Đề bài: Cho $x; y; z$ là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + yz}{9}$$

Lời giải:
Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + yz}{9} \\
&= \frac{2x^2}{2x^2 + 2yz + 2x + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y + z}{x + 1 + y + z} - \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2yz}{18} \\
&= \frac{2x^2}{3x^2 + (y + z)^2 + 2x} + \frac{y + z}{x + 1 + y + z} - \frac{x^2 + (y + z)^2}{18}
\end{aligned}$$

Đặt $a = x; b = y + z$,ta có:

$$a^2 + b^2 = x^2 + (y + z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

Áp dụng BĐT *Cauchy* ta có:

$$a + b = x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{6}$$

$$a + b = x + y + z \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$$

Vậy $\sqrt{2} \leq a + b \leq \sqrt{6}$
Áp dụng BĐT *Cauchy*,ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2a^2}{3a^2 + b^2 + 2a} + \frac{b}{a + b + 1} - \frac{a^2 + b^2}{18} \\
&= \frac{a}{a + (\frac{b^2}{2a} + \frac{a}{2}) + a} + \frac{b}{a + b + 1} - \frac{a^2 + b^2}{18} \\
&\geq \frac{a}{a + b + 1} + \frac{b}{a + b + 1} - \frac{(a + b)^2}{36} \\
&= \frac{a + b}{a + b + 1} - \frac{(a + b)^2}{36}
\end{aligned}$$

Đặt $t = a + b$. Xét $f(t) = \dfrac{t}{t + 1} - \dfrac{t^2}{36}$ trên $[\sqrt{2}; \sqrt{6}]$
Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{(t + 1)^2} - \dfrac{t}{18}$.
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Vậy từ đây ta có:

$$P \leq f(t) \leq f(2) = \frac{5}{9}$$

. Vậy $P_{max} = \dfrac{5}{9}$ khi và chỉ khi $(x + y + z) = (1; 1; 0); (1; 0; 1)$