TRAO ĐỔI MỘT SỐ KINH NGHIỆM KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Khi giải hệ phương trình, dù bạn có dùng cách gì biến đổi đi chăng nữa thì mục đích cuối cùng của bạn cũng chuyển về phương trình một biến và giải phương trình vừa thu được. Đó cũng là suy nghĩ tự nhiên, việc làm giảm biến là quy luật không chỉ trong toán học mà cả trong cuộc sống chúng ta vẫn thường làm. Tóm lại, khi giải hệ phương trình thì chúng ta phải tìm cách làm giảm số ẩn của hệ để thuận lợi trong việc giải nó. Sau đây tôi xin nêu một số kinh nghiệm mà tôi có được trong quá trình học tập và giảng dạy.

1) Từ một phương trình rút một ẩn (hoặc biểu thức) theo ẩn còn lại (theo một nhóm biểu thức khác).

Nếu trong phương trình của hệ mà có một ẩn xuất hiện dưới dạng bậc nhất, thì ta có thể rút ẩn đó theo ẩn còn lại và thế vào phương trình thứ hai của hệ và bạn cũng đừng ngần ngại khi thấy rằng sau khi thực hiện phép thế, phương trình thu được có bậc không nhỏ.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases}$.

Lời giải. Vì phương trình thứ nhất của hệ chỉ chứa y nên ta nghĩ đến việc rút y theo x và thế vào phương trình thứ hai của hệ.

Ta có: $y = \dfrac{2x^2(2-x)}{x+1}$ (Do $x=-1$ không là nghiệm của hệ) thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có :

$$x^4\left(5-4x^2\right) = \frac{4x^4(2-x)^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (5-4x^2)(x^2+2x+1) = 4(4-4x+x^2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x^4+8x^3+3x^2-26x+11=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (x-1)(2x-1)(2x^2+7x+11)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $(x;y)=(0;0),\ (1;1),\ (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

Bình luận: Cách giải này có một ưu điểm là không cần phải mánh khóe gì cả mà chỉ cần biến đổi hết sức bình thường. Tuy nhiên, nó có một nhược điểm là nó chỉ giúp chúng ta giải quyết bài toán đó thôi, còn con đường để sáng tác ra bài toán đó thì cách giải trên không thể làm rõ được! Để hiểu rõ được nguồn gốc của bài toán và đó là cách mà tác giả đã sáng tác bài toán trên.

Cách giải thứ 2. Ta viết lại hệ như sau $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ y^2 + 4x^6 = 5x^4 \end{cases}$

Nhận thấy $x = 0 \Rightarrow y = 0$, hay $(x;y) = (0;0)$ là một nghiệm của hệ.

Với $x \neq 0$ ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{y}{x^2}(x+1) = 4 \\ \left(\dfrac{y}{x^2}\right)^2 + 4x^2 = 5 \end{cases}$. Đặt $a = 2x, b = \dfrac{y}{x^2}$ ta có được hệ:

$$\begin{cases} a + b(\dfrac{a}{2} + 1) = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng loại 1. Việc giải hệ này không mấy khó khăn.

Quan lời giải trên, ta thấy con đường để chế tác ra những hệ kiểu này là xuất phát từ một hệ đã biết thuật giải, chúng ta thay thế hình thức của các biến có mặt trong hệ và biến đổi rút gọn ta thu được một hệ có hình thức hoàn toàn xa lạ với cái hệ ban đầu.

Chẳng hạn: Từ hệ $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ (lưu ý hệ này có ít nhất 1 cặp nghiệm $(1;2)$)

Ta thay thế x bằng $\dfrac{y}{2x^3}$ và y bằng y^2 thì ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2x^3} + y^2 + \dfrac{y^3}{2x^3} = 5 \\ \dfrac{y^2}{4x^6} + y^4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^2 + 2x^3y + 1) = 10x^3 \\ y^2(1 + 4x^6y^2) = 20x^6 \end{cases}.$$

Vậy ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} y(y^2 + 2x^3y + 1) = 10x^3 \\ y^2(1 + 4x^6y^2) = 20x^6 \end{cases}$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 & (1) \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận thấy phương trình thứ nhất của hệ là phương trình bậc nhất đối với x nên ta rút x theo y và thế vào phương trình thứ hai ta được phương trình một ẩn.

Từ (1), suy ra $y = \dfrac{x^2 + x}{2x - 1}$ (do $x = \dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của hệ) thay vào (2) ta được

$$x^4-4x^2\frac{x^2+x}{2x-1}+3x^2+\left(\frac{x^2+x}{2x-1}\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f(x)=0\end{array}\right.$$

Với $f(x)=x^2(2x-1)^2-4(x^2+x)(2x-1)+3(2x-1)^2+(x+1)^2=4x^4-12x^3+10x^2-6x+4$

Nên $f(x)=0\Leftrightarrow 2x^4-6x^3+5x^2-3x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(2x^2+1)=0\Leftrightarrow x=1,x=2$

Vậy hệ đã cho có 3 cặp nghiệm $(x;y)=(0;0),\ (1;2),\ (2;2)$.

Bình luận: Cũng như ở ví dụ 1, cách giải trên chỉ giải quyết được bài toán chứ không phải là con đường để sáng tác bài toán đó. Điều này thôi thúc chúng ta đi tìm một lời giải khác cho bài toán trên. Sự xuất hiện x^2-2xy và x^4-4x^2y gợi cho ta nghĩ đến các hằng đẳng thức: Ta viết lại hệ như sau: $\begin{cases}(x-y)^2+x+y-y^2=0\\ (x^2-y)^2+3x^2-3y^2=0\end{cases}$

Việc làm này cũng không mấy khả quan, vì khi nhìn vào hệ chúng ta cũng chưa phát hiện được mối liên hệ nào. Bắt chước cách làm ở ví dụ 1 ta biến đổi như sau:

Nếu $x=0\Rightarrow y=0$ là nghiệm của hệ

Nếu $x\neq 0$, ta có hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+1+\dfrac{y}{x}=0\\ x^2-4y+\dfrac{y^2}{x^2}+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}=2y+1\\ (x+\dfrac{y}{x})^2=6y-3\end{cases}$

Suy ra $(2y+1)^2=6y-3$. Đến đây thì bài toán trở nên đơn giản.

Với cách giải trên, ta có thể chế được rất nhiều hệ phương trình khác nhau. Ở đây chúng ta chú ý rằng việc giải hệ cuối cùng quy về giải các phương trình bậc hai nên chuyện các hệ số nhận những giá trị nào không quan trọng.

Chẳng hạn từ: $\begin{cases}x+\dfrac{2y}{x}=4x+4\\ \left(x+\dfrac{2y}{x}\right)^2=x^2-3\end{cases}$, biến đổi ngược ta có được một hệ:

Hoặc là $\begin{cases}x-\dfrac{y}{x}=4y-1\\ \left(x-\dfrac{y}{x}\right)^3=2y\end{cases}$ biến đổi ngược ta có được một hệ.

Ở hai bài trên chúng ta giải theo cách rút một ẩn theo ẩn kia. Dấu hiệu nhận thấy là việc xuất hiện của một phương trình là phương trình bậc nhất đối với một ẩn. Bây giờ chúng ta chuyển qua xét một số hệ mà chúng ta thực hiện rút thế mà phương trình đối với một ẩn trong một phương trình nào đó không phải là phương trình bậc nhất.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y & (1) \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) & (2) \end{cases}$

Lời giải.

Cách 1: Từ (2) ta suy ra: $x^2 = 3(y^2 + 2)$ (3), thay vào (1) ta được:

$$x^3 - 8x = y(y^2 + 2) = y\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2 - xy - 24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \end{array}\right.$$

- $x = 0$ thay vào (3) ta thấy phương trình vô nghiệm.
- $y = \dfrac{3x^2 - 24}{x}$ thay vào (3) ta được: $x^2 = 3\left(\dfrac{3x^2 - 24}{x}\right)^2 + 6$

$$\Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm là: $(x; y) = (\pm 3; \pm 1)$, $\left(\pm\sqrt{\dfrac{96}{14}}; \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

Bình luận: Việc chúng ta suy nghĩ đến rút thế là nhận thấy ở phương trình thứ nhất chỉ chứa y^3 và y; ở phương trình thứ hai của hệ lại chứa y^2 nên nếu ta thay y^2 vào phương trình thứ nhất thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành phương trình bậc nhất đối với ẩn y và ta thực hiện rút y như trên. Tuy nhiên, có lẽ đây cũng không phải là con đường chế tác bài toán trên. Từ nhận xét trên, ta thấy ở phương trình thứ nhất hai biến x, y lệch bậc nhau 2 bậc (x^3 và x; y^3 và y), đồng thời phương trình thứ hai cũng lệch bậc nhau 2 bậc (x^2, y^2 và hằng số). Điều này gợi ý ta tạo ra sự đồng bậc như sau:

Cách 2: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ 6 = x^2 - 3y^2 \end{cases}$, suy ra $6(x^3 - y^3) = (8x + 2y)(x^2 - 3y^2)$. Đây là phương trình đẳng cấp bậc 3. Việc còn lại để giải quyết hệ không còn khó khăn nữa.

Với cách làm như trên ta có thể chế tác ra nhiều bài toán về hệ phương trình

Chẳng han, từ phương trình : $(x - 2y)(x + 3y)(x - 1) = 0$ nhân bung ra rồi tách thành hai phương trình ta sẽ được một hệ.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ nên từ (1) $\Rightarrow y^2=-\dfrac{x^3+49}{3x}$ (*) thế vào phương trình (2) ta được: $x^2-8xy-\dfrac{x^3+49}{3x}=8y-17 \Leftrightarrow 24y(x^2+x)=2x^3+51x^2-49$

$$\Leftrightarrow 24xy(x+1)=(x+1)(2x^2+49x-49) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\dfrac{2x^2+49x-49}{24x} \end{array}\right.$$

- $x=-1$ thế vào (*) $\Rightarrow y=\pm 4$.
- $y=\dfrac{2x^2+49x-49}{24x}$ thế vào (*), ta có:

$$-\frac{x^3+49}{3x}=\left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2 \Leftrightarrow -192x(x^3+49)=(2x^2+49x-49)^2$$

Biến đổi rút gọn ta được:

$4x^4+4x^3+45x^2+94x+49=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(4x^2-4x+49)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(-1;\pm 4)$.

Cách 2: Lấy $(1)+3.(2)$ ta có được:

$$x^3+3x^2+3xy^2-24xy+3y^2=24y-51x-49$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+3y^2(x+1)-24y(x+1)+48(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2+3y^2-24y+48\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Đến đây bài toán trở nên đơn giản.

Cách 3: Đặt $a=x+y,\ b=x-y \Rightarrow x=\dfrac{a+b}{2}, y=\dfrac{a-b}{2}$

Thay vào hệ ta có được: $\begin{cases} a^3+b^3+98=0 & (3) \\ 3a^2-5b^2-9a-25b=0 & (4) \end{cases}$

Lấy $(3)-3.(4)$ ta có: $a^3-9a^2+27a-27+b^3+15b^2+75b+125=0$

$\Leftrightarrow (a-3)^3+(b+5)^3=0 \Leftrightarrow a-3=-b-5$. Đến đây bài toán trở nên đơn giản.

Cách 4: Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x^3(1+3t^2)=-49 \\ x^2(1-8t+t^2)=x(8t-17) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\dfrac{-49}{1+3t^2}=\dfrac{-49}{49+3(t^2-16)}=\dfrac{-49}{49+3a} \\ x=\dfrac{8t-17}{t^2-8t+1}=\dfrac{8t-17}{(t^2-16)-(8t-17)}=\dfrac{b}{a-b} \end{cases} \text{(Với: } a=t^2-16; b=8t-17\text{).}$$

$$\Rightarrow \frac{-49}{49+3a}=\frac{b^3}{(a-b)^3} \Leftrightarrow 49\left(b^3+(a-b)^3\right)+3ab^3=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[49\left(b^2-b(a-b)+(a-b)^2\right)+3b^3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Leftrightarrow t^2=16 \\ 49\left(b^2-b(a-b)+(a-b)^2\right)+3b^3=0 \ (*) \end{array}\right.$$

- $t^2=16$ vào hệ $\Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=\pm 4$.

- Khai triển và rút gọn, ta có: $(*) \Leftrightarrow 49t^4+360t^3+547t^2-360t+304=0$

$\Leftrightarrow (t+4)^2(49t^2-32t+19)=0 \Leftrightarrow t=-4$.

Bình luận:

- Với cách giải thứ nhất, chỉ đòi hỏi chúng ta kĩ năng tính toán và cách giải này cũng chỉ giải quyết được vấn đề là giải được bài toán đó mà thôi.

- Cách giải thứ 2 là cách giải ngắn gọn nhất, tuy nhiên để nghĩ ra được cách giải đó chúng ta cần có một sự nhạy cảm nhất định. Nguồn gốc của cách giải này theo tôi nghĩ là xuất phát từ việc chúng ta đoán được hệ có nghiệm $x=-1$ nên chúng ta tạo ra thừa số $x+1$

Ở phương trình thứ 2 thì $-8xy$ bắt cặp với $-8y$ sẽ tạo ra thừa số $x+1$. Vấn đề còn lại là $3xy^2$ và y^2. Hai đại lượng này bắt cặp với nhau để tạo ra thừa số $x+1$ thì bắt buộc ta nhân vào đại lượng y^2 với một số là 3. Đó là lí do mà ta đã nhân phương trình (2) với 3 rồi cộng với phương trình (1).

Với cách giải này, có thể giúp chúng ta chế tác ra nhiều bài hệ. Chẳng hạn, hai bài sau là kết quả của việc làm đó.

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+2xy^2=5 \\ 2x^2+xy+y^2=4x+y \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+y^2=(x-y)(xy-1) \\ x^3-x^2+y+1=xy(x-y+1) \end{cases}$

- Con đường để đi đến cách giải thứ 3 có lẽ là như sau.

Do ở phương trình thứ nhất có sự xuất hiện $x^3,\ 3xy^2$ và ở phương trình thứ hai có sự xuất hiện x^2, xy, y^2 nên gợi ý cho chúng ta phân tích qua hai đại lượng $x-y$ và $x+y$

Ta có: $x^3+3xy^2=a(x+y)^3+b(x-y)^3$. Đồng nhất hai vế ta có $a=b=\frac{1}{2}$

$x^2-8xy+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$. Đồng nhất hai vế ta có: $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{5}{2} \\ a=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$8y-17x=a(x-y)+b(x+y)$. Đồng nhất, ta có $\begin{cases} a+b=-17 \\ -a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{25}{2} \\ b=-\frac{9}{2} \end{cases}$

Nên ta viết lại hệ như sau: $\begin{cases} (x+y)^3+(x-y)^3=-98 \\ -3(x+y)^2+5(x-y)^2=-25(x-y)-9(x+y) \end{cases}$

Và đến đây, để đơn giải về mặt hình thức ta đặt $a=x+y, b=x-y$.

Ta có hệ: $\begin{cases} a^3+b^3+98=0 \\ 3a^2-5b^2-9a-25b=0 \end{cases}$ (*)

- Cách giải thứ 4 được dựa vào cách giải của hệ đẳng cấp, tuy nhiên các giải này với cách giải thứ nhất chỉ giúp chúng ta giải quyết được bài toán và đòi hỏi phải tính toán nhiều.

2. Biến đổi về phương trình tích

Xuất phát từ một phương trình hoặc công trừ hai phương trình của hệ, dẫn tới một phương trình tích. Từ phương trình tích này ta có thể biểu diễn được ẩn này qua ẩn kia.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y & (2) \end{cases}$.

Lời giải: ĐK : $x+y>0$

Phương trình thứ nhất của hệ chứa ba biểu thức $x^2+y^2; xy; x+y$, mà ba biểu thức này quan hệ với nhau bởi đẳng thức: $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ nên sẽ biến đổi (1) như sau:

Ta có: $(1)\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{x+y}-1=0\Leftrightarrow \frac{(x^2+y^2)(x+y)-(x^2+y^2)}{x+y}+x+y-1=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(\frac{x^2+y^2}{x+y}+1)=0\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x$ (Do $\frac{x^2+y^2}{x+y}>0$)

Thay vào (2), ta được: $x^2-(1-x)=1\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=0 \\ x=-2\Rightarrow y=3 \end{array}\right.$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(1;0),\ (-2;3)$.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow x^2-(y+1)x-2y^2-y=0$ (*)

Xem (*) là phương trình bậc hai ẩn x, còn y là tham số, phương trình này có biệt thức

$$\Delta=(y+1)^2+4(2y^2+y)=(3y+1)^2$$

Do đó (*) có hai nghiệm $x=2y+1, x=-y$, ta loại nghiệm $x=-y$

Thay $x=2y+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta tìm được $y=2\Rightarrow x=5$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(5;2)$.

Bình luận: Khi gặp một phương trình của hệ có dạng $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$, ta có thể xem đây là một phương trình bậc hai với ẩn x (hoặc y) và y (hoặc x) là tham số. Nếu biệt thức Δ có dạng $(my+n)^2$ thì ta rút được $x=\alpha y+\beta$.

Nếu gặp hệ phương trình gồm hai phương trình bậc hai, nhưng mỗi phương trình của hệ không có tính chất nêu trên thì ta có thể nhân vào mỗi phương trình một số nào đó rồi cộng chúng lại với nhau để được một phương trình bậc hai có tính chất vừa nêu trên.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2+2xy+y=5 \quad (1) \\ y^2+xy+5x=7 \quad (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Nhân phương trình thứ hai của hệ với $k\neq 0$ và cộng với phương trình thứ nhất ta được:

$$2x^2+(2y+ky+5k)x+ky^2+y-7k-5=0 \quad (*)$$

Xem (*) là phương trình bậc hai ẩn x, phương trình này có biệt thức

$\Delta_x = \left[(2+k)y+5k\right]^2 - 8(ky^2+y-7k-5)$

$\quad = (k-2)^2y^2 + 2(5k^2+10k-4)y + 25k^2+56k+40$.

Ta chọn k sao cho $\Delta_x = (ay+b)^2$, tức là k thỏa mãn

$$\Delta'_y = (5k^2+10k-4)^2 - (k-2)^2(25k^2+56k+40) = 0 \quad (**)$$

Ta thấy phương trình (**) có một nghiệm $k=1$, ta chọn giá trị này.

Khi đó $\Delta_x = y^2+22y+121 = (y+11)^2$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm:

$$x = \frac{-y+3}{2}; x = -y-4.$$

Thay vào hệ ta tìm được hai cặp nghiệm $(1;1),(-1;-3)$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2xy^2=5 \\ 2x^2+xy+y^2=4x+y \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận thấy phương trình có nghiệm $\left(1;\pm\sqrt{2}\right)$, nên ta suy nghĩ đến việc tạo ra thừa số $x-1$.

Chú ý đến số hạng chứa y^2 ở hai phương trình, ta nghĩ đến lấy phương trình thứ nhất trừ đi 2 lần phương trình thứ hai ta có được:

$x^3-4x^2+8x-5+2y^2(x-1)+y(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+5)+2y^2(x-1)+y(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+2y^2+y+5)=0$ (*)

Do $x^2-3x+2y^2+y+5 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{8} > 0, \ \forall x,y \in ¡$

Nên (*) $\Leftrightarrow x=1$. Từ đó ta tìm được $(x;y) = \left(1;\pm\sqrt{2}\right)$ là nghiệm của hệ.

3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ quen thuộc

Việc đặt ẩn phụ làm cho cấu trúc của hệ nhìn đơn giản hơn, từ đó chúng ta có lời giải rõ ràng hơn. Để đặt ẩn phụ chúng ta cần tạo ra những nhón hạng tử đồng dạng với nhau. Để tạo ra những nhóm hạng tử này ta thường thực hiên chia hoặc ghép các hạng tử với nhau.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases}$.

Lời giải.

Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+y^3=19 \\ y\dfrac{1}{x^2}+y^2\dfrac{1}{x}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+y^3=19 \\ a^2y+y^2a=-6 \end{cases}$

(Với $a=\dfrac{1}{x}$).

Đặt $S=a+y, P=ay$. Khi đó: $\begin{cases} S(S^2-3P)=19 \\ SP=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ y=-2 \end{cases} \cup \begin{cases} a=-2 \\ y=3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(\dfrac{1}{3};-2),\ (-\dfrac{1}{2};3)$.

Bình luận.

1) Ngoài cách giải trên, ta có thể giải theo cách sau

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ, ta biến đổi hệ như sau

$$\begin{cases} 6(1+xy)(1-xy+x^2y^2)=6.19x^3 \\ 19xy(1+xy)=-19.6x^2 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ lại ta được: $(1+xy)(6x^2y^2+13xy+25)=0$

Đến đây, bài toán trở nên đơn giản.

2) Một ví dụ tương tự như bài toán trên $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$.

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+1)y^4+1=2xy^2(y^3-1) \\ xy^2(3xy^4-2)=xy^4(x+2y)+1 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^4+2xy^2+1+y^4-2xy^5=0 \\ 3x^2y^6-2xy^2-x^2y^4-2xy^5-1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y^4}-2xy=-1 \\ 3x^2y^2-\dfrac{2x}{y^2}-x^2-2xy-\dfrac{1}{y^4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2-2xy=-1 \\ 3x^2y^2-2xy-\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)^2=0 \end{cases}.$$

(do $y=0$ không là nghiệm của hệ)

Đặt $a = x + \frac{1}{y^2}, b = xy$, ta có hệ: $\begin{cases} a^2 - 2b = -1 \\ a^2 - 3b^2 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2b - 1 \\ 3b^2 - 4b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \pm 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y^2} = 1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

- $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y^2} = -1 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{y} \\ y^2 + y + 1 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 + 3 = \frac{6x^5 y}{x^2 + 2} \\ 3y - x = \sqrt{\frac{4x - 3x^2 y - 9xy^2}{x + 3y}} \end{cases}$.

Lời giải. Từ phương trình thứ hai, ta có $\begin{cases} 3y \ge x \\ x + 3y \ne 0 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2) = 6x^5 y \\ (3y - x)^2 = \frac{4x - 3x^2 y - 9x^2 y^2}{x + 3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5 y \\ 9y^2 - 6xy + x^2 = \frac{4x}{x + 3y} - 3xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5 y \\ (x^2 - 3xy + 9y^2)(x + 3y) = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 + 8 = 6x^5 y \\ x^3 + 27y^3 = 4x \end{cases}$$

Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ, nên ta có: $\begin{cases} 1 + \frac{8}{x^6} = \frac{6y}{x} \\ 1 + \frac{27y^3}{x^3} = \frac{4}{x^2} \end{cases}$

Đặt $a = \frac{2}{x^2} > 0,\ b = \frac{3y}{x}$, ta thu được hệ: $\begin{cases} 1 + a^3 = 2b \\ 1 + b^3 = 2a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^3=2b \\ (a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^3-2a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ (a-1)(a^2+a-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=1, a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

- $a=b=1$, ta có: $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2}=1 \\ \dfrac{3y}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ v $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

- $a=b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \dfrac{3y}{x}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\sqrt{5}+1} \\ y=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6} \end{cases}$ v $\begin{cases} x=-\sqrt{\sqrt{5}+1} \\ y=-\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6} \end{cases}.$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của hệ đã cho là:

$$\left(x;y\right)=\left(\pm\sqrt{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\sqrt{\sqrt{5}+1};-\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}+1}}{6}\right).$$

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^4-\left(x^3-x\right)y^2-\left(y+12\right)x^2=-6 \\ 5x^4-\left(x^2-1\right)^2y^2-11x^2=-5 \end{cases}.$

Lời giải.

Nhận thấy, $x=0$ không là nghiệm của hệ nên chia hai vế của mỗi phương trình cho x^2 ta được:

$$\begin{cases} 6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y-12=0 \\ 5\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-11=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y=0 \\ 5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-1=0 \end{cases}$$

Đặt $a = x - \frac{1}{x}$, ta có hệ: $\begin{cases} 6a^2 - ay^2 - y = 0 \\ 5a^2 - a^2y^2 - 1 = 0 \end{cases}$.

Chia hai vế của hệ cho $a^2 \neq 0$ ta có: $\begin{cases} \frac{y^2}{a} + \frac{y}{a^2} = 6 \\ y^2 + \frac{1}{a^2} = 5 \end{cases}$.

Đặt $u = \frac{1}{a}$, ta có hệ: $\begin{cases} y^2u + u^2y = 6 \\ u^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uy(u+y) = 6 \\ (u+y)^2 - 2uy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + y = 3 \\ uy = 2 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được: $\begin{cases} u = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

- $u = 1 \Rightarrow a = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- $u = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x;y) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2\right), \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; 1\right).$$

4. Phương pháp hàm số

Trong phương pháp này, chúng ta dựa vào tính đơn điệu của hàm số để thiết lập mối quan hệ giữa các ẩn.

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(1+x^2) = x\left(1+y^2\right) & (1) \\ x^2 + 3y^2 = 1 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Từ phương trình (2) $\Leftrightarrow -1 \leq x, y \leq 1$ (*) .

Từ phương trình (1) ta thấy hệ có nghiệm (x;y) thì $xy > 0$ (**) do đó x,y luôn cùng dấu với nhau.

(1) $\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{x} = \frac{1+y^2}{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ trong đó $f(t) = \frac{t^2+1}{t}$ với $t \in [-1;1]$.

Ta có $f'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}\le 0\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $[-1;0)$ và $(0;1]$

Vì x,y cùng dấu nên ta có các trường hợp sau:

* Nếu $x,y\in(0;1]\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thay vào (2) $\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$.

* Nếu $x,y\in[-1;0)\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thay vào (2) $\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2})$.

Bình luận:

1) Ngoài cách giải trên, ta có thể biến đổi (1) như sau:

$(1)\Leftrightarrow x+xy^2=y+x^2y\Leftrightarrow x-y+xy(y-x)=0\Leftrightarrow(x-y)(xy-1)=0$. Từ đây kết hợp với (2) ta tìm được x,y.

2) Nếu trong hệ xuất hiện phương trình dạng $f(x;y)=f(y;x)$ thì ta có hai cách biến đổi phương trình này

Cách 1: Biến đổi về dạng $(x-y)g(x;y)=0$.

Cách 2: Biến đổi về dạng $h(x)=h(y)$, rồi ta sử dụng phương pháp hàm số. Tuy nhiên trong trường hợp này ta cần lưu ý tính chất sau của hàm đơn điệu.

"Nếu hàm số $y=f(t)$ (Có TXĐ D_f) đơn điệu trên ***<u>tập xác định</u>*** của nó thì $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Còn nếu D_f là hợp của các khoảng thì khi đó ta chỉ kết luận được là hàm số $y=f(t)$ đơn điệu trên ***<u>từng khoảng xác định</u>*** của nó và khi đó từ $f(x)=f(y)$ thì ta chưa suy ra được $x=y$! mà ta chỉ suy ra được khi x,y cùng thuộc một khoảng**."**

Chẳng hạn ta xét hàm $f(x)=\frac{-x^2+4x-3}{x-2}$ có $f'(x)=-1-\frac{1}{(x-2)^2}<0$ thế nhưng

$f(1)=f(3)=0$!

3) Trong cách 2 ở bài toán trên chúng ta cần phải có được hai nhận xét (*) và (**) vì có (*) ta mới kết luận được f(t) nghịch biến, có (**) ta mới xét hai trường hợp $x,y<0$ và $x,y>0$ nên từ $f(x)=f(y)$ mới có: $x=y$. Trong một số trường hợp, chúng ta không có được nhận

xét để đẩy hai biến về cùng một khoảng xác định thì ta sử dụng cách biến đổi thứ nhất.

Chẳng hạn, ta xét bài sau: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ x^3+1=2y \end{cases}$.

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x-2=(y-1)^3-3(y-1)-2 \ (1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1-(y-1)^2}+2=0 \ (2) \end{cases}$

Ta có: $y-1, x\in\left[-1;1\right]$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t-2, t\in\left[-1;1\right]$ có $f'(t)=3\left(t^2-1\right)\le 0 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x=y-1$

Thay vào (2) ta được: $x^2-2\sqrt{1-x^2}+2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1$

Vậy nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=x-y & (1) \\ x^2-12xy+9y^2+4=0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải. ĐK: $x, y\ge -\dfrac{1}{2}$.

Từ (2) ta thấy nếu hệ có nghiệm (x;y) thì $x.y\ge 0$ (*)

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-x=\sqrt{2y+1}-y \qquad (3)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t+1}-t$, ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}-1 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$

$\Rightarrow$ hàm f(t) đồng biến trên $(-\dfrac{1}{2};0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do (*) nên ta có các trường hợp sau

TH 1: $x, y \in [-\frac{1}{2}; 0) \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (do f(t) đồng biến).

TH 2: $x, y \in [0; +\infty) \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (do f(t) nghịch biến).

Tóm lại cả hai trường hợp đều dẫn đến $x = y$, tức là $(1) \Leftrightarrow x = y$ thay vào (2) ta được:

$2x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (do $x \geq -\frac{1}{2}$).

Vậy hệ có một cặp nghiệm : $x = y = \sqrt{2}$.

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình với $x, y \in (0; \frac{\pi}{4})$:

$$\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3} + 1 = 6\sqrt{2y^2 - 2y + 1} + 8y \end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có : $e^{x-y} = \frac{\sin x}{\sin y} \Leftrightarrow \frac{e^x}{\sin x} = \frac{e^y}{\sin y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$,

Trong đó $f(t) = \frac{e^t}{\sin t}$, $t \in (0; \frac{\pi}{4})$. Hàm f(t) liên tục trên $(0; \frac{\pi}{4})$ và có

$f'(t) = \frac{e^t \cos t(\tan t - 1)}{\sin^2} < 0 \quad \forall t \in (0; \frac{\pi}{4}) \Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$3\sqrt{8x^2+3} + 1 = 6\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + 8x \Leftrightarrow 3(\sqrt{8x^2+3} - 2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}) + 8x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(8x-1)}{\sqrt{8x^2+3} + 2\sqrt{2x^2-2x+1}} + 8x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \in (0; \frac{\pi}{4}).$$

Vậy hệ có cặp nghiệm duy nhất: $x = y = \frac{1}{8}$.

5. Phương pháp đánh giá

Để giải hệ phương trình ta có thể sử dụng phương pháp đánh giá. Thông thường ta xuất phát từ một phương trình hoặc kết hợp cả hai phương trình của hệ để ta thiết lập được một phương trình mà đó là trường hợp xảy ra dấu "=" của một bất đẳng thức. Từ đó ta tìm được mối quan hệ đơn giản hơn giữa hai ẩn. Cách làm này thường sử dụng khi các yếu tố xuất hiện trong phương trình khó có mối quan hệ biến đổi đại số.

Ví dụ 17. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x, y \ge 0$.

Ta có: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}(x+y)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+2\sqrt{xy}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = 2\sqrt{2}$ (do $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$)

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy hệ đã cho có một cặp nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Chú ý: Ta có thể giải hệ đã cho bằng cách giải của hệ đối xứng loại 1. Tuy nhiên, việc biến đổi tương đối phức tạp hơn.

Ví dụ 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2-2x+5}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt{y^2-2y+5}}=y^2+x \end{cases}$.

Lời giải.

* Ta thấy $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=y=0$ là một nghiệm của hệ.

* Với $xy \ne 0$ cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$x^2+y^2=2xy\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{(y-1)^2+4}}\right) \le 2xy\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2xy$$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2\le 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\le 0 \Leftrightarrow x=y=1$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy hệ có nghiệm là: $(x;y)=(0;0)$, $(1;1)$.

Ví dụ 19. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{y^2-8x+9}-\sqrt[3]{xy+12-6x}\le 1 & (1)\\ \sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}-\sqrt{y}=\sqrt{x+2} & (2)\end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có: $(2)\Leftrightarrow \sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}=\sqrt{y}+\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 0; x\ge -2\\ (x-y)^2+5x-3y+6=\frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{x+2})^2 \quad (3)\end{cases}$$

Ta có: $TV(3)=x^2-2xy+y^2+5x-3y+6$

$$=(x+2)^2-2y(x+2)+y^2+y+x+2$$

$$=(y-x-2)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x+2}\right)^2\ge \frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{x+2})^2=VP(3)$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow y=x+2 \Rightarrow (2)\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{x^2-4x+13}-\sqrt[3]{x^2-4x+12}\le 1 \Leftrightarrow \sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}\le 1 \quad (4).$$

Trong đó : $t=x^2-4x+10=(x-2)^2+6\ge 6 \Rightarrow \sqrt[3]{t+2}\ge 2$.

Ta có: $t+3=1+\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3=1+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3\ge 1+2\sqrt[3]{t+2}+\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^2$

$\Rightarrow t+3\ge\left(1+\sqrt[3]{t+2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}\ge 1 \quad (5)$. Đẳng thức có khi $t=6$.

Từ (4) và (5) ta suy ra $\sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}=1 \Leftrightarrow t=6 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$.

Ví dụ 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}$.

Lời giải: Đk : $x \ge \frac{1}{14}$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+16x^2-8x+1=\sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 80x^2+2x=2y\sqrt{14x-1} \end{cases}$

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta được:

$y^2-2y\sqrt{14x-1}+14x-1+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$

$\Leftrightarrow (y-\sqrt{14x-1})^2+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$ (1).

Ta có: $VT(1) \ge 96x^2-20x+2=\frac{1}{2}[3(8x-1)^2+8x+1] \ge \frac{1}{2}(8x+1)$

$$=\frac{1}{6}[16x+8x+1+2] \ge \frac{1}{2}\sqrt[3]{16x(8x+1)2}=\sqrt[3]{4x(8x+1)}=VP(1)$$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=\sqrt{14x-1}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Thử lại hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Lời kết: Ngoài những phương pháp đã trình bày ở trên, chúng ta còn có những phương pháp khác như lượng giác hóa, đặt ẩn phụ không triệt để…Nhưng chung quy lại thì để giải một hệ phương trình ta tìm cách tìm quan hệ đơn giản nhất giữa các ẩn để thực hiện phép thế và chuyển về phương trình một ẩn. Hy vọng với bài viết nhỏ, sẽ góp một phần nào đó giúp các em học sinh không còn lúng túng khi đứng trước một bài hệ phương trình. Những vấn đề đưa ra ở trên là do bản thân đúc rút được trong quá trình giảng dạy, nên nó chỉ mang tính chủ quan. Cuối cùng, chúng tôi nêu lên một số bài tập để các bạn luyện tập.

Bài tập: Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{1-y} = \sqrt{1-2x} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y^3 = 2xy^2 \\ x^3+y^9 = 2xy^4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^3y = 16 \\ 3x+y = 8 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2y = x^3+1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (\dfrac{x}{y})^2 + (\dfrac{x}{y})^3 = 12 \\ (xy)^2 + xy = 6 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x}{y}} + \sqrt{\dfrac{2y}{x}} = 3 \\ x-y+xy = 3 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x^2-xy+y^2 = 3(x-y) \\ x^2+xy+y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x^2+y^2 = 2xy+1 \\ x^5+y^3+1 = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ 2x+\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 3x^3-y^3 = \dfrac{1}{x+y} \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y) = 0 \\ xy(x^2+y^2)+2 = (x+y)^2 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y-4 = 0 \\ 2x^2+xy-y^2-5x+y+2 = 0 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x-y} = 8 \\ y\sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x^3+3xy^2 = 6xy-3x-49 \\ x^2-8xy+y^2 = 10y-25x-9 \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2 = 2x+9 \\ x^2+2xy = 6x+6 \end{cases}$

21) $\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$ 22) $\begin{cases} xy+x+y = x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1} = 2x-2y \end{cases}$

23) $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2 = 1 \\ x^3y-x^2+xy = -1 \end{cases}$ 24) $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y = 2 \end{cases}$ 25) $\begin{cases} \sqrt{4x+y}+\sqrt{2x+y} = 2 \\ \sqrt{2x+y}+x+y = 1 \end{cases}$

26) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1} = 1 \\ \sqrt{y}+\sqrt{x+1} = 1 \end{cases}$ 27) $\begin{cases} x+y \geq 4 \\ (x^4+y^4)(x^7+y^7) = x^{11}+y^{11} \end{cases}$

28) $\begin{cases} xy = y+2 \\ x+z = 2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}) \end{cases}$

29) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y = 24 \end{cases}$

30) $\begin{cases} y+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-12y+1} = \dfrac{1}{12}(x^2+17) \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} \end{cases}$

31) $\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^2(1-2x^2) = y^4 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2} = -x^2(x^4+1-2x^2-2xy^2) \end{cases}$

32) $\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{1}{2} \\ 4x(x^3-x^2+x-1) = y^2+2xy-2 \end{cases}$

33) $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2 = \sqrt{xy-x^2y^2} \\ 4xy^3+y^3+\dfrac{1}{2} \ge 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$

34) $\begin{cases} x^5+xy^4 = y^{10}+y^6 \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$

35) $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$

36) $\begin{cases} \sqrt[4]{x}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt[4]{y}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right) = 1 \end{cases}$

37) $\begin{cases} x(y^3-x^3) = 7 \\ x^4+x^3y+9y = y^3x+x^2y^2+9x \end{cases}$

38) $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} \end{cases}$

39) $\begin{cases} x^{y+1} = (y+1)^x \\ \sqrt{-4x^2+18x-20}+\dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8} = \sqrt{y+1} \end{cases}$

40) $\begin{cases} x^4-y^4 = 240 \\ x^3-2y^3 = 3(x^2-4y^2)-4(x-8y) \end{cases}$.