pi)$.

Ta có: $f'(x)=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$; $f''(x)=\dfrac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{\sin^3 x}>0$, với $\forall\ x\in(0,\pi)$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $(0,\pi)$.

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có: $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}}\leq\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}\geq 6$ $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét:

Hoàn toàn tương tự như thí dụ 5.10 ta cũng có được các kết quả tương đương sau:

- Trong ΔABC ta luôn có: $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\geq 2\sqrt{3}$.
- Với $\forall x_i\in(0,\pi), i=\overline{1,n}$ thì: $\dfrac{1}{\sin x_1}+\dfrac{1}{\sin x_2}+...+\dfrac{1}{\sin x_n}\geq\dfrac{n}{\sin\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}$.

<u>Thí dụ 5.12</u> Trong ΔABC ta luôn có: $\dfrac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\frac{C}{2}}\geq 2\sqrt{3}$.

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, với $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Có $f'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; $f''(x)=\dfrac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}>0$, với $\forall\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ là hàm lồi trên $(0,\dfrac{\pi}{2})$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có: $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}}{3}}\le\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{\cos\dfrac{B}{2}}+\dfrac{1}{\cos\dfrac{C}{2}}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\ge 2\sqrt{3}\ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét: Từ thí dụ trên suy ra được các kết quả sau:

- Trong ΔABC nhọn, ta luôn có: $\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos B}+\dfrac{1}{\cos C}\ge 6.$
- Với $\forall x_i\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right), i=\overline{1,n}$ thì: $\dfrac{1}{\cos x_1}+\dfrac{1}{\cos x_2}+...+\dfrac{1}{\cos x_n}\ge\dfrac{n}{\cos\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}$.

<u>Thí dụ 5.13</u> Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\ge 4.$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, với $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Có: $f'(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, $f''(x)=\dfrac{2\cos^2 x+6\sin^2 x}{\cos^4 x}>0$, với $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ là hàm lồi trên $(0,\dfrac{\pi}{2})$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$\frac{1}{\cos^2\dfrac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}\geq 4 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét: Từ thí dụ trên suy ra được các kết quả sau:

- Trong ΔABC nhọn, ta luôn có: $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 A}+\dfrac{1}{\cos^2 B}+\dfrac{1}{\cos^2 C}\geq 12$.
- Với $\forall x_i \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right), i=\overline{1,n}$ thì:

$$\frac{1}{\cos^2 x_1}+\frac{1}{\cos^2 x_2}+...+\frac{1}{\cos^2 x_n}\geq \frac{n}{\cos^2\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}.$$

<u>Thí dụ 5.14</u> Chứng minh rằng, trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}+\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\tan\dfrac{x}{2}$, với $x\in(0,\pi)$.

Có $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$; $f''(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{4\cos^3\frac{x}{2}}\left(4-\cos^4\dfrac{x}{2}\right)>0$, với $\forall\ x\in(0,\pi)$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $(0,\pi)$.

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có: $f\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)\leq\dfrac{1}{3}\big(f(A)+f(B)+f(C)\big)$.

$$\Rightarrow \sin\frac{A+B+C}{6}+\tan\frac{A+B+C}{6}\leq\frac{1}{3}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}+\frac{3}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét: Trong ΔABC ta luôn có: $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{3}{2}$

$$\text{và} \quad \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}\,.$$

Hai bất đẳng thức này ngược chiều nhau, vì thế không thể cộng từng vế của hai bất đẳng thức này để suy ra bất đẳng thức (1). Cho nên phương pháp sử dụng bất đẳng thức Jensen tỏ rõ hiệu quả trong thí dụ này.

Thí dụ 5.15 Chứng minh rằng, nếu n nguyên dương thì ta có:

$$\frac{\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n}{n}\leq\sin\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},\ \text{với}\ x_i\in[0,\pi]\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x)=\sin x$, với $x\in[0,\pi]$.

Có $f'(x)=\cos x$; $f''(x)=-\sin x\leq 0$, với $\forall x\in[0,\pi]$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lõm trên $[0,\pi]$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\geq\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\geq\frac{\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n}{n}\ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$.

Nhận xét:

- Từ thí dụ trên, áp dụng vào trong tam giác, người ta thường xét các trường hợp riêng quan trọng sau:

$$*\ \sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$

$$*\ \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leq\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

- Tương tự với cách giải thí dụ trên, ta có lời giải cho các thí dụ sau:

Thí dụ 5.15.1 Chứng minh rằng, nếu n nguyên dương và $x_i\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $i=\overline{1,n}$.

Thì ta có: $\dfrac{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}{n}\leq\cos\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.

Bài giải

Xét hàm số $f(x) = \cos x$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Có $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x \le 0$, với $\forall\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lõm trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}\left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + ... + f\left(x_n\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \ge \frac{\cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n}{n} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Nhận xét: Áp dụng kết quả trên vào trong ΔABC ta có:

$$* \quad \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}. \qquad (3)$$

$$* \quad \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (4)$$

Thí dụ 5.15.2 Cho n là số nguyên dương và $x_i \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $i = \overline{1,n}$. Chứng minh:

$$\frac{\tan x_1 + \tan x_2 + ... + \tan x_n}{n} \ge \tan\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Bài giải

Xét hàm số $f(x) = \tan x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Có $f'(x) = 1 + \tan^2 x$; $f''(x) = 2\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) > 0$, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+...+f\left(x_n\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ \tan\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\le\frac{\tan x_1+\tan x_2+...+\tan x_n}{n}\ \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$.

Nhận xét: • Áp dụng kết quả của thí dụ trên vào trong ΔABC ta có:

$*\ \ \tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}$. (5)

$*\ \ \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}$. (6)

• Các bất đẳng thức từ (1) đến (6) được suy ra từ thí dụ 5.15 ; 5.15.1 và 5.15.2 gọi là các bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác, các bất đẳng thức này thường được sử dụng làm bất đẳng thức trung gian để chứng minh các bất đẳng thức lượng giác khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phan Đức Chính (2006), *Bất đẳng thức*, NXB Văn hoá Thông tin.

[2] Bộ giáo dục và đào tạo (1996), *Đề thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp*, NXB Giáo dục.

[3] Bộ giáo dục và đào tạo, *Tạp chí toán học và tuổi trẻ*, NXB Giáo dục.

[4] Phan Huy Khải (2000), *Giới thiệu các dạng toán luyện thi đại học (tập 2)*, NXB Hà Nội.

[5] Phan Huy Khải (2001), *500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức (tập 1,2)*, NXB Hà Nội.

[6] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất đẳng thức*, NXB Giáo dục.

[7] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Polya (2002), *Bất đẳng thức*, NXB Đại học Quốc Gia, Hà Nội.