ABC METHOD
ABSTRACT CONCRETENESS

---NGUYỄN ANH CƯỜNG ---

A. Lời giới thiệu

Một lần nữa tôi lại có dịp gặp lại các bạn với một phương pháp chứng minh bất đẳng thức mới. Nếu như phương pháp chính phương hoá đã khơi dậy trong ta bao nhiêu sự thích thú và thỏa thuê khi hàng trăm bài bất đẳng thức khó đã ngã rạp trước sức mạnh của nó thì tôi tin chắc các bạn sẽ còn hạnh phúc hơn với phương pháp này. Các bạn có thể tin được không, khi trước đây chúng ta phải cực khổ lấy giấy nháp ra và biến đổi thì bây giờ chúng ta sẽ có thể giải bài toán chỉ với cái lướt nhìn đầu tiên. Nào chúng ta hãy cùng nhau thưởng thức viên kim cương này sẽ cắt bánh chưng ra sao nhé J.

B. Phương pháp ABC

Tôi xin mở đầu phương pháp này bằng việc xét một số bài toán sau:

Bài 1:

Cho $ab+bc+ca=1$ và

i) $a+b+c=m, m\in\left[-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right]$. Tìm điều kiện của abc sao cho a,b,c là các số thực.

ii) $a+b+c\in\left[\sqrt{3},+\infty\right], a,b,c\geq 0$. Tìm điều kiện abc sao cho a,b,c là các số thực không âm.

Giải:

Chúng ta đã có hai đại lượng trung bình của a,b,c. Sự xuất hiện của abc khiến chúng ta liên tưởng tới định lý Viete, vì vậy ta nghĩ tới việc xét phương trình;

$X^3-mX^2+X-abc=0(*)$

Yêu cầu của đề bài tương đương với việc, tìm điều kiện của abc để

i) Phương trình (*) có ba nghiệm thực.

ii) Phương trình (*) có ba nghiệm không âm.

Đặt $f(X)=X^3-mX^2+X-abc$

Ta có: $f'(X)=3X^2-2mX+1$.Phương trình có hai nghiệm

$X_1=\dfrac{m+\sqrt{m^2-3}}{3};X_2=\dfrac{m-\sqrt{m^2-3}}{3}$

X	$-\infty$		X_2		X_1		$+\infty$
$f'(X)$		+	0	-	0	+	
$f(X)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Phương trình có ba nghiệm khi và chỉ khi $f(X_2)\geq 0$, $f(X_1)\leq 0$

Từ đây suy ra: $\dfrac{(6+2m^2)X_2-m}{9}\leq abc\leq\dfrac{(6+2m^2)X_1-m}{9}$(1)

Đây cũng chính là đáp số của câu i).

Câu ii) , nhận xét rằng để a,b,c là các số thực dương thì ngoài việc phải thoả mãn (1), abc còn chịu thêm ràng buột $0 \le abc$, và ngược lại với $(1), abc \ge 0, a+b+c \ge 0, ab+bc+ca \ge 0$ thì $a,b,c \ge 0$. Vậy nên đáp số sẽ là:

$$\max\left\{0, \frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9}\right\} \le abc \le \frac{\left(6+2m^2\right)X_1 - m}{9} (2)$$

Như vậy là ta đã hoàn thành hai câu hỏi được nêu ra của bài toán.

Bài tóan trên giúp ta rút ra hai nhận xét sau:

Nhận xét i)

- Điều kiện cần và đủ để tồn tại các số thực a,b,c khi đã biết trước các giá trị $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c=m, m\in\left[-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right]$ là $\frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9} \le abc \le \frac{\left(6+2m^2\right)X_1 - m}{9}$.
- Điều kiện cần và đủ để tồn tại các số thực không âm a,b,c khi đã biết trước các giá trị $ab+bc+ca=1$ và $a+b+c\in\left[\sqrt{3},+\infty\right]$ là $\max\left\{0, \frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9}\right\} \le abc \le \frac{\left(6+2m^2\right)X_1 - m}{9}$.
  - Nhận xét 1 được suy ta trực tiếp từ bài toán đã nêu, chú ý rằng tại sao $a+b+c$ lại bị ràng buộc chạy trong các đoạn như trên. Có hai cách giải thích sau:
    - $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) = 3$
    - $f'(X) = 3X^2 - 2mX + 1$ buộc phải không hoàn toàn dương, hay nói cách khác là phương trình $f'(X)=0$ phải có nghiệm, tức $\Delta' = m^2 - 3 \ge 0$
  - Nhận xét 1 còn cho ta thêm điều gì, thay vì phải sử dụng một bộ (a,b,c) với $a,b,c\in R$ để biễu diễn tất cả các phần tử của tập R^3 thõa $ab+bc+ca=1$, ta có thể sử dụng bộ $(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ với sự ràng buộc của $a+b+c$ và abc như đã nêu. Cũng hoàn toàn tương tự khi ta muốn biễu diễn tất cả các phần tử của tập R^{+^3} thoã $ab+bc+ca=1$.

Nhận xét ii)

- a.Với mỗi bộ số thực (a_0,b_0,c_0) đều tìm được hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ sao cho
  $*\, a_0+b_0+c_0 = x_0+x_0+y_0 = z_0+z_0+t_0$
  $*\, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0 = x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0 = z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0$
  $*\, x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$
  Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0,b_0,c_0) bằng nhau.
- b.Với mỗi bộ số thực không âm (a_0,b_0,c_0) ta đều tìm được một trong hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ hoặc $(0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ thõa mãn điều kiện sau
  $*\, a_0+b_0+c_0 = x_0+x_0+y_0 = z_0+z_0+t_0$
  $*\, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0 = x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0 = z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0$
  $*\, x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$
  Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0,b_0,c_0) bằng nhau.
  Hay
  $*\, a_0+b_0+c_0 = 0+x_0+y_0 = z_0+z_0+t_0$
  $*\, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0 = x_0y_0 = z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0$
  $*\, 0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0$

Đẳng thức xảy ra khi một trong ba biến (a_0, b_0, c_0) bằng 0.

- Nhận xét hai là không hiển nhiên và nó cũng chính là nguồn gốc của phương pháp này. Nhận xét 2 này có điều gì thú vị, chú ý rằng mọi biểu thức đối xứng $f(a,b,c)$ theo ba biến a,b,c đều có thể biễu diễn thành $g(A,B,C)$ thông qua 3 dại lượng trung bình
  - $A = a+b+c$
  - $B = ab+bc+ca$
  - $C = abc$

  Do đó theo một lẽ thông thường với suy nghĩ giảm số biến, ta sẽ cố định A, B và cho C chạy. Ta mong đợi hàm g đạt cực trị khi C đạt các giá trị biên. Tuy nhiên ta không cần biết một cách cụ thể C sẽ đạt gía trị biên khi nào, ta chỉ cần biết một cách trừu tượng khi C đạt giá trị biên thì a,b,c sẽ có hình thù ra sao, và nhận xét 2 sẽ cho ta lời giải cho câu hỏi này.

- Bây giờ chúng ta sẽ đi vào việc chứng minh chi tiết nhận xét 2:

a) Trước hết ta sẽ chứng minh bài toán với các bộ số thực (a_0, b_0, c_0) thỏa mãn: $a_0 + b_0 + c_0 = m$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = 1$. Thông qua bài toán 1, với các ký hiệu X_1, X_2 được giữ nguyên, ta có:

$$Min = \frac{(6+2m^2)X_2 - m}{9} \le a_0b_0c_0 \le \frac{(6+2m^2)X_1 - m}{9} = Max$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét thử xem khi $a_0b_0c_0$ đạt giá trị biên thì hình thù của a_0, b_0, c_0 sẽ ra sao.

Xét phương trình $f(X) = X^3 - mX^2 + X - Min = 0(*)$. Ta có:

$f'(X) = 3X^2 - 2mX + 1$ có hai nghiệm là $X_1 = \dfrac{m+\sqrt{m^2-3}}{3}; X_2 = \dfrac{m-\sqrt{m^2-3}}{3}$ như đã nêu lên ở bài toán 1. Hơn thế nữa $f(X_2) = 0$, hay nói cách khác $f(x) = 0$ và $f'(x) = 0$ có cùng một nghiệm là X_2. Vậy nên phương trình $f(X) = 0$ phải có nghiệm kép, giả sử nghiệm kép đó là x_0, x_0 và nghiệm còn lại là y_0. Như vậy theo định lý Viet ta sẽ có :

$* x_0 + x_0 + y_0 = m = a_0 + b_0 + c_0$

$* x_0x_0 + x_0y_0 + y_0x_0 = 1 = a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0$

$* x_0x_0y_0 = Min \le a_0b_0c_0$

Chứng minh hoàn toàn tương tự với sự tồn tại của (z_0, z_0, t_0)

Như vậy là ta đã chứng minh được bài toán đã nêu trong trường hợp $a_0 + b_0 + c_0 = m$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = 1$. Với một tư tưởng hoàn toàn tương tự, bạn đọc hãy chứng minh sự tồn tại cho trường hợp: $a_0 + b_0 + c_0 = m$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = -1$

Bây giờ giả sử $a_0 + b_0 + c_0 = M$ và $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 = \pm N$ thì liệu các bộ (x_0, x_0, y_0) và (z_0, z_0, t_0) có tồn tại không. Câu trả lời là có, thực vậy, xét các số $(a_1, b_1, c_1) = \left(\dfrac{a_0}{\sqrt{|N|}}, \dfrac{b_0}{\sqrt{|N|}}, \dfrac{c_0}{\sqrt{|N|}}\right)$ thỏa mãn điều kiện:

$a_1 + b_1 + c_1 = \dfrac{M}{\sqrt{|N|}}, a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 = \pm 1$. Như vậy theo chứng minh trên thì các bộ $(x_1, x_1, y_1), (z_1, z_1, t_1)$ là tồn tại. Nhận xét rằng ta có thể xây dựng các bộ (x_0, x_0, y_0) và (z_0, z_0, t_0) như sau: $(x_0, x_0, y_0) = \left(\sqrt{|N|}x_1, \sqrt{|N|}x_1, \sqrt{|N|}z_1\right)$ và $(z_0, z_0, t_0) = \left(\sqrt{|N|}z_1, \sqrt{|N|}z_1, \sqrt{|N|}t_1\right)$. Thực vậy:

$* \ x_0 + x_0 + y_0 = \sqrt{|N|}(x_1 + x_1 + z_1) = \sqrt{|N|}(z_1 + z_1 + t_1) = z_0 + z_0 + t_0 = \sqrt{|N|}\dfrac{M}{\sqrt{|N|}} = M = a_0 + b_0 + c_0$

$* \ x_0x_0 + x_0y_0 + y_0x_0 = |N|(x_1x_1 + x_1y_1 + y_1x_1) = z_0z_0 + z_0t_0 + t_0z_0 = |N|(z_1z_1 + z_1t_1 + t_1z_1) = \pm|N| = \pm N$

$* \ x_0x_0y_0 = \left(\sqrt{|N|}\right)^3 x_1x_1y_1 \le \left(\sqrt{|N|}\right)^3 a_1b_1c_1 = a_0b_0c_0 = \left(\sqrt{|N|}\right)^3 a_1b_1c_1 \le \left(\sqrt{|N|}\right)^3 z_1z_1t_1 = z_0z_0t_0$

Như vậy là ta đã chứng minh được hoàn chỉnh câu (a). Ý tưởng chứng minh câu (b) là hoàn toàn tương tự và xin được nhường cho bạn đọc

----

Bài 2:
Mọi đa thức f đối xứng theo các biến a,b,c đều có thể biễu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$. Và $\deg(abc) \le \dfrac{\deg(f)}{3}$.

Giải:

Nhận xét rằng ta chỉ cần chứng minh sự biễu diễn cho các dạng đa thức sau, vì một đa thức đối xứng bất kỳ đều có thể được biễu diễn thông qua sự kết hợp của các dạng này bằng các phép nhân thêm hệ số và $+,-$ (elementary operation):

$I(n) = a^n + b^n + c^n$

$II(m,n) = a^mb^n + a^nb^m + b^mc^n + c^nb^m + c^ma^n + a^mc^n \qquad m \ge n \ge p \ge 0$

$III(m,n,p) = a^mb^nc^p + a^mb^pc^n + b^ma^nc^p + b^ma^pc^n + c^ma^nb^p + c^ma^pb^n$

Tuy nhiên, nhận xét rằng

- III có thể biễu diễn qua II cùng với abc như sau: $C = (abc)^p II(m-p, n-p)$
- II có thể biễu diễn qua I như sau: $II = I(m)I(n) - I(m+n)$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh I có thể biễu diễn qua $abc, ab+bc+ca, a+b+c$. Ta sẽ chứng minh điều này bằng phương pháp quy nạp:

Với $n = 0,1$, mệnh đề đã cho hiển nhiên đúng.

Giả sử ta đã chứng minh được $I(k)$ có thể biễu diễn thành đa thức thông qua các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c, \forall k \le K$. Nhận xét rằng điều này cũng đúng đối với $II(m,n)$ và $III(m,n,p)$ $\forall m \ge n \ge p \ge 0 : m+n \le K$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh tính biễu diễn của $I(K+1)$. Ta có:

$I(K+1) = (a+b+c)I(K) - II(K,1)$

Đồng thời: $II(K,1) = (ab+bc+ca)I(K-1) - III(K-1,1,1)$.

Do đó: $I(K+1) = (a+b+c)I(K) - (ab+bc+ca)I(K-1) + III(K-1,1,1)$.

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, các biểu thức $I(K), I(K-1), III(K-1,1,1)$ đều có thể biễu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$. Điều này cho ta kết luận tính đúng đắn của mệnh đề đã nêu

Như vậy, mệnh đề đã nêu đã được chứng minh thông qua nguyên lý quy nạp.

Tính chất $\deg(abc) \le \dfrac{\deg(f)}{3}$ được suy ra khá hiển nhiên, bởi lẽ biễu thức abc có bậc là 3 đối với các biến a,b,c. Do đó khi coi abc là một biến bậc 1 thì bậc của abc phải không lớn hơn $\dfrac{1}{3}$ so với bậc của đa thức tính theo các biến a,b,c

Bạn đọc có thể hiểu đa thức tính theo bậc của abc như sau. Giả sử:
$f(a,b,c)=(a+b+c)abc+ab+bc+ca$ vốn là một đa thức bậc 4 theo a,b,c. Nhưng khi tính bậc của đa thức theo biến abc, ta xem $a+b+c$ và $ab+bc+ca$ như các hằng số m,n. Khi đó đa thức được viết lại là: $f(a,b,c)=g(abc)=mabc+n$ là đa thức bậc nhất theo biến abc.

Thông qua hai bài toán trên, chúng ta đã có đầy đủ các kết quả cần thiết (background) để bước vào thế giới ABC, Abstract Concreteness. **J**

ABC Theorem

Định lý 1: Nếu $f(abc,ab+bc+ca,a+b+c)$ là hàm đơn điệu trên R theo abc thì cực đại và cực tiểu xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Định lý 2: Nếu $f(abc,ab+bc+ca,a+b+c)$ là hàm lồi trên R theo abc cực đại xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Định lý 3: Nếu $f(abc,ab+bc+ca,a+b+c)$ là hàm lõm trên R theo abc cực tiểu xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập R^+ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

<u>Chứng minh:</u>
Cả ba định lý trên đều được chứng minh thông qua nhận xét ii).
<u>Định lý 1:</u>

- Với mỗi bộ số $(a_0,b_0,c_0)\in R^3$ đều tìm được hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ sao cho
  $*a_0+b_0+c_0=x_0+x_0+y_0=z_0+z_0+t_0$
  $*a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0=z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0$
  $*x_0x_0y_0\le a_0b_0c_0\le z_0z_0t_0$
  Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0,b_0,c_0) bằng nhau.
- Với mỗi bộ số thực không âm (a_0,b_0,c_0) ta đều tìm được một trong hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ hoặc $(0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)$ thõa mãn điều kiện sau

$*a_0+b_0+c_0=x_0+x_0+y_0=z_0+z_0+t_0$
$*a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0=z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0 (1)$
$*x_0x_0y_0\le a_0b_0c_0\le z_0z_0t_0$
Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0,b_0,c_0) bằng nhau.
Hay

$* a_0 + b_0 + c_0 = 0 + x_0 + y_0 = z_0 + z_0 + t_0$

$* a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0 = x_0 y_0 = z_0 z_0 + z_0 t_0 + t_0 z_0 (2)$

$* 0 \le a_0 b_0 c_0 \le z_0 z_0 t_0$

Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba biến (a_0, b_0, c_0) bằng 0.

- *Cách 1: (Direct Proof)*

Do f là hàm đơn điệu theo biến $a_0 b_0 c_0$ nên hàm số đạt cực đại hay cực tiểu tại các điểm biên của $a_0 b_0 c_0$, hãy giả sử f tăng và ta cần tìm cực đại (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự), ta có

$$f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) \le$$
$$f(z_0 z_0 t_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(z_0 z_0 t_0, z_0 z_0 + z_0 t_0 + z_0 t_0, z_0 + z_0 + t_0)$$

Vậy nên cực đại xảy ra khi có hai biến bằng nhau.

Trong trường hợp $a, b, c \in R^+$, đối với trường hợp tăng tìm cực đại, ta chứng minh hoàn toàn tương tự như trên. Trong trường hợp tăng và tìm cực tiểu (trường hợp giảm cũng chứng minh tương tự), khi cố định $a + b + c, ab + bc + ca$ thì không phải lúc nào abc cũng đạt được cực tiểu khi có hai biến bằng nhau mà đôi khi là khi có một biến bằng 0. Do đó:

$$f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) \ge$$
$$f(x_0 x_0 y_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(x_0 x_0 y_0, x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0, x_0 + x_0 + y_0)$$

hoặc

$$f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) \ge$$
$$f(0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(0, x_0 y_0, x_0 + x_0)$$

Vậy nên cực tiểu sẽ xảy ra khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.
Kết hợp mọi trường hợp ta rút ra kết luận như định lý 1.

- *Cách 2: (Contradiction Proof)*

Ta cũng chứng minh cho trường hợp tăng tìm cực đại. Giả sử hàm số đạt cực đại tại điểm (a_0, b_0, c_0) trong đó a_0, b_0, c_0 khác nhau từng đôi một và cực đại là M. Tuy nhiên lại tồn tại một bộ (z_0, z_0, t_0) thoã mãn:

$$M = f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) <$$
$$f(z_0 z_0 t_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(z_0 z_0 t_0, z_0 z_0 + z_0 t_0 + z_0 t_0, z_0 + z_0 + t_0)$$

Điều vô lý này cho phép ta kết luận cực đại xảy ra khi có hai biến bằng nhau

Trong trường hợp $a, b, c \in R^+$, ta lại xét trường hợp tăng và tìm cực tiểu, nếu như hàm số đạt cực tiểu tại điểm (a_0, b_0, c_0) trong đó a_0, b_0, c_0 khác nhau từng đôi một và không có biến nào bằng 0, đặt cực đại là M. Một trong hai trường hợp sau xảy ra:

$$M = f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) >$$
$$f(x_0 x_0 y_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(x_0 x_0 y_0, x_0 x_0 + x_0 y_0 + y_0 x_0, x_0 + x_0 + y_0)$$
$$M = f(a_0 b_0 c_0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 b_0 c_0) >$$
$$f(0, a_0 b_0 + b_0 c_0 + c_0 a_0, a_0 + b_0 + c_0) = f(0, x_0 y_0, x_0 + x_0)$$

Điều vô lý này cho phép ta kết luận cực đại xảy ra khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

Định lý 2 và 3 được chứng minh tương tự với các tính chất của hàm lồi và lõm, hàm số lồi đạt cực đại , hàm số lõm đạt cực tiểu khi biến đạt các giá trị ở biên. Chi tiết của chứng minh xin nhường lại cho bạn đọc.

Từ các kết quả trên ta rút ra được một số hệ quả lí thú sau:

ABC Consequence

Hệ quả 1: Hàm số $f\left(a+b+c, ab+bc+ca, abc\right)$ là một đa thức bậc nhất theo abc đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 2: Hàm số $f\left(a+b+c, ab+bc+ca, abc\right)$ là một tam thức bậc hai theo abc và hệ số bậc cao nhất dương đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 3: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 4: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 8 có hệ số của $a^2b^2c^2$ trong biểu diễn qua dạng $f\left(abc, ab+bc+ca, a+b+c\right)$ không âm đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Chứng minh:

Hệ quả 1:

Đa thức bậc nhất $mx+y$ là hàm đơn điệu. Do đó, theo định lý 1 hàm $f\left(a+b+c, ab+bc+ca, abc\right)$, là đa thức bậc nhất theo abc, đơn điệu nđạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 2:

Tam thức bậc hai với hệ số dương m^2x^2+nx+p là hàm lồi trên đoạn liên tục. Do đó theo định lý 2 thì đối với hàm số $f\left(a+b+c, ab+bc+ca, abc\right)$, là một tam thức bậc hai theo abc và hệ số bậc cao nhất dương, tức là một hàm lồi nên đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Hệ quả 3:

Theo bài toán số 2, đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 có thể biễu diễn thành đa thức $f\left(a+b+c, ab+bc+ca, abc\right)$ và là đa thức bậc nhất theo abc (do $\deg(abc) \le \frac{\deg\left(f\right)}{3} = \frac{5}{3}$ suy ra $\deg\left(abc\right) = 1$). Do đó theo hệ quả 1 đa thức đạt cực đại và cực tiểu trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0

Hệ quả 4:

Theo bài toán số 2, đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 có thể biễu diễn thành đa thức $f\left(a+b+c, ab+bc+ca, abc\right)$ và là tam thức bậc hai theo abc (do $\deg(abc) \le \frac{\deg\left(f\right)}{3} = \frac{8}{3}$ suy ra $\deg\left(abc\right) = 2$), hơn nữa hệ số của $a^2b^2c^2$ lại không âm nên theo hệ quả 3 ta đi đến kết luận âm đa th ức đạt cực đại trong tập R khi có hai biến bằng nhau, trong tập R^+ khi có hai biến bằng nhau hay một số bằng 0.

Các hệ quả trên thật sự là những vũ khí rất lợi hại. Với chúng, ta **có thể tóm gọn một phần rất lớn các bất đẳng thức đối xứng ba biến** , vốn là một thể loại vẫn thường xuyên được ra trong các kì thi học sinh giỏi hiện nay.

C. ABC và Ứng dụng

Bây giờ chúng ta hãy xét qua một số ví dụ cụ thể xem phương pháp này được vận dụng ra sao nhé J

> Bài 1 [Sưu Tầm]
> Cho $x, y, z \in R$ thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
> Tìm giá trị lớn nhất của $P = 2(x + y + z) - xyz$

Giải:
P đã ở sẵn trong dạng $f(x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$, và điều kiện đối xứng không ràng buộc xyz mà chỉ phụ thuộc vào $x + y + z, xy + yz + zx$ (*). Vậy nên ta có thể đưa bài tóan về việc giải quyết:
Cho $2a^2 + b^2 = 9$
Tìm giá trị lớn nhất của $P = 4a + 2b - a^2 b$
Để tìm giá trị lớn nhất ta thay $a = \sqrt{\frac{9 - b^2}{2}}$ vào P, và cần tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = f(b) = 2\sqrt{2(9 - b^2)} + 2b - \frac{b(9 - b^2)}{2}$$

$$f'(b) = \frac{-4b}{\sqrt{2(9 - b^2)}} - \frac{5}{2} + \frac{3b^2}{2} = 0 \Rightarrow 9b^6 - 87b^2 + 87b - 9 = 0 \Leftrightarrow (b^2 - 1)(9b^4 - 78b^2 + 9) = 0$$

Thay các nghiệm của phương trình đạo hàm bằng 0 vào f và ta nhận được $f_{\max} = 10$ khi $a = 2, b = -1$.
(*) Lý luận này có thể giúp ta áp dụng ABC có thể được giải thích theo hai cách như sau:

- Trong ABC, ta chỉ quan tâm đến abc, còn $ab + bc + ca, a + b + c$ ta coi như các hằng số. Do đó chúng bị rang buộc như thế nào cũng không quan trọng
- Chúng ta có thể chuẩn hoá bài toán thành: Tìm giá trị lớn nhất của:
  $P = \frac{6(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - 27xyz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$, đây vẫn là một đa thức bậc nhất nếu tính theo biến abc, do $x^2 + y^2 + z^2$ cũng là hằng khi $xy + yz + zx, x + y + z$ là hằng.

> Bài 2 [Nguyễn Anh Cường]
> Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:
>
> $$i) \frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2}$$
>
> $$ii) \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} + \frac{1}{4} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc} \right)^2$$

Giải:

i) Bất đẳng thức của chúng ta rõ ràng có thể viết được dưới dạng đa thức đối xứng bậc 5

$$P = abc(a^2+b^2+c^2)+\frac{2}{3}(a^3+b^3+c^3)-(a^3+b^3+c^3)(ab+bc+ca) \ge 0$$

Và ta chỉ cần xét cực tiểu khi có hai giá trị trong ba biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử $a=c$ bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3}+\frac{2}{3} \ge \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{2a^2+b^2}-\frac{2a+b}{3(2a^3+b^3)}\right] \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^4(a+b) \ge 0.$$

Trường hợp có một số bằng 0, giả sử là c, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{3} \ge \frac{ab}{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2+3(a-b)^2 \ge 0.$$

ii) Một đa thức đối xứng bậc bảy, nhưng các bạn đừng lo, đó vẫn là đa thức bậc một đối với abc J, do đó theo ta lại có thể áp dụng ABC trong trường hợp này. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử $a=c$ bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2a^3+b^3}{4a^2b}+\frac{1}{4} \ge \left(\frac{2a^2+b^2}{a^2+2ab}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2a^3+b^3}{4a^2b}-\frac{3}{4}\right) \ge \left(\frac{2a^2+b^2}{a^2+2ab}\right)^2-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(2a+b)}{4a^2b} \ge \frac{(a-b)^2(3a^2+b^2+2ab)}{(a^2+2ab)^2}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\left((2b-a)^2+a^2\right)\right] \ge 0$$

Trường hợp có một biến bằng 0, bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng.

Bài 3 [Iran Olympiad 1996]

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với các số thực dương a,b,c

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \ge \frac{9}{4}$$

Bài tóan Iran 96 nổi tiếng, một đa thức đối xứng bậc 6 và là bậc hai đối với abc (**):

$$9[(a+b)(b+c)(c+a)]^2-4(ab+bc+ca)\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right] \le 0$$

Vậy nên hàm số đạt cực đại khi có hai giá trị bằng nhau hay một số bằng 0.

Trường hợp có hai biến bằng nhau, bất đẳng thức tương đương với

$$(a^2+2ab)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{2}{(a+b)^2}\right) \ge \frac{9}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{2a+b}{2a(a+b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right] \ge 0 \Leftrightarrow b(a-b)^2 \ge 0$$

Trường hợp có một biến bằng nhau, giả sử là c, bất đẳng thức tương đương với:

$$ab\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \ge \frac{9}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{4(a+b)^2}\right] \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(4a^2+4b^2+7ab) \ge 0$$

(**) Tại sao ta có thể kết luận được điều này từ đa thức vừa chuyển thành. Thứ nhất:

$4(ab+bc+ca)\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right]$chỉ chứa abc bậc 1, vì tuy đa thức này là bậc 6, nhưng thực sự ta chỉ cần xét bậc của abc trong $\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right]$, vốn là một đa thức bậc 4.
Còn biểu thức $9[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$ cũng vốn là một đa thức bậc 6, tuy nhiên $(a+b)(b+c)(c+a)$ chỉ chứa nhiều nhất là abc bậc 1, bình phương lên thì hệ số của $a^2b^2c^2$ là không âm.
Như vậy, đôi khi ta không cần khai triển toàn bộ dang biểu thức như thế nào, ta chỉ cần lý luận được hệ số của $a^2b^2c^2$ là đủ để áp dụng định lý ABC.

Bản chất của phương pháp là đánh giá abc, vậy nên việc gặp những bài tóan có bậc đẹp đẽ như vậy là một điều tốt đẹp nhưng không phải lúc nào cũng như vậy, thế nên thủ sẵn các biến đổi sau để đánh giá hàm số theo abc là một điều cần thiết.
MOT SO DANG THUC
Để thuận tiện trong những phần tiếp theo, ta quy ước $a=x+y+z, b=xy+yz+xz, c=xyz.$
Ta sẽ xét qua các đại luợng hoán vị vòng quang của các biến x,y,z sẽ được biễu diễn qua các đại lượng trên ra sao.

$$x^2+y^2+z^2=a^2-2b$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=ab-3c$$

$$xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)=a^2b-2b^2-ac$$

$$x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c$$

$$x^4+y^4+z^4=a^4-2a^2b+2b^2+4ac$$

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}=\frac{ab-3c}{c}$$

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=b^2-2ac$$

$$(xy)^3+(yz)^3+(zx)^3=b^3-3abc+3c^2$$

$$(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)=9c^2+(a^3-6ab)c+b^3$$

Dưới đây xin cung cấp cho các bạn một số đánh giá về a,b,c trong các miền khác nhau:
Định lý 1:
Phương trình bậc ba có các nghiệm thực x,y,z khi và chỉ khi $-27c^2+(18ab-4a^3)c+a^2b^2-4b^3\geq 0(1)$
Định lý 2:
Phương trình bậc ba có các nghiệm thực dương x,y,z khi và chỉ khi có (1) và $a>0,b>0,c>0$
Định lý 3:
Phương trình bậc ba có các nghiệm là ba cạnh tam giác khi và chỉ khi có $(1),(2)$ và $a^3-4ab+8c>0.$

Các hệ quả đã nêu tuy hữu hiệu nhưng vẫn còn gặp nhiều hạn chế.
Sau đây một số ví dụ ta không thể làm trực tiếp từ các hệ quả đã nêu mà phải nhờ vào một số biến đổi hay các định lý đã nêu.

<u>Bài 1 [Russia Olympiad 2005]:</u>
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn:
$a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ac}+\frac{c}{c^3+ab}\geq 3$$

Một bất đẳng thức đối xứng, điêu kiện không ràng buột abc, việc đưa về đa thức đối xứng là dễ dàng, tuy nhiên lại lên tới bậc 9, và là bậc ba theo abc L. Điều này nằm ngòai kiểm sóat của các hệ quả, vậy nên ta phải có chút thủ thuậ biến đổi nho nhỏ.

Đặt $x=\frac{bc}{a}; y=\frac{ac}{b}; z=\frac{ab}{c}$. Bất đẳng thức tương đương với:

$xy+yz+xz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xy+z}+\frac{1}{yz+x}+\frac{1}{zx+y}\ge 3(*)$$

Bây giờ thì mọi chuyện trở nên dễ dàng rồi, một đa thức bậc hai theo xyz với hệ số bậc cao nhất không âm, và ta cần tìm cực đại. Ta chỉ cần xét các trường hợp khi có hai biến bằng nhau, hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x=z$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{xy+x}+\frac{1}{x^2+y}\ge 3 \text{ với } 2xy+x^2=1.$$

Thay $y=\frac{1-x^2}{2x}$, và ta cần chứng minh $\frac{2}{\frac{1-x^2}{2}+x}+\frac{1}{x^2+\frac{1-x^2}{2x}}\ge 3, x\in[0,1]$. Điều này không quá khó khăn và các bạn sẽ có thể giải quyết dễ dàng.

Trường hợp 2: $z=0$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 3 \text{ với } xy=1.$$

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{xy}=3$.

__Bài 2 [Nguyễn Anh Cường]:__

Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}+\sqrt{\frac{2(xy+yz+xz)}{x^2+y^2+z^2}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Giấc mộng đưa về dạng đa thức đối xứng coi như tan vỡ. Ta đành đánh giá trực tiếp theo hàm đối với biến xyz. Vẫn với quy ước $a=x+y+z, b=xy+yz+zx, c=xyz$, sử dụng các hằng đẳng thức đã nếu ở trên ta biến bất đẳng thức về dạng:

$$\sqrt{\frac{a^4-2a^2b+2b^2+4ac}{b^2-2ac}}+\sqrt{\frac{2b}{a^2-2b}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Hàm theo c là hàm bậc nhất nên đơn điệu. Theo định lý một, cực tiểu xảy ra khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x=z$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{2x^4+y^4}{x^4+2x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2(x^2+2xy)}{2x^2+y^2}}\ge 1+\sqrt{2}$$

Do tính thuần nhất của bất đẳng thức này nên ta có thể giả sử $x=1$, khi đó ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{y^4+2}{2y^2+1}}-1 \ge \sqrt{2}-\sqrt{\frac{2(2y+1)}{y^2+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y^2-1)^2}{2y^2+1+\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)}} \ge \frac{\sqrt{2}(y-1)^2}{y^2+2+\sqrt{(y^2+2)(2y+1)}}$$

Ta có thể đánh giá các mẫu số một cách nhẹ nhàng nhưng vẫn đảm bảo tính đúng đắn của dấu lớn hơn hoặc bằng sau khi đánh giá như sau:

$$\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)} \le \sqrt{2}y^3+\sqrt{2} \Rightarrow 2y^2+1+\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)} \le 2y^2+1+\sqrt{2}y^3+\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{(y^2+2)(2y+1)} \ge y+\sqrt{2} \Rightarrow y^2+2+\sqrt{(y^2+2)(2y+1)} \ge y^2+y+2+\sqrt{2}$$

Do đó công việc còn lại của chúng ta là chứng minh:

$$\frac{(y+1)^2}{\sqrt{2}y^3+2y^2+\sqrt{2}+1} \ge \frac{\sqrt{2}}{y^2+y+2+\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow y^4+y^3+\left(5-\sqrt{2}\right)y^2+\left(5+2\sqrt{2}y \ge 0\right)$$

Trường hợp 2: $z=0$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}} \ge 1+\sqrt{2}$$

Ta có: $x^4+y^4 \ge \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2} \ge 2x^2y^2$, do đó:

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}} \ge 1+\sqrt{2} \ge \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}}\right)$$

$$\ge \sqrt{2}-1+2\sqrt[4]{\frac{x^2+y^2}{2xy}} \ge 1+\sqrt{2}$$

Cuối cùng dưới đây là một số bài tập để các bạn làm quen với phương pháp này:

<u>Bài tập áp dụng</u>

<u>Bài 1 [Sưu tầm]:</u>

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab} \ge \frac{6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

<u>Bài 2:[Darij Grinberg- Old and New Inequality]</u>

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}$$

<u>Bài 3: [Mircea Lascu – Old and New Inequality]</u>

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

<u>Bài 4:[Vietnam TST, 1996]</u>

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a,b,c

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \ge \frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

Bài 5:[Nguyễn Anh Cường]

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}}+2\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \ge \sqrt{6}+2$$

D.ABC Upgrade

Như vậy là chúng ta đã phần nào lướt qua sức mạnh của phương pháp này, hy vọng các bạn thấy thích thú với những gì tôi đã trình bày. Trong các phần sau, tôi sẽ lần lượt lướt qua các điểm yếu của phương pháp này và lần lượt giải quyết chúng một cách đáng kể nhất.Việc ngày càng nâng cấp phương pháp vẫn còn là một vấn đề đang được phát triển, chúng tôi rất hoan nghênh các ý tưởng của các bạn về việc nâng cấp phương pháp.

Như các bạn đã thấy, đối với các bài toán bất đẳng thức có sự ràng buột giữa các biến a,b,c, nếu sự rang buột này chỉ liên quan đến $a+b+c$ và $ab+bc+ca$ thì định lý ABC sẽ có cơ hội phát huy sức mạnh. Thế nhưng đối với những bài toán mà bản thân abc bị ràng buột thì sao. Với ý tưởng như vậy, chúng ta sẽ nâng cấp định lý ABC để định lý này có khả năng đối phó với những bài toán thuộc những dạng trên.

ABC Upgrade

i) Cho a,b,c đồng thời là các số thực hoặc là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng $abc, a+b+c$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $ab+bc+ca$ sẽ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

ii) Cho a,b,c đồng thời là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng $abc, ab+bc+ca$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $a+b+c$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Chứng minh

i) Giả sử $a+b+c=1$ và $abc=m$ (trường hợp $a+b+c=n$ có thể đưa về trường hợp này một cách dễ dàng bằng cách đặt $a=nx, b=ny, c=nz$, bạn đọc cũng đã được xem qua kỹ thuật này trong phần chứng minh định lý ABC ở các phần trên.). Ta sẽ chứng minh $ab+bc+ca$ đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau trong cả hai trường hợp $a,b,c \in R$ và $a,b,c \in R^+$. Đặt $ab+bc+ca=S$
Một lần nữa, ta lại đưa về bài toán tồn tại nghiệm của phương trình:

Đặt $f(X)=X^3-X^2+SX-m$

Ta có: $f'(X)=3X^2-2X+S$ .Phương trình có hai nghiệm

$$X_1=\frac{1+\sqrt{1-3S}}{3}; X_2=\frac{1-\sqrt{1-3S}}{3}$$

Phương trình có ba nghiệm khi và chỉ khi $f(X_2)\ge 0$, $f(X_1)\le 0$.

Ta có : $f(X_2)\ge 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_2+S-9m\ge 0$, giả sử có tập nghiệm là R_{X_2}

$f(X_1)\le 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_1+S-9m\le 0$, giả sử có tập nghiệm là R_{X_1}

Trước tiên ta sẽ chứng minh cho trường hợp $a,b,c\in R$.

Gọi $S_{\min}, S_{\max}$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trong tập $R_{X_1} \cap R_{X_2}$ (giao của hai tập này khác rỗng, nêu không phương trình không có nghiệm với mọi giá trị của S). Nhận xét rằng hai giá trị này là nghiệm của một trong hai phương trình $(6S-2)X_1 + S - 9m = 0$ hay $(6S-2)X_2 + s - 9m = 0$ (các giá trị này chắc chắn tồn tại, nếu không thì phương trình bậc 3 sẽ có nghiệm khi S chạy tới cộng vô cùng hoặc âm vô cùng), khi đó ta sẽ có $S_{\min} \le S \le S_{\max}$. Bây giờ ta sẽ kiểm tra khi S đạt một trong hai giá trị này thì liệu có tồn tại ba số thực a,b,c không và hình thù của a,b,c sẽ ra sao.
Điều đầu tiên là rõ ràng, vì $S_{\min}, S_{\max} \in R_{X_1} \cap R_{X_2}$. Điều thứ hai, do $S_{\min}, S_{\max}$ là nghiệm của một trong hai phương trình $(6S-2)X_1 + S - 9m = 0$ hay $(6S-2)X_2 + s - 9m = 0$, nên hoặc là $f(X_1) = 0$, hoặc là $f(X_2) = 0$. Khi này phương trình bậc ba đã cho sẽ có nghiệm kép, hay nói cách khác, lúc này hình thù của (a,b,c) là (x,x,y)

Bây giờ ta sẽ chứng minh cho trường hợp $a,b,c \in R^+$. Trước hết ta cần phải có $m \ge 0$. Nhận xét rằng $0 \notin R_{X_1} \cap R_{X_2}$, vì không tồn tại các số thực a,b,c thoả mãn $a+b+c=1, ab+bc+ca=0, abc \ge 0$. Điều này có nghĩa là $R_{X_1} \cap R_{X_2}$ tách biệt thành các khoản mà các cận là cùng âm hoặc cùng dương. Gọi R_3 là tập $R_{X_1} \cap R_{X_2}$ bỏ đi các đoạn âm. Gọi $S_{\min}, S_{\max}$ là các giá trị nhỏ nhất và nhỏ nhất trong tập R_3 này. Và ta lại có: $S_{\min} \le S \le S_{\max}$. Lý luận tương tự như trường hợp R, ta cũng sẽ suy ra được khi S chạm các biên này thì hai trong ba biến (a,b,c) là bằng nhau.

ii) Bạn đọc có thể dễ dàng suy ra chứng minh cho định lý ABC Upgrade 2 sau khi đã xem qua chứng minh 1. Tuy nhiên đối với $a+b+c$ thì không có rang buộc về cận trên khi $a,b,c \ge 0$. Tuy nhiên sẽ có cận dưới do $a+b+c$ đã bị chặn dưới bởi 0. Do đó nên trong trường hợp này chỉ tồn tại $S_{\min}$, cũng vậy, khi này ta đi tới kết luận $a+b+c$ đạt giá trị nhỏ nhất khi hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Các bạn có thể thấy tư tưởng trừu tượng sự cụ thể (abstract concreteness) rõ rang hơn trong chứng minh trên. Chúng ta không cần biết giá trị nhỏ nhất của $ab+bc+ca$ hay $a+b+c$ cụ thể là bao nhiêu nhưng vẫn có thể chứng minh được khi đạt được giá trị này thì hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Chúng ta sẽ lướt qua một số ví dụ để xem cách áp dụng của định lý ABC Upgrade này như thế nào:
<u>*Bài 1: [Hojoo Lee]*</u> Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $abc \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$1 \ge \frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a}$$

<u>Giải:</u>
Nhận xét rằng hàm số bên phải giảm khi biến a tăng. Do đó chúng ta chỉ cần chứng minh khi $abc = 1$ (đối với trường hợp , $abc = k \ge 1$, ta có:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{1+\frac{a}{k}+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+\frac{a}{k}} \le 1)$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$f(a,b,c) = (1+a+b)(1+b+c)(1+c+a) - (1+a+b)(1+b+c) - (1+b+c)(1+c+a) - (1+c+a)(1+a+b) \ge 0$$

Nhận xét rằng bậc của đại lượng $ab+bc+ca$ trong $f(a,b,c)$ chỉ là bậc 1 ($f(a,b,c)$ chỉ là bậc 3 theo a,b,c). Vậy nên khi cố định $a+b+c$ thì $f(a,b,c)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $ab+bc+ca$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi này hai trong ba biến a,b,c bằng nhau. Ta đưa về bài toán:
Cho các số thực dương x,y thoã mãn: $x^2 y = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{2}{1+x+y}\le 1.$$

Thay $y=\frac{1}{x^2}$ vào bất đẳng thức và ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{2}{1+x+\frac{1}{x^2}}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{2(x-1)^2x(x+1)}{3(1+2x)(x^3+x^2+1)}\le 0$$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

<u>*Bài 2: [Sưu Tầm]*</u>: Cho các số thực dương a,b,c thoã mãn: $a+b+c=3abc$ .Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

<u>*Bài 3 [Bùi Việt Anh]:*</u> Cho các số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}+2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge 2$$

<u>Giải:</u>

Đối với bài toán này thì dù có cố định hai đại lượng nào đi nữa thì chúng ta đều sẽ không thu được một hàm số tốt với biến còn lại (tốt ở đây ngụ ý lồi, lõm hay đơn điệu). Tuy nhiên ở đây, ta sẽ thấy được sự liên hệ giữa hai đại lượng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{b+a}$ và $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, chúng là tổng và tích của các đại lượng $\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$. Như vậy chúng ta hãy thử chuyển biến theo hướng này xem.

Đặt $x=\frac{a}{b+c},y=\frac{b}{c+a},z=\frac{c}{b+a}$, vấn đề là mối liên hệ của x,y,z thế nào. Ở đây tôi xin đưa ra mối quan hệ, và với mối quan hệ này chúng ta có thể tìm ngược trở lại a,b,c. Và từ đó ta cũng sẽ có bài toán tương đương sau:

Cho $x,y,z\ge 0$ thoã mãn: $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=2\Leftrightarrow 2xyz+xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$x+y+z+2\sqrt{xyz}\ge 2$.

Như vậy ta sẽ cố định xyz và $xy+yz+zx$ đưa về bài toán sau:

Cho $a,b\ge 0$ thỏa mãn: $2a^2b+a^2+2ab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $2a+b+2a\sqrt{b}$.

Thay $b=\frac{1-a^2}{2a^2+2a}=\frac{1-a}{2a}(a\le 1)$, ta cần chứng minh:

$2a+\frac{1-a}{2a}+\sqrt{2a(1-a)}\ge 2$. Thực vậy, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{1-a}{2a}+\sqrt{\frac{2a}{1-a}}(1-a)\ge 2(1-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a}+\sqrt{\frac{2a}{1-a}}\ge 2$$

Mặt khác $\sqrt{\frac{2a}{1-a}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{(1-a)a}} \ge \frac{\sqrt{2}a}{\frac{1-a+a}{2}} \ge 2\sqrt{2}a$.

Do đó: $\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}} \ge \frac{1}{2a} + 2\sqrt{2}a \ge 2\sqrt{\frac{1}{2a}2\sqrt{2}a} = 2\sqrt[4]{2} \ge 2$.

Tóm lại bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

Cuối cùng, một phần rất quen thuộc và không nên thiếu, đó là phần bài tập cho các bạn áp dụng:

Bài 1:[Sưu tầm]

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y+z}{3} + \sqrt[3]{xyz} \ge \frac{2}{3}\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}\right)$$

Bài 2: [Sưu tầm]

Cho các số thực dương a,b,c thoã mãn: $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \ge 1$$

Bài 3: [Nguyễn Anh Cường]

Cho các số thực dương a,b,c thoã mãn: $(a+b)(b+c)(c+a) = 8$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:

$$P = \sqrt{abc} + \sqrt{a+b+c}$$

E.Mở ô cửa đóng

Trong phần này, tôi sẽ xét qua một lớp các bài toán mà các biến bị chặn trong các tập đóng, vốn là một vấn đề còn chưa được phát triển trong các phần về định lý ABC đã nói ở trên. Đối với lớp bài toán này, chúng ta cũng có một phương pháp khác để giải quyết. Tôi sẽ giới thiệu về phương pháp này trước, sau đó sẽ chúng ta sẽ nghiên cứu về cách ứng dụng ABC trong các bài toán này sau:

Bài toán:

Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$. Chứng minh rằng $f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge C$ trong đó a,b,C là các hằng số cho trước.

Gặp những tình huống như thế này, dấu bằng của bất đẳng thức thường xảy ra tại các giá trị biên, nghĩa là bằng a hay b. Trong những trường hợp như vậy, ta sẽ cố gắng chứng minh $f(x_1, x_2, ..., x_n) \ge \min\{f(a, x_2, ..., x_n), f(b, x_2, ..., x_n)\}$. Cuối cùng ta sẽ thu được giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được khi một số giá trị bằng a và các giá trị còn lại bằng b. Phương pháp này gọi là phương pháp tiếp cận dấu bằng. Ta sẽ lướt qua một số ví dụ sau:

Bài 1 [Thi đội tuyển toán trường THPT Năng Khiếu]

Cho $a,b,c \in [0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f(a,b,c) = a+b+c-ab-bc-ca$$

Ta sẽ chứng minh $f(a,b,c) \le \max\{f(0,b,c), f(1,b,c)\}(*)$. Ta có chứng minh trực tiếp bằng phương pháp đại số như sau: $(f(a,b,c)-f(0,b,c))(f(a,b,c)-f(1,b,c)) = c(c-1)(1-a-b)^2 \le 0$, từ đó suy ra $(*)$
Hay bằng một cái nhìn giải tích, ta có thể suy ra nhanh chóng hơn với nhận xét hàm số đơn điệu theo biến a. Và từ đó trực tiếp suy ra $(*)$.
Hoàn toàn thực hiện những bất đẳng thức tương tự đối với các biến b,c, ta sẽ suy ra tính chất sau:
$f(a,b,c) \le \max\{\mathrm{f}(0,0,0);\mathrm{f}(0,0,1);\mathrm{f}(0,1,1);\mathrm{f}(1,1,1)\}$. Từ đây có thể dễ dàng kết luận giá trị lớn nhất của $f(a,b,c)$ là 1. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như: $a=b=0, c=1$.

Bài 2 [Nguyễn Anh Cường]
Cho $x,y,z \in [1,2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$C = \frac{xy}{xz+yz} + \frac{xz}{xy+yz} + \frac{yz}{xy+xz}$$

Đối với bài toán này, nếu ta áp dụng ngay việc chứng minh $C(x,y,z) \le \max\{C(1,y,z), C(2,y,z)\}$ thì sẽ gặp khá nhiều khó khăn. Ở đây chúng ta sẽ áp dụng một mẹo nhỏ để làm cho công việc này tương đối đơn giản hơn:

$$C = f(x,y,z) = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}$$

. Đến đây các bạn cũng có thể đoán được chúng ta sẽ làm gì tiếp theo. Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}; a,b,c \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ và ta cần tìm giá trị lớn nhất của:

$$g(a,b,c) = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Ta xẽ coi như b,c là các hằng số, và a là biến : $g''(a,b,c) = \frac{2b}{(c+a)^3} + \frac{2c}{(b+a)^3} > 0$. Như vậy g là hàm lồi theo biến a, tức là g đạt giá trị lớn nhất khi a chạm các biên.
Từ đây ta suy ra được điều mong muốn: $g(a,b,c) \le \max\{g(1,b,c), g(2,b,c)\}$.
Hoàn toàn thực hiện những bất đẳng thức tương tự đối với các biến b,c, ta sẽ suy ra tính chất sau:
$g(a,b,c) \le \max\left\{g(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}); g(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}); g(1,1,\frac{1}{2}); g(1,1,1)\right\}$. Từ đây có thể dễ dàng suy ra giá trị lớn nhất của g là $\frac{19}{12}$, đạt được khi $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$, hay giá trị lớn nhất của f là $\frac{19}{12}$, đạt được khi $(x,y,z) = (2,1,1)$.

Như vậy qua hai ví dụ các bạn cũng đã có thể phần nào làm quen được với phương pháp này. Ở đây tôi sẽ nêu ra một phương pháp khác, chứng minh dựa vào định lý ABC.
Trong các phần trên, ta thấy rằng ABC chí áp dụng được khi các biến chạy hoàn toàn trong R hoặc R^+, vậy nên muốn áp dụng ABC, ta phải kéo dãn đoạn đã cho thành R hoặc R^+.

Bài 1 [Thi đội tuyển toán trường PTNK]
Cho $a,b,c \in [0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của:
$f(a,b,c) = a+b+c-ab-bc-ca$

Ta quay lại bài toán này, ta sẽ tìm cách kéo giãn đoạn $[0,1]$ thành R^+. Nhận xét nếu nghịch đảo $a \to \frac{1}{a}$, ta thu được bộ số nằm trong đoạn $[1,+\infty]$. Vẫn chưa biến thành R^+ được, ta lại tiếp tục trừ bộ số cho 1 $\frac{1}{a} \to \frac{1}{a} - 1$ và ta sẽ thu được bộ số nằm trong đoạn $[0,+\infty]$. Như vậy ta đã chuyển $a \to \frac{1}{a} - 1 = x$ để kéo $[0,1] \to [0,+\infty]$.

Từ những ý tưởng như trên, ta sẽ đi tới lời giải sau:

Đặt $a = \frac{1}{1+x}, b = \frac{1}{1+y}, c = \frac{1}{1+z}$ trong đó $x, y, z \in R^+$. Biểu thức đã cho trở thành:

$$f(a,b,c) = g(x,y,z) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+x)(1+y)} - \frac{1}{(1+y)(1+z)} - \frac{1}{(1+z)(1+x)}$$

$$= \frac{(1+y)(1+z) + (1+z)(1+x) + (1+x)(1+y) - 3 - x - y - z}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$= \frac{xy + yz + zx + x + y + z}{xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1}$$

Đến đây bạn đọc cũng có thể dễ dàng thấy $g(x,y,z) \le 1$, không cần áp dụng thêm định lý ABC nữa, tuy nhiên biểu thức này chúng ta đã có thể áp dụng ABC một cách dễ dàng để đưa về trường hợp hai biến.

Có hai lợi thế khi chúng ta kéo dã một tập đóng thành tập R^+ như thế này, thứ nhất là ta có thể áp dụng được định lý ABC như trong trường hợp ở trên, thứ hai là ta có thể đánh giá được dễ dàng hơn, vì ở đây ta sẽ đánh giá các biến với số 0, và điều này lúc nào cũng dễ dàng hơn. Chẳng hạn trong biểu thức trên, đánh giá $xyz \ge 0$ và $\frac{1}{xy + yz + zx + x + y + z} \ge 0$.

Bài 2 [Olympic 30-4 – Thành phố Hồ Chí Minh]

Cho $x, y, z \in [1,2]$. Chứng minh rằng:

$$g(x,y,z) = (x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \le 10$$

Một lần nữa ta sẽ sử dụng kỹ thuật kéo dãn các biến. Ta sẽ sử dụng ABC, trước tiên kéo dãn $[1,2] \to R^+$ như sau: $x \to \frac{1}{x-1} - 2 = a$. Như vậy, đặt

$x=\frac{a+2}{a+1}; y=\frac{b+2}{b+1}; z=\frac{c+2}{c+1}; a,b,c\in R^{+}$. Ta cần chứng min bài toán sau:

$$f(a,b,c)=\left(\frac{a+2}{a+1}+\frac{b+2}{b+1}+\frac{c+2}{c+1}\right)\left(\frac{a+1}{a+2}+\frac{b+1}{b+2}+\frac{c+1}{c+2}\right)\le 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{MN}{(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2)}\le 10$$

Ở đó: $M=(a+2)(b+1)(c+1)+(a+1)(b+2)(c+1)+(a+1)(b+1)(c+2)$

$N=(a+1)(b+2)(c+2)+(a+2)(b+1)(c+2)+(a+2)(b+2)(c+1)$

Thật đáng tiếc là bất đẳng thức: $MN-10(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2)\le 0$ không thể đánh giá bằng định lý ABC được, do hệ số của $a^2b^2c^2$ cuối cùng thu được là âm (bạn đọc có thể nhẩm ra dễ dàng). Thế nhưng chúng ta không bỏ cuộc một cách dễ dàng, chúng ta sẽ nhờ ABC Upgrade để giải quyết trường hợp này. Cố định abc và $a+b+c$, và ta sẽ thấy biểu thức thu được là đa thức bậc nhất theo $ab+bc+ca.$ Vậy nên ta đi đến kết luận bất đẳng thức đã cho đạt cực trị khi có hai biến bằng nhau. Như vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$$f(a,a,b)=\left(2\frac{a+2}{a+1}+\frac{b+2}{b+1}\right)\left(2\frac{a+1}{a+2}+\frac{b+1}{b+2}\right)\le 10$$

$$\Leftrightarrow \left(2\left(\frac{a+2}{a+1}\right)-\left(\frac{b+2}{b+1}\right)\right)\left(\left(\frac{a+2}{a+1}\right)-2\left(\frac{b+2}{b+1}\right)\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow -(ab+3b)(ab+3a)\le 0$$

Như vậy là bài toán đã được chứng minh.

Sau đây là một số bài tập cho các bạn áp dụng:

Bài 1[Tạp chí toán học và tuổi trẻ]:

Cho $a,b,c\in[1,2]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$A=\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$$

Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ.

Bài 2: [Sưu tầm]

Cho $x,y,z\in[1,2]$. Chứng minh rằng:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

F.Định lý ABC mở rộng

Như vậy là chúng ta đã giải quyết được hai yếu điểm của ABC. Yếu điểm thứ ba dễ nhận ra là ABC chỉ áp dụng được cho các bài toán ba biến, thế còn nhiều biến hơn thì thế nào???. Chúng ta sẽ cùng nhau giải quyết vấn đề này với định lý ABC mở rộng.

Trước hết, chúng ta làm quen với một khái niệm mới nằm trong định lý ABC của chúng ta

I. Khả ABC

1) Định nghĩa

Xét một biểu thức ba biến $f(a,b,c)$.

Ta gọi $f(a,b,c)$ là một biểu thức khả ABC nếu như bất đẳng thức $f(a,b,c)\ge 0$ có thể được chứng minh dựa vào định lý ABC để đưa về hai trường hợp sau:

i) Hai biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0.

2) Phương pháp chứng minh khả ABC

Để chứng minh một biểu thức $f(a,b,c)$ là khả ABC, ta sẽ chuyển biểu thức $f(a,b,c)$ thành biểu thức g đối với các biến $A=a+b+c, B=ab+bc+ca, C=abc$ .Biểu thức $f(a,b,c)$ là một biểu thức khả ABC nếu như $g(A,B,C)$ là một hàm lồi theo biến C.

Ví dụ :

Chứng minh biểu thức sau là khả ABC

$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)$

Giải:

Đặt $A=a+b+c, B=ab+bc+ca, C=abc$, ta có:

$f(a,b,c)=g(A,B,C)=A^3-3AB+3C+3C-AB+3C=A^3-4AB+9C$

Xét $g(A,B,C)$ theo biến C. Ta có: $g^{'}=9, g^{''}=0$ do đó g là hàm lồi theo biến C. Vậy biểu thức $f(a,b,c)$ là khả ABC.

II. Định lý ABC mở rộng

Xét một biểu thức đối xứng n biến $f(a_1,a_2,...,a_n)$, trong đó f có cực tiểu và $n\ge 3$. Ta sẽ coi $f(a_1,a_2,...,a_n)$ như là một biểu thức ba biến $g(a_1,a_2,a_3)$ với các số $a_4,a_5,...,a_n$ được coi như là các hằng số.

Khi đó nếu g khả ABC thì bất đẳng thức $f(a_1,a_2,...,a_n)\ge 0$ có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

i) m biến bằng nhau, n-m biến bằng nhau.

ii) 1 biến bằng 0.

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng đắn nếu nó được chứng minh tính đúng đắn trong hai trường hợp trên.

Chứng minh:

Ta giả sử f có cực tiểu như giả thiết đã nêu và cực tiểu xảy ra tại điểm $(x_1,x_2,...,x_n)$(*)

Nếu $x_1x_2...x_n=0$ hay x_i chỉ có khả năng nhận một trong hai giá trị cố định thì cực tiểu này không âm theo giả thiết đã nêu trong định lý.

Nếu x_i có khả năng nhận ba giá trị khác nhau và khác 0, ta giả sử (x_1,x_2,x_3) là một bộ mà ba giá trị trong bộ khác 0 và khác nhau từng đôi một. Ta cố định các biến $x_4,x_5,...,x_n$ như là những hằng số và xét hàm $f(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n)$ như là hàm $g(x_1,x_2,x_3)$.

Theo giả thiết thì g là khả ABC, vậy nên nó đạt cực tiểu khi có hai số bằng nhau, hay một số bằng 0. Điều này cũng có nghĩa là tồn tại bộ (a,b,c) để $g(x_1,x_2,x_3) > g(a,b,c)$ hay

$f(x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_n) \geq f(a,b,c,x_4,...,x_n)$.

Điều này mâu thuẫn với giải thiết (*)

Tóm lại thì định lý ABC đã được chứng minh.

III. Ứng dụng ABC mở rộng

<u>Bài toán 1:</u>

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với các giá trị thực dương của a,b,c,d

$$\frac{3(a^4+b^4+c^4+d^4)}{4abcd} \geq 1 + \frac{3(a^2+b^2+c^2+d^2)}{ab+ac+ad+bc+bd+cd} \quad (*)$$

<u>Giải:</u>

Bất đẳng thức tương đương với:

$$3(a^4+b^4+c^4+d^4)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - 4abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$-12abcd(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq 0$$

Đặt:

$$f(a,b,c,d) = 3(a^4+b^4+c^4+d^4)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - 4abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd) -$$
$$12abcd(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

Nhận xét rằng nếu cố định biến d thì f là hàm đối xứng theo ba biến, và hơn nữa f khả ABC. Như vậy theo định lý ta sẽ chỉ phải xét các trường hợp sau (ta sẽ xử lý với (*)):

$i) a = 0$, bất đẳng thức là hiển nhiên

$ii) a = b = x, c = d = y$, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{3(x^4+y^4)}{2x^2y^2} \geq 1 + \frac{6(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x+y)^2(x-y)^2}{2x^2y^2} \geq \frac{2(x-y)^2}{x^2+y^2+4xy}$$

Áp dụng BDT $(x+y)^2 \geq 4xy$ và $x^2+y^2 \geq 2xy$ ta sẽ chứng minh được trường hợp này.

$iii) a = b = c = x, d = y$, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{3(3x^4+y^4)}{4x^3y} \geq 1 + \frac{3(3x^2+y^2)}{3x^2+3xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-y)^2(3x^2+2xy+y^2)}{4x^3y} \geq \frac{3(x-y)^2}{3x^2+2xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức $3x^2+2xy \geq 3x^2$ và $3x^2+2xy+y^2 \geq 4xy$ ta sẽ chứng minh được trường hợp nỳa

Tóm lại theo định lý ta có điêu phải chứng minh.

<u>Bài toán 2:</u>

Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n = n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{2n\sqrt{n-1}}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} \geq n + 2\sqrt{n-1}$$

<u>Giải:</u>

Đặt $f(a_1,a_2,...,a_n) = VP$.

Cố định $a_4, a_5, ..., a_n$ ta được hàm ba biến và khả ABC. Như vậy ta chỉ cần xét 2 trường hợp:

$i) a_1 = 0$. Bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$ii)$ $mx + (n-m)y = n$. Chứng minh:

$$\frac{m}{x} + \frac{n-m}{y} + \frac{2n\sqrt{n-1}}{mx^2 + (n-m)y^2} \geq n + 2\sqrt{n-1}$$

Ta đưa về bài toán:

$$\frac{mx + (n-m)y}{n}\left(\frac{m}{x} + \frac{n-m}{y}\right) + \frac{2\sqrt{n-1}(mx + (n-m)y)^2}{n(mx^2 + (n-m)y^2)} \geq n + 2\sqrt{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(n-m)(x-y)^2}{nxy} \geq \frac{2\sqrt{n-1}m(n-m)(x-y)^2}{nmx^2 + n(n-m)y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(mx^2 + (n-m)y^2 - 2\sqrt{n-1}xy\right)(x-y)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên là đúng đắn do: $mx^2 + (n-m)y^2 \geq 2\sqrt{m(n-m)}xy \geq 2\sqrt{n-1}xy$.

Tóm lại bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

IV. Bài tập

Bài 1: Chứng minh bất đẳng thức sau cho các số thực dương a, b, c, d

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{2abcd} + 14 \geq (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

Bài 2:

Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoã: $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + ... + a_n^2 + ka_1a_2...a_n \geq \frac{2}{n-1} + \min\left\{2, k\left(\frac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$$

Bài 3:

Chứng minh rằng đối với $x_1, x_2, .., x_n$ là các số thực thoã: $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$ ta có bất đẳng thức sau:

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 + \frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)}\sum x_1x_2x_3 \leq 1$$

G. Kết luận

Trong phần bài tập, chúng tôi đều cố gắng ghi rõ nguồn gốc của bài toán tôi lấy từ đâu. Tuy nhiên do sự hạn chế nên một số bài toán chúng tôi không rõ xuất xứ, tôi xin chân thành xin lỗi tác giả của bài toán và xin được đề tựa các bài toán là Sưu Tầm.