

BÀI TẬP : GIẢI PHƯƠNG TRÌNH-HỆ PHƯƠNG TRÌNH(SỬ DỤNG ĐẠO HÀM)

Bài 1: Giải phương trình

$$2^{2^x} + 3^{2^x} = 2^x + 3^{x+1} + x + 1$$

Giải:

Ta có $f(x) = 2^x + 3^x + x$ tăng trên $\mathbb{R}$, nên phương trình tương đương

$$f(2^x) = f(x+1) \Leftrightarrow 2^x = x+1$$

Hàm số $g(x) = 2^x - (x+1)$ xác định trên $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 2^x \ln 2 - 1 \Rightarrow g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \log_2(\log_2 e)$$

Vậy phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm trên $(-\infty; \log_2(\log_2 e))$ và $(\log_2(\log_2 e); +\infty)$

Thử trực tiếp tìm được hai nghiệm là $x = 0$; $x = 1$

Bài 2: Giải phương trình

$$\log_5 \left(\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} \right) = 5^{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} - 1} - 1$$

Giải :

Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} - 1 \geq 0$ (chứng minh)

phương trình tương đương $\log_5(t+1) = 5^t - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^t = y+1 \\ 5^y = t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^t = y+1 \\ 5^t - 5^y = y-t \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5^t = t+1 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow t = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$$

Bài 3: Giải phương trình

$$x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2x^4 - 4x^2 + 24x - 4}$$

Giải :

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2 = 0$$

Xét hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

Lập bảng biến thiên, suy ra hàm số có trục đối xứng $x = 1$

Do đó đặt $x = X + 1$, ta có phương trình

$$X^4 - 8X^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{4 - \sqrt{11}} \\ x = 1 \pm \sqrt{4 + \sqrt{11}} \end{cases}$$

Bài 4: Giải phương trình

$$(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3 \cdot 4^{\cos x}$$

Giải :

Đặt $\cos x = y$ $-1 \leq y \leq 1$

$$\Leftrightarrow (1 + y)(2 + 4^y) = 3 \cdot 4^y$$

$$\text{Đặt } f(y) = \frac{3 \cdot 4^y}{2 + 4^y} - y - 1 \Rightarrow f'(y) = \frac{6 \cdot \ln 4 \cdot 4^y}{(2 + 4^y)^2} - 1$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 16 \ln 4 \cdot 4^y = (2 + 4^y)^2$$

Đây là phương trình bậc hai theo 4^y , nên có không quá 2 nghiệm. Vậy theo định lý Roolle phương trình $f(y) = 0$ có không quá 3 nghiệm.

Ta có $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$ là 3 nghiệm của phương trình $f(y) = 0$

Suy ra phương trình có nghiệm $x = k2\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 5: Giải phương trình

$$\log_{2008} \frac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = x^6 - 3x^2 - 1$$

Giải :

$$\frac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = \frac{2008^{x^6 + x^2 + 1}}{2008^{4x^2 + 2}} \Leftrightarrow x^6 + x^2 + 1 = 4x^2 + 2 \text{ vì hàm số } f(x) = x \cdot 2008^x \text{ tăng trên } \mathbb{R}$$

Giải phương trình $x^6 - 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow u^3 - 3u - 1 = 0$ $u \geq 0$ phương trình chỉ có nghiệm trong (0,2)

$$\text{Đặt } u = 2 \cos t \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 3t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra phương trình có nghiệm } x = \pm \sqrt{2 \cos \frac{\pi}{9}}$$

Bài 6: Giải phương trình

$$\cos x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x} = \sin x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}$$

Giải :

$\cos x = 0$ và $\sin x = 0$ không là nghiệm. Xét $x \neq \frac{k\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\sin x}}{\sin x} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x}}{\cos x}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^t}{t}$ $|t| < 1$, $t \neq 0$. Hàm số $f(t)$ nghịch biến

$$\text{Suy ra } \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 7: Giải phương trình

$$(x+2)^2 + \log_2 \frac{x^2 + 4x + 5}{\sqrt{2x+3}} = 2\sqrt{2x+3}$$

Giải :

Đk $2x+3 > 0$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + 1 + \log_2 [(x+2)^2 + 1] = 2\sqrt{2x+3} + \log_2 2\sqrt{2x+3}$$

Đặt $f(t) = t + \log_2 t$ ($t > 0$)

Tương tự

Phương trình có nghiệm $x = -1$

Bài 8: Giải phương trình

$$\sin^{1975} x - \cos^{1975} x = \frac{1}{\sin^{2007} x} - \frac{1}{\cos^{2007} x}$$

Giải :

$$\sin^{1975} x - \frac{1}{\sin^{2007} x} = \cos^{1975} x - \frac{1}{\cos^{2007} x}$$

$|\sin x| = 1$; $|\cos x| = 1$ không là nghiệm của phương trình

Đặt hàm số $f(t) = t^{1975} - \frac{1}{t^{2007}}$ $t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

Ta có $f'(t) = 1975t^{1974} + \frac{2007}{t^{2008}} > 0$ nên hàm số tăng trên mỗi khoảng

$t \in (-1; 0)$: $f(t)$ chỉ nhận giá trị dương

$t \in (0; 1)$: $f(t)$ chỉ nhận giá trị âm

Nên $f(\sin x) = f(\cos x) \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 9: Giải phương trình

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 2x\right) = 2 \sin x \cdot \sin 3x + \cos^4 2x - \cos^4 x$$

Giải :

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 2x\right) = 2(\cos^2 x - \cos^2 2x) + \cos^4 2x - \cos^4 x$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 2x - 2\cos^2 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 2x\right) = \cos^4 x - 2\cos^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 x\right)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t + \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$ $0 \leq t \leq 1$. $f(t)$ giảm

$$f(\cos^2 2x) = f(\cos^2 x) \Leftrightarrow \cos^2 2x = \cos^2 x \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

Bài 10: Giải phương trình

$$2^{x^2-34x+93} (x^2 - 34x + 376)^3 [x^2 - 34x + 376 + 3\log_2(x^2 - 34x + 376)] = 35$$

Giải :

Đặt $t = x^2 - 34x + 376$ ($t \geq 87$)

$$\Leftrightarrow 2^t \cdot t^3 \log_2(2^t \cdot t^3) = 35 \cdot 2^{283} = 2^{256} \cdot 256^3 \log_2(256^t \cdot 256^3)$$

Hàm số $f(t) = 2^t \cdot t^3 \log_2(2^t \cdot t^3)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow t = 256 \Leftrightarrow x^2 - 34x + 376 = 256 \Leftrightarrow x = 30 ; x = 4$$

Bài 11: Giải phương trình

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} = \cos 2x + \log_4(4\cos^3 2x - \cos 6x - 1)$$

Giải :

Đặt $y = \cos 2x$ ($\frac{1}{3} < y \leq 1$)

$$\Leftrightarrow 2^{y-1} + \frac{1}{2} = y + \log_4(3y-1)$$

Đặt $t = \log_2(3y-1) \Leftrightarrow 2^t = 3y-1$ ($t \leq 1$)

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 2^y = 2y + t - 1 \\ 2^t = 3y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2^y + y = 2^t + t$$

Xét hàm số $g(u) = 2^u + u$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2^t = 3t - 1 \Leftrightarrow f(t) = 2^t - 3t + 1 = 0$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t - 3t + 1$, sử dụng định lý Roll cm phương trình có không quá 3 nghiệm

Phương trình có nghiệm $t = 1$ $t = 3(L)$, suy ra phương trình có nghiệm $x = k\pi$

Bài 12: Giải phương trình

$$64^x - 8.343^{x-1} = 8 + 12.4^x.7^{x-1}$$

Giải :

Đặt $a = 2$; $b = -4^x$; $c = 2.7^{x-1}$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b+c) \left[\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow a+b+c = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 4^x + 2.7^{x-1} = 0$$

Xét hàm số $f(x) = 2 - 4^x + 2.7^{x-1} \Rightarrow f'(x) = -4^x \ln 4 + \frac{2}{7} \cdot 7^x \ln 7$

Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất nên theo định lý Lagrange phương trình $f(x) = 0$ không có quá 2 nghiệm phân biệt

Phương trình có nghiệm $x = 1$; $x = 2$

Bài 13: Giải phương trình

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$$

Giải :

Điều kiện $x < -1$ v $3 < x$

$$\Leftrightarrow \log_{8+4\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{7+4\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$$

Đặt $a = 7 + 4\sqrt{3}$ và $t = x^2 - 2x - 3$

$$\Leftrightarrow \log_{a+1}(t+1) = \log_a t$$

Đặt $y = \log_a t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{a+1} \right)^y + \left(\frac{1}{a+1} \right)^y = 1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ là nghiệm duy nhất}$$

Phương trình có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$

Bài 14: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_5 x = \log_3 (\sqrt{y} + 4) \\ \log_5 y = \log_3 (\sqrt{z} + 4) \\ \log_5 z = \log_3 (\sqrt{x} + 4) \end{cases}$$

Giải :

Hệ phương trình không đổi qua phép hoán vị vòng quanh $\Rightarrow x = y = z$

Từ đó ta có $\log_5 x = \log_3 (\sqrt{x} + 4)$, đặt $t = \log_5 x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^t + 4\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$$

Phương trình có đúng 1 nghiệm $t = 2$ do hàm số $f(t) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^t + 4\left(\frac{1}{3}\right)^t = 1$ nghịch biến

Hệ phương trình có 1 nghiệm $x = y = z = 25$

Bài 15: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \frac{3}{2} \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 \end{cases}$$

Giải :

Từ phương trình (2) $\Leftrightarrow x(xy + 2) = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1-2x}{x^2}$

$$(1) \Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1-x^2}{2x^2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1-2x}{2x^2}$$

xét hàm số $f(t) = 2^t + \frac{t}{2} \Rightarrow f'(t) = 2^t \ln 2 + \frac{1}{2} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2x^2} = \frac{1-2x}{2x^2}$$

Hệ phương trình có 1 nghiệm $x = 2$, $y = -\frac{3}{4}$

Bài 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2) + 1 \end{cases}$$

Giải :

Đk $x+2y+6 > 0$ và $x+y+2 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \ln(x^2+1) + x^2 + 1 = \ln(y^2+1) + y^2 + 1$$

Hàm số $f(t) = \ln t + t$ $t > 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm y$$

Nếu $x = -y$ (2) $\Leftrightarrow \log_3(6-x) = 1 \Leftrightarrow x = 3$; $y = -3$

Nếu $x = y$

$$(2) \Leftrightarrow 3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6u$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{2u} \\ x+1 = 2^{3u} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u = 1$$

Hàm số $g(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra $u = 1$ là nghiệm duy nhất

Hệ phương trình có 2 nghiệm $x = 2$, $y = -\frac{3}{4}$ và $x = 7$; $y = 7$

Bài 17: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{\frac{8y^2+1}{2}} = 3(2\sqrt{y} - \sqrt{x}) \\ 2^{(x+y)^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x+y} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Giải :

Đk $x \geq 0$; $y \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2+1} + 3\sqrt{x} = 2^{(4y)^2+1} + 3\sqrt{4y} \\ 2^{(x+y)^2+1} + 3\sqrt{x+y} = 7 \end{cases}$$

Hàm số $f(x) = 2^{x^2+1} + 3\sqrt{x}$ đồng biến trên $[0; \infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(4y) \\ f(x+y) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Bài 18: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x = \log_2(8\cos z - \cos 2x - 5) \\ \cos y = \log_2(8\cos x - \cos 2y - 5) \\ \cos z = \log_2(8\cos y - \cos 2z - 5) \end{cases}$$

Giải :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8Z = 2^X + 2X^2 + 4 \\ 8X = 2^Y + 2Y^2 + 4 \\ 8Y = 2^Z + 2Z^2 + 4 \end{cases}$$

Hàm số $f(t) = \frac{1}{8}(2^t + 2t^2 + 4)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\Leftrightarrow X = Y = Z = \frac{1}{8}(2^X + 2X^2 + 4)$$

Giải bằng đồ thị $\Leftrightarrow \begin{cases} X = Y = Z = 1 \\ X = Y = Z = 2 \end{cases} (I)$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $x = k2\pi$, $y = l2\pi$; $z = m2\pi$

Bài 19: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_2(1+3\cos x) = \log_3(\sin y) + 2 \\ \log_2(1+3\sin y) = \log_3(\cos x) + 2 \end{cases}$$

Giải :Đk $\cos x$; $\sin y \geq 0$

$$\Rightarrow \log_2(1+3\cos x) + \log_3(\cos x) = \log_2(1+3\sin y) = \log_3(\sin y)$$

Hàm số $f(t) = \log_2(1+3t) + \log_3 t \Rightarrow f'(t) = \frac{3}{(1+3t)\ln 2} + \frac{2}{t\ln 3} > 0$ đồng biến trên $\forall t > 0$

$$\Rightarrow \sin y = \cos x$$

Thay vào phương trình (1) $\Rightarrow \log_2(1+3\cos x) = \log_3(\cos x) + 2$ Lập BBT hàm số $g(v) = \log_2(1+3v) - \log_3 v$ với $v = \cos x \in (0, 1]$ phương trình chỉ có 2 nghiệm

$$\cos x = 1, \cos x = \frac{1}{3}$$

Bài 20: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 y - y^4 = 28 \\ x^2 y + 2xy^2 + y^3 = 18\sqrt{2} \end{cases}$$

Giải:

Hệ tương đương

$$\begin{cases} y(x^3 - y^3) = 28 & (1) \\ y(x+y)^2 = 18\sqrt{2} & (2) \end{cases} \Rightarrow x > y > 0$$

$$(2) \Rightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{y}} - y, \text{ thay vào (1) được: } y \left[\left(\frac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt{y}} - y \right)^3 - y^3 \right] = 28 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{y} > 0, (3) \text{ trở thành: } t^2 \left[\left(\frac{3\sqrt[4]{8}}{t} - t^2 \right)^3 - t^6 \right] = 28 \Leftrightarrow t^9 - (3\sqrt[4]{8} - t^3)^3 + 28t = 0$$

Xét hàm $f(t) = t^9 - (3\sqrt[4]{8} - t^3)^3 + 28t$ ta có:

$$f'(t) = 9t^8 + 9t^2(3\sqrt[4]{8} - t^3) + 28 > 0, \forall t > 0$$

Chúng ta chứng tỏ hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ phương trình $f(t) = 0$ nếu có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$ thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất. Từ đó suy ra hệ phương trình đã cho nếu có nghiệm (x_0, y_0) thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất của hệ.

Nếu chọn $x = 2y$ thì từ (1) ta có: $y^4 = 4 \Leftrightarrow y = \sqrt{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$. Rõ ràng cặp số $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ thỏa (2).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Bài 21: Tìm số nghiệm của nằm trong khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$e^{2\cos^2 x} (8\sin^6 x - 12\sin^4 x + 10\sin^2 x) = e + \frac{5}{2}$$

Giải :

Đặt $t = \sin^2 x = y \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\Leftrightarrow e^{2(1-t)}(8t^3 - 12t^2 + 10t) = e + \frac{5}{2}$$

Xét hàm số $f(x) = e^{2(1-t)}(8t^3 - 12t^2 + 10t)$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{2(1-t)}[(24t^2 - 24t + 10) - 2(8t^3 - 12t^2 + 10t)] = -2e^{2(1-t)} \cdot g(t)$$

Với $g(t) = 8t^3 - 24t^2 + 22t - 5 \Rightarrow g'(t) = 2(12t^2 - 24t + 11)$

Lập bảng biến thiên, suy ra phương trình $g(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = u, 0 < u < 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}$

t	0	$1 - \frac{\sqrt{3}}{6}$	1
g'	+	0	-
g	-5		1

t	0	u	1
f'	+	0	-
f	0		6

Lập bảng biến thiên hàm số $f(t)$, suy ra phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = v, 0 < v < u$

Suy ra phương trình $\sin x = \pm\sqrt{v}$ có 4 nghiệm phân biệt $x \in (0, 2\pi)$