

Tuyển tập phương trình-hệ phương trình hay

Bài 1: Giải hệ phương trình (Đề thi HSG tỉnh vòng 1 khối 12 - Phú Yên 2010-2011)

$$\begin{cases} x^2y^2 - 8x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 10 + y^3 = 0 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình (Đề thi HSG tỉnh vòng 1 khối 12 - Phú Thọ 2010-2011)

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y \\ x + y - 2 = \frac{y}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Bài 3: Giải phương trình (Đề thi HSG tỉnh vòng 1 khối 12 - Hải Dương 2010-2011)

$$2\sqrt[3]{2x-1} = 27x^3 - 27x^2 + 13x - 2$$

Bài 4: Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+1}(4x-1) = 2x^2 + 2x + 1$$

Bài 5: Giải phương trình (OLYMPIC 30-4)

$$(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = 28-x$$

Bài 6: Giải phương trình (Tập chí THPT 11-2012)

$$x^2 - 2x + 7 + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+\sqrt{1+8x}}$$

Bài 7: Giải phương trình (OLYMPIC 30-4)

$$\sqrt{2x^2+3x+1} = -4x + \frac{1}{x} + 3$$

Bài 9: Giải hệ phương trình (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nghệ An-2010)

$$\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 \end{cases}$$

Bài 10: Giải hệ phương trình (Đề thi học sinh giỏi tỉnh Nghệ An-2012)

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 0 \\ (xy-1)^2 = x^2 - y^2 + 2 \end{cases}$$

Bài 11: Giải hệ phương trình (*Tạp chí THPT 12-2012*)

$$\begin{cases} 9x^2 + 9xy + 5x - 4y + 9\sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{x-y+2} + 1 = 9(x-y)^2 + \sqrt{7x-7y} \end{cases}$$

Bài 12: Giải hệ phương trình (*VMO 1996-Bảng B*)

$$\begin{cases} x^3y - y^4 = 7 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 9 \end{cases}$$

Bài 13: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2(1-y)(x-y)} + \sqrt{xy} = 2y \\ x(2x+y-5) + y(y-2) + 3 = 0 \end{cases}$$

Bài 14: Giải phương trình

$$\sqrt{4x-1} + \sqrt[3]{8x-3} = 4x^4 - 3x^2 + 5x$$

Bài 15: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 16x^3y^3 - 9y^3 = (2xy - y)(4xy^2 + 3) \\ 4x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 = 3 \end{cases}$$

Bài 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2(x+1) = 12 \\ x^2 + 2xy + x - y^3 = 6 \end{cases}$$

Bài 17: Giải hệ phương trình (*Đề thi học sinh giỏi Quốc Gia-2010*)

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$$

Bài 19: Giải hệ phương trình (*Đề thi tuyển sinh vào đại học khối A-2013*)

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 20: Giải hệ phương trình (*Đề thi tuyển sinh vào đại học khối B-2013*)

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} \end{cases}$$

Bài 21: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + \sqrt{x-1} = \sqrt{8x^2 - 8xy + 2y^2 + 2x - 2y} \\ y^2 + 4x\sqrt{x-1} - 17 = 0 \end{cases}$$

Bài 22: Giải phương trình

$$-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2\sqrt[3]{5x^7 - x^3}$$

Bài 23: Giải hệ phương trình (*Đề thi tuyển sinh vào đại học khối A-2012*)

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 24: Giải phương trình (*Đề thi học sinh giỏi Nghệ An-2011*)

$$x - 1 + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = x^2 + \sqrt{2}$$

Bài 25: Giải phương trình

$$\sqrt{1-x}(3x^2 - x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

Bài 26: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3(4y^2 + 1) + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6 \\ x^2y(2 + 2\sqrt{4y^2 + 1}) = x + \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

Bài 27: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$$

Bài 28: Giải hệ phương trình (*Đề thi tuyển sinh vào đại học khối D-2012*)

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$$

Bài 29: Giải phương trình

$$3 - x + \sqrt[3]{4-x} = \sqrt{3+x} + \sqrt[3]{1+\sqrt{3+x}}$$

Bài 30: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases}$$

Bài 31: Giải phương trình

$$x\sqrt{y-1} - y\sqrt{x-1} = xy$$

Bài 32: Giải hệ phương trình (Chọn đội tuyển thành phố Hà Nội-2005)

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \end{cases}$$

Bài 33: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2} + x^2(1 - 2x^2) = y^4 \\ 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} = -x^2(x^4 + 1 - 2x^2 - 2xy^2) \end{cases}$$

Bài 34: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(y + 3)(x + 2) - \sqrt{2x + 3} = 0 \\ 4x - 4\sqrt{2x + 3} + x^3\sqrt{(y + 3)^3 + 9} = 0 \end{cases}$$

Bài 35: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 2 = 3x - 3y^2 \\ x^2 - \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{2y - y^2} + 2 = 0 \end{cases}$$

Bài 36: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 4x = (xy + 2y + 4)(4x + 2) \\ x^2 + x - 2 = y(2x + 1)^2 \end{cases}$$

Bài 37: Giải phương trình

$$2x + \frac{x-1}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 3\sqrt{x - \frac{1}{x}}$$

Bài 38: Giải phương trình

$$2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$$

Bài 39: Giải phương trình

$$-x^2 + 3x + \sqrt[4]{2-x^4} - 3 = 0$$

Bài 40: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)+1=(x^2+x+1)(y^2+y+1) \\ x^3+3x+(x^3-y+4)\sqrt{x^3-y+1}=0 \end{cases}$$

Bài 41: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^3+x=\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y} \\ 2x-\sqrt{x^2+3}+x^4=xy^3-y^2+1 \end{cases}$$

Bài 42: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-3x^2-15x-36=y^3-18y \\ 2x^2+2x+3=-2y^2+6y \end{cases}$$

Bài 43: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 14x^2-15xy+4y^2-24x+12y=0 \\ \sqrt{-7x^2+12x+4xy+36}+\sqrt{x^2+8x+32}=6 \end{cases}$$

Bài 44: Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^4-x^2}+4=4x^2-3x$$

Bài 45: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy-3x-2y=16 \\ x^2+y^2-2x-4y=33 \end{cases}$$

Bài 46: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy \\ 2\sqrt{x^2-2y-1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2 \end{cases}$$

Bài 47: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-2)(2y-1)=x^3+20y-28 \\ 2(\sqrt{x+2y}+y)=x^2+x \end{cases}$$

Bài 48: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+7y=(x+y)^2+x^2y+7x+4 \\ 3x^2+y^2+8y+4=8x \end{cases}$$

Bài 49: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 1 = y^3 + y^2 + y \\ 2y + 1 = z^3 + z^2 + z \\ 2z + 1 = x^3 + x^2 + x \end{cases}$$

Bài 50: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y + x + 2 = 6y \\ x^2y^2(x^2 + 2) + 1 = y(12y - x^2 - 1) \end{cases}$$

Bài 51: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} - \sqrt{2y-1} = x-y \\ 4x^2 - 12xy + 7y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 52: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x = 2 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} = -2 \end{cases}$$

Bài 53: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-2)\sqrt{1+\frac{3x}{y}} = 2x-y \\ y^2\sqrt{1+\frac{3x}{y}} = 2x^2+y^2-4x \end{cases}$$

Bài 54: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2-x+y-x^2-y^2} = 1 \\ 2x^3 = 2y^3 + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 55: Giải phương trình

$$(x-1)^2 + \sqrt[3]{x^2(x^2-2)} = 3$$

Bài 56: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 7x^2 - 14x + 3y^3 + 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 57: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 7x^2 - 14x - 3y^3 + 4 = 0 \end{cases}$$

Bài 58: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4y^2 - \frac{4}{3x+y} = 1 + 36x^2 \\ y^2 - 9x^2 = 3(3x+y)^2 + 9x + 3y \end{cases}$$

Bài 59: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(x-3y) + y^2(1+3x) + 2xy(xy-1) = \frac{-x^2y^2}{4} \\ \frac{2(x+y)}{3} + \frac{1}{xy} = 2(1 + \frac{2y}{3}) \end{cases}$$

$$x = tg\alpha, y = tg\beta, z = tg\gamma (0 < \alpha, \beta, \gamma < 90)$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(tg\alpha + \frac{1}{tg\alpha}) = 12(tg\beta + \frac{1}{tg\beta}) = 13(tg\gamma + \frac{1}{tg\gamma}) \\ tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\gamma tg\alpha = 1 \end{cases}$$

$$Pt(2) \Leftrightarrow tg\gamma(tg\alpha + tg\beta) = 1 - tg\alpha tg\beta$$

$$\Leftrightarrow cot\gamma = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

$$\Leftrightarrow tg(\frac{\pi}{2} - \gamma) = tg(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \text{ (nên } 2\alpha, 2\beta + 2\gamma \text{ là 3 góc trong 1 tam giác)}$$

$$Pt(1) \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 2\alpha} = \frac{12}{\sin 2\beta} = \frac{13}{\sin 2\gamma}$$

5, 12, 13 là bộ 3 số Pythagore nên tam giác chứa 3 góc $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ là tam giác vuông nên $2\gamma = 90 \Rightarrow \gamma = 45 \Rightarrow z = 1$