

Câu I

a) Điều kiện xác định
$$\begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = 1 + \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 3x+4 = 2x+2+2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x+2 = 2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow x^2+4x+4 = 8x+4 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $S=\{0;4\}$

b)

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x} + 1)^2 &= 2x^2 - 30x + 2 \Leftrightarrow -x^2 + 2x\sqrt{x} + 33x + 2\sqrt{x} - 1 = \\ 0 &\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 33x - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 2(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) - 33 = 0 \Leftrightarrow \\ (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 - 2(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) - 35 &= 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 7 \\ \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{47-21\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Câu II

a) xét $p=2,3$ không thỏa mãn nên xét với $p>3$ thì ta có

$$p \equiv 1, 2 \pmod{3}$$

Trường hợp 1: $p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 8p + 1 \equiv 8.1 + 1 \equiv 9 \equiv 0 \pmod{3}$

Trường hợp 2: $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 8p - 1 \equiv 8.2 - 1 \equiv 15 \equiv 0 \pmod{3}$

Vậy không tồn tại giá trị p nguyên tố nào thỏa điều kiện trên

b)
Xét $(x;y)=(1;1)(2;3)$ là nghiệm của phương trình

Xét với
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x \equiv \pm 1 \pmod{4} \\ 2^y \equiv 0 \pmod{4} \\ 3^x \equiv 0 \pmod{3} \\ 2^y \equiv \pm 1 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 2i + 1 \\ i, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{2k} - 1 = 2^y \Leftrightarrow (3^k - 1)(3^k + 1) = 2^y$$

Đặt $m+n=y$ với $n>m$ thỏa

$$3^k - 1 = 2^m; 3^k + 1 = 2^n \Rightarrow 2.3^k = 2^m + 2^n \Rightarrow 3^k = 2^{m-1} + 2^{n-1} = 2^{m-1}(1 + 2^{n-m})$$

VT có ước nguyên tố là 3 nhưng không có ước nguyên tố là 2

Vậy VT=VP khi và chỉ khi $m=1$

Với $m=1$ thì

$$\begin{cases} 3^k = 2^{n-1} + 1 \Rightarrow 3^{2k} = (1 + 2^{n-1})^2 \\ 3^{2k} = 2^y + 1 = 2^{n+1} + 1 \end{cases} \Rightarrow (2^{n-1+1})^2 = 2^{n+1} + 1 \Rightarrow (2^n - 1)^2 = 2^{n+1} + 1 \Rightarrow (2^n - 1)^2 - 2^{n+1} = 1 \Rightarrow 2^{2n} - 2^{n+1} = 2 \Rightarrow 2^{n-2} = 2 \Leftrightarrow n - 2 = 1 \Leftrightarrow n = 3$$

$$y = m + n = 1 + 3 = 4$$

Mà y lẻ nên không tồn tại giá trị x, y nguyên dương thỏa phương trình với

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(x; y) = (1; 1); (2; 3)$

Câu III

a)
$$a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq (a^2 + b^2) \cdot \frac{(a+b)^2}{4} = a^2 + b^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$

b) Cách 1 (Cauchy Schwarz)

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \\ &+ \frac{z}{\sqrt{(y+z)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+z} + \frac{z}{x+z} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1 + 1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Cách 2 (Holder và bất đẳng thức phụ)

Cách 1

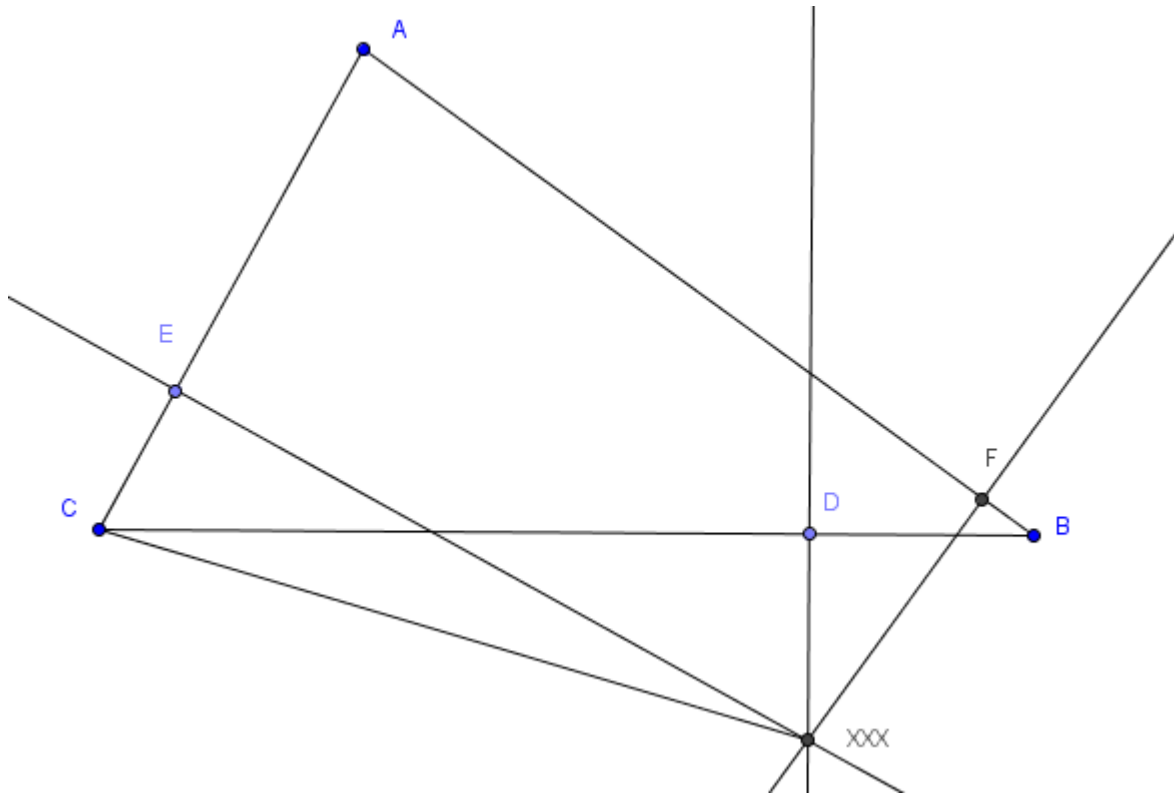
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(a+c) &= (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc \\ &\geq (a+b+c)(ab+bc+ca) - \frac{1}{9} \cdot (a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &= \frac{8}{9} (a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &\Rightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx) \leq \frac{8}{9} (x+y)(y+z)(z+x) \quad (\varepsilon) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{x+y+z}{(x+y)(y+z)(x+z)} \right) \cdot (2xy+2yz+2zx)} \\ &= \sqrt{\frac{2x+2y+2z}{(x+y)(x+z)(y+z)}} \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Câu IV:



Khi 3 đường thẳng (d1);(d2);(d3) đồng quy thì ta có

$$VT = DB^2 - BF^2 + AF^2 - AE^2 + EC^2 - CD^2 = DF^2 + AF^2 - EA^2 - ED^2 = AD^2 - AD^2 = 0 = VP$$