Võ Quốc Bá Cẩn

An Inequality collection

Let the solutions say your method!

The second version

Lời cảm ơn

Quyển tuyển tập này chắc chắn sẽ không thể thực hiện được nếu không có sự đóng góp của những người bạn của tôi. Họ đã trực tiếp động viên tôi thực hiện, gửi cho tôi những bài toán hay giúp tôi có thể tuyển tập lại một cách tốt nhất có thể các bài toán bất đẳng thức. Xin được nêu ra đây những người bạn thân thiết đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình thực hiện quyển tuyển tập này

1. **Nguyễn Văn Dũng** - Giảng viên Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự Hà Nội.

2. **Trần Quang Hùng** - Cao học toán trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, ĐHQG Hà Nội.

3. **Cao Minh Quang** - Giáo viên trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

4. **Võ Thành Văn** - Lớp 12 Toán, trường THPT Chuyên, ĐHKH Huế.

5. **Nguyễn Mạnh Dũng** - Lớp 12 Toán, khối Phổ Thông Chuyên Toán – Tin, trường ĐHKHTN, ĐHQH Hà Nội.

6. **Trần Anh Tuấn** - đang cập nhật thông tin.

Những bài bất đẳng thức từ các cuộc thi giải toán

Bài O1. *Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$0 \le ab+bc+ca-abc \le 2.$$

(USAMO 2000)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Bất đẳng thức bên trái là hiển nhiên, bởi vì từ giả thiết, ta suy ra có ít nhất một số trong ba số a, b, c không lớn hơn 1. Giả sử số đó là c, khi đó ta sẽ có

$$ab+bc+ca-abc = ab(1-c)+c(a+b) \ge 0.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Thay $abc = 4-(a^2+b^2+c^2)$ vào, ta có thể viết lại bất đẳng thức này thành $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \le 6$. Ta sẽ dùng phương pháp phản chứng để chứng minh bất đẳng thức này. Giả sử tồn tại một bộ số (a,b,c) gồm các số hạng không âm sao cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$ và $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca > 6$. Khi đó, ta sẽ có

$$\begin{aligned} 4 = a^2+b^2+c^2+abc &= \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{6} + \frac{6\sqrt{6}abc}{6\sqrt{6}} \\ &> \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} + \frac{6\sqrt{6}abc}{(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^{3/2}}, \end{aligned}$$

suy ra

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) > \frac{3\sqrt{6}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}}.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức *Schur* bậc 4 (ở dạng phân thức), ta thấy

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) \le \frac{6abc(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca},$$

nên từ trên ta suy ra

$$\frac{6abc(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} > \frac{3\sqrt{6}abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}}.$$

Điều này chứng tỏ rằng $abc > 0$ và $\sqrt{2}(a+b+c) > \sqrt{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}$. Điều này vô lí, bởi vì ta luôn có

$$3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-2(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0.$$

Như vậy, không thể nào tồn tại các số a, b, c thỏa mãn giả thiết của đề bài sao cho $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca > 6$, hay nói một cách khác, với mọi a, b, c không âm sao cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$, ta phải có

$$ab+bc+ca-abc \le 2.$$

Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy bất đẳng thức bên trái đạt được dấu bằng khi (a,b,c) là một hoán vị của bộ số $(2,0,0)$; và bất đẳng thức bên phải đạt được dấu bằng khi $(a,b,c)=(1,1,1)$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị của bộ số $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$. ■

Lời giải 2. Đây là một chứng minh rất hay và đặc sắc cho bất đẳng thức bên phải. Trong ba số a,b,c, luôn tồn tại ít nhất 2 số sao cho hiệu của chúng khi trừ cho 1 có cùng dấu với nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử hai số đó là a và b, khi đó ta có $c(a-1)(b-1)\ge 0$, suy ra $abc\ge ac+bc-c$. Mặt khác, theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $4=a^2+b^2+c^2+abc\ge 2ab+c^2+abc$, suy ra $ab\le 2-c$. Từ đây, ta thu được

$$ab+bc+ca-abc\le (2-c)+bc+ca-(ac+bc-c)=2.$$

■

Lời giải 3 (V. Q. B. Cẩn). Xin được giới thiệu thêm cùng bạn đọc một chứng minh khác cho bất đẳng thức bên phải. Từ giả thiết, ta dễ dàng chứng minh được tồn tại các số không âm x,y,z sao cho $(x+y)(y+z)(z+x)>0$ và $a=\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}, b=\frac{2y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c=\frac{2z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}$. Với phép đặt thuần nhất này, ta có thể đưa bài toán về chứng minh

$$2\sum_{cyc}\frac{xy}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}}-\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}2\sum_{cyc}\frac{xy}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}}&\le\sum_{cyc}\frac{xy}{x+y}\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)\\&=\sum_{cyc}\frac{xy}{(x+y)(x+z)}+\sum_{cyc}\frac{xy}{(y+z)(y+x)}\\&=\sum_{cyc}\frac{xy}{(x+y)(x+z)}+\sum_{cyc}\frac{zx}{(x+y)(x+z)}\\&=\sum_{cyc}\frac{x(y+z)}{(x+y)(x+z)}=1+\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.\end{aligned}$$

Vì thế bất đẳng thức trên là hiển nhiên đúng, và phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Bài O2. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c\ge ab+bc+ca.$$

(Việt Nam, 1996)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Từ giả thiết, suy ra ta có thể đặt $a=\frac{2x}{y+z}, b=\frac{2y}{z+x}$ và $c=\frac{2z}{x+y}$ với x,y,z là các số thực dương. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{2xy}{(x+z)(y+z)}+\frac{2yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{2zx}{(z+y)(x+y)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}VP&\le\sum_{cyc}xy\left[\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}\right]=\sum_{cyc}\frac{xy}{(z+x)^2}+\sum_{cyc}\frac{xy}{(y+z)^2}\\&=\sum_{cyc}\frac{zx}{(y+z)^2}+\sum_{cyc}\frac{xy}{(y+z)^2}=\sum_{cyc}\frac{x}{y+z}=VT.\end{aligned}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$, tức là $a=b=c=1$. ■

Lời giải 2 (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ dùng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng tồn tại các số dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca+abc=4$ và $a+b+c<ab+bc+ca$. Khi đó, ta có $\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}<1$, dẫn đến

$$\begin{aligned}4&=(ab+bc+ca)\cdot 1+abc\cdot 1\\&>(ab+bc+ca)\cdot\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^2+abc\cdot\left(\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\right)^3\\&=\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}.\end{aligned}$$

Từ đây, ta tìm được

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)>\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2}.$$

Nhưng mà theo bất đẳng thức *Schur* bậc 3 ở dạng phân thức thì $2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\le\frac{9abc}{a+b+c}$. Điều này dẫn đến

$$\frac{9abc}{a+b+c}>\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2},$$

suy ra $abc>0$ và $9(ab+bc+ca)^2>(a+b+c)^4$ (mâu thuẫn bởi vì ta luôn có $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ theo $AM-GM$). Bởi vậy, ta không thể có $a+b+c<ab+bc+ca$ với mọi $a,b,c>0$ thỏa mãn giả thiết của đề bài. Điều này chứng tỏ rằng $a+b+c\ge ab+bc+ca$, đây chính là điều phải chứng minh. ■

Lời giải 3 (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ sử dụng phương pháp dồn biến để chứng minh bất đẳng thức đã cho. Để ý rằng ngoài điểm đẳng thức là $a=b=c=1$ thì bất đẳng thức đã cho còn có một điểm "nhạy cảm" là $a=b\to 2, c\to 0$ (cùng các hoán vị). Điều này gợi cho ta giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ và dùng phép dồn biến để đưa hai biến a,b về bằng nhau và bằng một số t dương nào đó. Muốn vậy, việc trước tiên ta phải làm đó là đảm bảo giả thiết của bài toán, tức là bộ số (t,t,c) phải thỏa mãn $t^2+2tc+t^2c=ab+bc+ca+abc=4$. Vì ta cần dồn biến từ (a,b,c) về (t,t,c) nên ta phải chứng minh

$$a+b+c-ab-bc-ca\ge 2t+c-t^2-2tc,$$

tương đương

$$(a+b-2t)(1-c)+(t^2-ab)\ge 0. \qquad (*)$$

Mặt khác, từ cách chọn của t, ta có $c(a+b-2t)=(c+1)(t^2-ab)$. Ta sẽ chứng minh $a+b-2t$ và t^2-ab là những số không âm. Thật vậy, giả sử $a+b-2t<0$, khi đó ta cũng có $t^2-ab<0$. Điều này dẫn đến $ab>t^2>\frac{(a+b)^2}{4}\ge ab$ (vô lí). Vì vậy, ta phải có $a+b-2t\ge 0$ và $t^2-ab\ge 0$. Ngoài ra, từ giả thiết của c, dễ thấy $c\le 1$. Và như thế, bất đẳng thức $(*)$ là hiển nhiên đúng. Phép dồn biến đã được hoàn tất, công việc còn lại của ta chỉ là chứng minh $2t+c-t^2-2tc\ge 0$ với $t^2+2tc+t^2c=4$. Đây là một công việc rất đơn giản, bởi vì từ $t^2+2tc+t^2c=4$, ta tìm được $c=\frac{2-t}{t}\ge 0$, dẫn đến

$$2t+c-t^2-2tc=2t+\frac{2-t}{t}-t^2-2(2-t)=\frac{(2-t)(t-1)^2}{t}\ge 0.$$

■

Lời giải 4 (V. Q. B. Cẩn). Dễ thấy rằng trong ba số a,b,c có ít nhất hai số có hiệu khi trừ cho 1 là những số cùng dấu với nhau. Giả sử hai số đó là a,b, khi đó ta sẽ có $c(a-1)(b-1)\ge 0$, dẫn đến $abc\ge ac+bc-c$. Từ đây, ta thu được

$$a+b+c+abc\ge (a+b)(c+1).$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta lại có

$$4 = abc + c(a+b) + ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \cdot c + c(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4},$$

suy ra

$$c \ge \frac{4 - \frac{(a+b)^2}{4}}{\frac{(a+b)^2}{4} + (a+b)} = \frac{4-(a+b)}{a+b} = \frac{4}{a+b} - 1.$$

Cộng 1 vào hai vế của bất đẳng thức này rồi nhân cho $a+b>0$, ta thu được ngay $(a+b)(c+1) \ge 4$. Do đó, kết hợp với trên, ta được $a+b+c+abc \ge (a+b)(c+1) \ge 4 = ab+bc+ca+abc$, hay nói một cách khác

$$a+b+c \ge ab+bc+ca.$$

■

Bài O3. *Với a,b,c là các số thực dương bất kì, hãy tìm tất cả các số thực k để cho bất đẳng thức sau đúng*

$$\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right) \ge \left(k+\frac{1}{2}\right)^3.$$

(Việt Nam, 2009)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đầu tiên, ta cho $a=b=1$, bất đẳng thức đã cho trở thành $\left(k+\frac{1}{1+c}\right)^2\left(k+\frac{c}{2}\right) \ge \left(k+\frac{1}{2}\right)^3$, tương đương

$$\frac{(c-1)^2(4k^2c+4k^2+2k-1)}{8(c+1)^2} \ge 0.$$

Đến đây, cho $c \to 0$, ta thấy bất đẳng thức chỉ đúng nếu $4k^2+2k-1 \ge 0$. Ta sẽ chứng minh rằng, nghiệm của bất phương trình này chính là tập hợp tất cả các giá trị của k thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là chứng minh với $4k^2+2k-1 \ge 0$ thì

$$\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right) \ge \left(k+\frac{1}{2}\right)^3.$$

Thật vậy, đặt $x = \frac{2a}{b+c}, y = \frac{2b}{c+a}, z = \frac{2c}{a+b}$ thì hiển nhiên $xy+yz+zx+xyz = 4$ và bất đẳng thức trên được viết lại thành $(2k+x)(2k+y)(2k+z) \ge (2k+1)^3$. Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta dễ thấy $xyz \le 1$. Từ đó, sử dụng kết quả bài O2, ta thu được

$$\begin{aligned}(2k+x)(2k+y)(2k+z) &= 8k^3 + 4k^2(x+y+z) + 2k(xy+yz+zx) + xyz \\ &\ge 8k^3 + 4k^2(xy+yz+zx) + 2k(xy+yz+zx) + xyz \\ &= 8k^3 + (4k^2+2k)(4-xyz) + xyz \\ &= 8k^3 + 16k^2 + 8k - (4k^2+2k-1)xyz \\ &\ge 8k^3 + 16k^2 + 8k - (4k^2+2k-1) = (2k+1)^3.\end{aligned}$$

Như vậy, phép chứng minh của ta đã được hoàn tất. Điều này cũng chứng tỏ rằng khẳng định của ta ở trên là đúng, tức là tập hợp tất cả các giá trị cần tìm của k chính là nghiệm của bất phương trình $4k^2+2k-1 \ge 0$. ■

Bài O4. *Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn*

$$\frac{1}{a^4+1} + \frac{1}{b^4+1} + \frac{1}{c^4+1} + \frac{1}{d^4+1} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$abcd \geq 3.$$

(Latvia 2002)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{a^4+1} + \frac{1}{b^4+1} + \frac{1}{c^4+1} + \frac{1}{d^4+1} \\ &= \frac{\frac{1}{a^4}}{\frac{1}{a^4}+1} + \frac{\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{b^4}+1} + \frac{\frac{1}{c^4}}{\frac{1}{c^4}+1} + \frac{\frac{1}{d^4}}{\frac{1}{d^4}+1} \geq \frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)^2}{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^4}+4}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}+\frac{1}{d^4}+4 \geq \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)^2$, tức là

$$2 \geq \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2d^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{b^2d^2} + \frac{1}{c^2d^2}.$$

Mà theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2d^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2d^2}+\frac{1}{c^2d^2} \geq \frac{6}{abcd}$ nên kết hợp với trên, ta dễ dàng suy ra được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\sqrt[4]{3}$. ■

Lời giải 2. Đặt $x=\frac{1}{a^4+1}, y=\frac{1}{b^4+1}, z=\frac{1}{c^4+1}$ và $t=\frac{1}{d^4+1}$ thì ta có $x+y+z+t=1$ và

$$a^4 = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z+t}{x}, \quad b^4 = \frac{z+t+x}{y}, \quad c^4 = \frac{t+x+y}{z}, \quad d^4 = \frac{x+y+z}{t}.$$

Từ đó, để chứng minh bất đẳng thức $abcd \geq 3$, ta thấy rằng ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{y+z+t}{x} \cdot \frac{z+t+x}{y} \cdot \frac{t+x+y}{z} \cdot \frac{x+y+z}{t} \geq 81.$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng bởi vì theo $AM-GM$, ta có

$$\frac{y+z+t}{x} \cdot \frac{z+t+x}{y} \cdot \frac{t+x+y}{z} \cdot \frac{x+y+z}{t} \geq \frac{3\sqrt[3]{yzt}}{x} \cdot \frac{3\sqrt[3]{ztx}}{y} \cdot \frac{3\sqrt[3]{txy}}{z} \cdot \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{t} = 81.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Bài O5. *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn*

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

(Andrei Ciupan, Chọn đội tuyển Romania dự thi Junior BMO 2007)

Lời giải 1 (Andrei Ciupan). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, dễ thấy $(a+b+1)(a+b+c^2) \geq (a+b+c)^2$. Từ đó dẫn đến

$$1 \leq \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq \frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2} + \frac{b+c+a^2}{(a+b+c)^2} + \frac{c+a+b^2}{(a+b+c)^2},$$

suy ra

$$(a+b+c)^2 \leq 2(a+b+c) + a^2 + b^2 + c^2,$$

tức là

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Lời giải 2 (Cezar Lupu). Từ giả thiết, sử dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}
2 &\geq \left(1-\frac{1}{a+b+1}\right)+\left(1-\frac{1}{b+c+1}\right)+\left(1-\frac{1}{c+a+1}\right)\\
&=\frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1}\\
&\geq \frac{[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^2}{(a+b)(a+b+1)+(b+c)(b+c+1)+(c+a)(c+a+1)}\\
&=\frac{2(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)}{(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)+(a+b+c)}.
\end{aligned}$$

Từ đây, ta suy ra được

$$(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)+(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca),$$

tức là

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. ■

Lời giải 3 (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ dùng phương pháp phản chứng để chứng minh bất đẳng thức này. Giả sử tồn tại các số dương a,b,c sao cho $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \geq 1$ và $a+b+c < ab+bc+ca$. Khi đó, ta có $1 < \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$, dẫn đến

$$\frac{1}{a+b+1} < \frac{\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}}{a+b+\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}} = \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}.$$

Và ta thu được

$$\sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} > 1,$$

tương đương

$$1 > \sum_{cyc}\left[1-\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}\right],$$

hay là

$$1 > \sum_{cyc}\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}.$$

Tuy nhiên, theo các bất đẳng thức *AM – GM* và *Cauchy Schwarz* thì

$$\begin{aligned}
VP &\geq \frac{3}{4}\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}[(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca]}\\
&=\frac{3(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2+(a+b+c)^2} = 1 \text{ (mâu thuẫn)}.
\end{aligned}$$

Vì vậy, ta không thể có điều giả sử trên, tức là với mọi a,b,c dương thỏa mãn $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \geq 1$ thì bắt buộc ta phải có $a+b+c \geq ab+bc+ca$. Phép chứng minh được hoàn tất. ■

Bài O6. *Cho $n \geq 2$ là một số nguyên bất kì. Tìm hằng số C nhỏ nhất để bất đẳng thức sau*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2) \leq C(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4,$$

luôn đúng với mọi số thực không âm $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

(IMO 1999)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Với $n=2$, cho $x_1=x_2=1$, ta dễ thấy $C \geq \frac{1}{8}$. Xét trường hợp $n \geq 3$, cho $x_1=x_2=1, x_3=\cdots=x_n=0$, ta cũng tìm được $C \geq \frac{1}{8}$. Ta sẽ chứng minh rằng $\frac{1}{8}$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất của C để bất đẳng thức trên đúng, tức là

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2) \leq \frac{1}{8}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^4.$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2) &\leq \sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2+\sum_{k\neq i,k\neq j}x_k^2\right) = \left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(2\sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j+\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4.\end{aligned}$$

Như thế, khẳng định của ta đã được chứng minh xong. Điều này cho phép ta đi đến kết luận hằng số C nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $C_{\min}=\frac{1}{8}$. ■

Bài O7. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c,x,y,z, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z} \leq \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}.$$

(KMO Weekend Program 2007)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại như sau

$$\left(\frac{a+x}{4}-\frac{ax}{a+x}\right)+\left(\frac{b+y}{4}-\frac{by}{b+y}\right)+\left(\frac{c+z}{4}-\frac{cz}{c+z}\right) \geq \frac{a+b+c+x+y+z}{4}-\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z},$$

hay là

$$\frac{(a-x)^2}{a+x}+\frac{(b-y)^2}{b+y}+\frac{(c-z)^2}{c+z} \geq \frac{(a+b+c-x-y-z)^2}{a+b+c+x+y+z}.$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta dễ thấy

$$VT \geq \frac{[(a-x)+(b-y)+(c-z)]^2}{(a+x)+(b+y)+(c+z)} = VP,$$

và như thế, bất đẳng thức của ta đã được chứng minh xong. ■

Lời giải 2 (Sanghoon). Áp dụng bất bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}[(a+b+c)^2x+(x+y+z)^2a](a+x) &\geq \left[(a+b+c)\sqrt{xa}+(x+y+z)\sqrt{ax}\right]^2\\ &= ax(a+b+c+x+y+z)^2,\end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\frac{ax}{a+x} \leq \frac{(a+b+c)^2x+(x+y+z)^2a}{(a+b+c+x+y+z)^2}.$$

Bằng cách thiết lập hai bất đẳng thức tương tự cho hai biểu thức còn lại, ta thu được

$$\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z} \leq \frac{(a+b+c)^2(x+y+z)+(x+y+z)^2(a+b+c)}{(a+b+c+x+y+z)^2} = \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}.$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài O8. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1.$$

(Belarus 1998)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Để ý rằng bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}-2\right),$$

và như thế, nó có thể được viết lại thành

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-2(a+b+c) \geq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta dễ thấy $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq a+b+c$. Vì thế, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-(a+b+c) \geq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)},$$

hay là

$$\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c}+\frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có $\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(b-c)^2}{c} \geq \frac{(a-c)^2}{b+c}$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a} \geq \frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)}$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng bởi vì nó tương đương với

$$\frac{b(a+b+c)}{a(a+b)(b+c)} \geq 0.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Lời giải 2. Đặt $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{b}$, ta có

$$\frac{c}{a} = \frac{y}{x}, \quad \frac{a+b}{b+c} = \frac{x+1}{1+y}, \quad \frac{b+c}{a+b} = \frac{1+y}{1+x}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} \ge \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} + 1,$$

tương đương

$$x^3y^2 + x^2 + x + y^3 + y^2 \ge x^2y + 2xy^2 + 2xy.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{x^3y^2 + x}{2} \ge x^2y, \quad \frac{x^3y^2 + x + y^3 + y^3}{2} \ge 2xy^2, \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 \ge 2xy$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài O9. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c, ta đều có*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

(Titu Andreescu, MOSP 1999)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{c^2}{c^2(a+b)} + \frac{a^2}{a^2(b+c)} + \frac{b^2}{b^2(c+a)} + \frac{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2}{2abc} \\ &\ge \frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a)+2abc} = \frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} = VP. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Lời giải 2 (V. Q. B. Cẩn). Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$, ta có thể viết lại nó dưới dạng

$$\sum_{cyc}(a+b)(a+c) + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt[3]{abc}} \ge \left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2,$$

hay là

$$ab+bc+ca + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt[3]{abc}} \ge 2\sqrt[3]{abc}(a+b+c) + \sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Vì $ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (theo $AM-GM$) nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt[3]{abc}} + 2\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 2\sqrt[3]{abc}(a+b+c),$$

tương đương

$$(a+b)(b+c)(c+a) + 4abc \ge 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a+b+c).$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta sẽ giả sử $a \ge b \ge c$, và viết lại nó như sau

$$(b+c)\left[(a+b)(a+c)-4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right] \ge 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\left(a-\sqrt[3]{abc}\right),$$

hay là

$$(b+c)\left(a^2+ab+bc+ca-4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right) \ge 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\left(a-\sqrt[3]{abc}\right).$$

Lại sử dụng đánh giá $ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ một lần nữa, ta thấy rằng bất đẳng thức trên được suy ra từ

$$(b+c)\left(a^2-\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right) \ge 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\left(a-\sqrt[3]{abc}\right), \quad \text{tương đương} \quad (b+c)\left(a+\sqrt[3]{abc}\right) \ge 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$(b+c)\left(a+\sqrt[3]{abc}\right) \ge 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{a\sqrt[3]{abc}} = 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Do đó, bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng và phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Bài O10. *Giả sử a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

(USAMO 2003)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Để ý rằng $3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}$, nên ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \ge 1.$$

Mà theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* thì

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} \ge \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+2(b^2+c^2)}=\frac{(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2 \ge a^2+b^2+c^2.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ bất đẳng thức sau $\frac{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2}{2} \ge c^2$ (đúng theo *Cauchy Schwarz*) và hai bất đẳng thức tương tự. Như vậy, bài toán của ta đã được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Lời giải 2. Bất đẳng thức đã cho là một bất đẳng thức thuần nhất bậc 0. Vì thế, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$, khi đó, nó được viết lại thành

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \le 8.$$

Bây giờ, sử dụng đánh giá sau

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}=\frac{1}{3}+\frac{2(4a+1)}{9a^2-6a+3}=\frac{1}{3}+\frac{2(4a+1)}{(3a-1)^2+2} \le \frac{1}{3}+\frac{2(4a+1)}{2},$$

ta thu được

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2}\le \frac{1}{3}+(4a+1)+\frac{1}{3}+(4b+1)+\frac{1}{3}+(4c+1)=8.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Bài O11. *Cho x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 là các số thực thỏa mãn $x_1,x_2>0, x_1y_1>z_1^2$ và $x_2y_2>z_2^2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\ge \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}.$$

(IMO 1968)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Từ giả thiết, dễ thấy y_1,y_2 là các số dương. Điều này cho phép ta sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* như sau

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)=x_1y_1+x_2y_2+(x_1y_2+x_2y_1)\ge x_1y_1+x_2y_2+2\sqrt{x_1y_1x_2y_2}.$$

Từ đánh giá này, đặt $x_1y_1-z_1^2=a>0$ và $x_2y_2-z_2^2=b>0$, ta thu được

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 &\ge x_1y_1+x_2y_2+2\sqrt{x_1y_1x_2y_2}-(z_1+z_2)^2\\ &=(a+z_1^2)+(b+z_2^2)+2\sqrt{(a+z_1^2)(b+z_2^2)}-(z_1+z_2)^2\\ &\ge (a+z_1^2)+(b+z_2^2)+2\left(\sqrt{ab}+z_1z_2\right)-(z_1+z_2)^2\\ &=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2.\end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 8 \text{ (hiển nhiên đúng theo } AM-GM).$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2, y_1=y_2$ và $z_1=z_2$. ■

Lời giải 2 (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$(z_1+z_2)^2=\left(\sqrt{x_1}\cdot\frac{z_1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}\cdot\frac{z_2}{\sqrt{x_2}}\right)^2\le (x_1+x_2)\left(\frac{z_1^2}{x_1}+\frac{z_2^2}{x_2}\right),$$

suy ra

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2 &\ge (x_1+x_2)\left(y_1+y_2-\frac{z_1^2}{x_1}-\frac{z_2^2}{x_2}\right)\\ &=(x_1+x_2)\left(\frac{x_1y_1-z_1^2}{x_1}+\frac{x_2y_2-z_2^2}{x_2}\right)\\ &\ge 2\sqrt{x_1x_2}\cdot 2\sqrt{\frac{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}{x_1x_2}}\\ &=4\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}.\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM – GM* thì

$$\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\ge \frac{2}{\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}}.$$

Vì thế

$$[(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2]\left(\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\right)\ge 8,$$

tức là

$$\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\ge\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}.$$

Bài toán của ta đã được chứng minh xong. ■

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được bất đẳng thức tổng quát hơn vẫn còn đúng

Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n$ và $z_1,z_2,\ldots,z_n$ $(n\ge 2)$ là các số thực sao cho $x_i>0$ và $x_iy_i>z_i^2$ thì

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_iy_i-z_i^2}\ge\frac{n^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n y_i\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^n z_i\right)^2}.$$

♣

Bài O12. *Chứng minh rằng với mọi số thực $x_1,x_2,\ldots,x_n$, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$\sum_{1\le i<j\le n}|x_i+x_j|\ge\frac{n-2}{2}\sum_{i=1}^n|x_i|.$$

(Chọn đội tuyển Romania dự thi IMO 2006)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Với $n=2$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Với $n=3$, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$|x_1+x_2|+|x_2+x_3|+|x_3+x_1|\ge\frac{1}{2}(|x_1|+|x_2|+|x_3|).$$

Trong ba số x_1,x_2,x_3 có ít nhất hai số cùng dấu với nhau, giả sử đó là x_2 và x_3, khi đó ta có $|x_2+x_3|=|x_2|+|x_3|$, suy ra bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$|x_1+x_2|+|x_1+x_3|+\frac{1}{2}|x_2+x_3|\ge\frac{1}{2}|x_1|.$$

Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối, ta có

$$\begin{aligned}|x_1+x_2|+|x_1+x_3|+\frac{1}{2}|x_2+x_3|&\ge\frac{1}{2}(|x_1+x_2|+|x_1+x_3|+|x_2+x_3|)\\&\ge\frac{1}{2}|(x_1+x_2)+(x_1+x_3)-(x_2+x_3)|=|x_1|\ge\frac{1}{2}|x_1|.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho cũng đúng cho $n=3$. Bây giờ ta xét trường hợp $n\ge 4$. Rõ ràng nếu tất cả các số x_i đều cùng dấu với nhau (tức là cùng âm hoặc cùng không âm) thì bất đẳng thức đã cho là hiển nhiên. Vì thế, trong chứng minh của ta, ta chỉ cần xét trường hợp thứ ba, tức là trong dãy x_i tồn tại vừa số âm lẫn số không âm. Do vai trò ngang nhau giữa các biến nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x_1\le\cdots\le x_k\le 0\le x_{k+1}\le\cdots\le x_n$. Nếu $2\le k\le n-2$ thì ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n}|x_i+x_j| &= \sum_{1\le i<j\le k}|x_i+x_j|+\sum_{k+1\le i<j\le n}|x_i+x_j|+\sum_{\substack{1\le i\le k\\ k+1\le j\le n}}|x_i+x_j|\\
&= k\sum_{i=1}^{k}|x_i|+(n-k)\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}|x_i+x_j|\\
&\ge k\sum_{i=1}^{k}|x_i|+(n-k)\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|+\sum_{i=1}^{k}\left|\sum_{j=k+1}^{n}(x_i+x_j)\right|\\
&= k\sum_{i=1}^{k}|x_i|+(n-k)\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|+\sum_{i=1}^{k}\left|(n-k)x_i+\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|\right|\\
&\ge k\sum_{i=1}^{k}|x_i|+(n-k)\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|+\left|\sum_{i=1}^{k}\left[(n-k)x_i+\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|\right]\right|\\
&= k\sum_{i=1}^{k}|x_i|+(n-k)\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|+\left|(n-k)\sum_{i=1}^{k}|x_i|-k\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|\right|.
\end{aligned}$$

Nếu $k=1$ hoặc $k=n-1$ thì thực hiện tương tự, ta cũng có đánh giá như trên. Như vậy, ta cần chứng minh

$$k\sum_{i=1}^{k}|x_i|+(n-k)\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|+\left|(n-k)\sum_{i=1}^{k}|x_i|-k\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|\right|\ge\frac{n-2}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i|+\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|\right).$$

Đặt $A=\sum_{i=1}^{k}|x_i|$ và $B=\sum_{j=k+1}^{n}|x_j|$ thì bất đẳng thức này trở thành

$$kA+(n-k)B+|(n-k)A-kB|\ge\frac{n-2}{2}(A+B).$$

Nếu $(n-k)A\ge kB$, ta có

$$\begin{aligned}
VT-VP&=kA+(n-k)B+(n-k)A-kB-\frac{n-2}{2}A-\frac{n-2}{2}B=\frac{n+2}{2}A+\frac{n+2-4k}{2}B\\
&\ge\frac{n+2}{2}\cdot\frac{k}{n-k}B+\frac{n+2-4k}{2}B=\frac{(n-2k)^2+2n}{2(n-k)}B\ge 0.
\end{aligned}$$

Nếu $(n-k)A\le kB$, ta có

$$\begin{aligned}
VT-VP&=kA+(n-k)B-(n-k)A+kB-\frac{n-2}{2}A-\frac{n-2}{2}B=\frac{n+2}{2}B+\frac{4k+2-3n}{2}A\\
&\ge\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n-k}{k}A+\frac{4k+2-3n}{2}A=\frac{(n-2k)^2+2n}{2k}A\ge 0.
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài O13. *Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $a\le b\le c$ và x,y,z là các số dương bất kì. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2\ge(ax+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right).$$

(Olympic toán Áo 1971)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$4ac(ax+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right) \le \left[(ax+by+cz)+ac\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\right]^2.$$

Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$(a+c)(x+y+z) \ge (ax+by+cz)+ac\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),$$

hay là

$$\frac{y(a-b)(b-c)}{b} \ge 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $a \ge b \ge c$. Do đó, phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Bài O14. *Cho $n+1$ số thực $x_0, x_1, \ldots, x_n$ thỏa mãn $x_0 = 0, x_i \ge 0$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ và $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Chứng minh rằng*

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} \le \frac{\pi}{2}.$$

(Olympic toán Trung Quốc 1996)

Lời giải. Đầu tiên, ta sẽ chứng minh vế bất đẳng thức bên trái. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} \ge 2\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1+x_0+\cdots+x_{i-1}+x_i+\cdots+x_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Vế bên trái được chứng minh xong. Bây giờ, ta sẽ đi đến chứng minh vế bên phải. Từ giả thiết cho phép ta đặt $x_0 + x_1 + \cdots + x_i = \sin\alpha_i \left(0 \le \alpha_i \le \frac{\pi}{2}\right)$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó, dễ thấy

$$(1+x_0+\cdots+x_{i-1})(x_i+\cdots+x_n) = 1-(x_0+\cdots+x_{i-1})^2 = 1-\sin^2\alpha_i = \cos^2\alpha_i,$$

và như vậy, bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1}}{\cos\alpha_{i-1}} \le \frac{\pi}{2}.$$

Ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1} &= 2\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\cos\frac{\alpha_i+\alpha_{i-1}}{2} \le 2\sin\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\cos\alpha_{i-1}\\ &\le 2\cdot\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{2}\cdot\cos\alpha_{i-1} = (\alpha_i-\alpha_{i-1})\cos\alpha_{i-1},\end{aligned}$$

suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1}}{\cos\alpha_{i-1}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{(\alpha_i-\alpha_{i-1})\cos\alpha_{i-1}}{\cos\alpha_{i-1}} = \alpha_n - \alpha_0 = \alpha_n \le \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài O15. *Chứng minh rằng với mọi $0 < x < \frac{\pi}{4}$, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$(\cos x)^{\cos x} > (\sin x)^{\sin x}.$$

(MOSP 2004)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng sau

$$(\cos x)^{\cot x} > \sin x, \quad \text{hay là} \quad (\cos^2 x)^{\cot x} > \sin^2 x.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Bernoulli* với để ý rằng $\cot x > 1\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, ta được

$$(\cos^2 x)^{\cot x} = (1-\sin x)^{\cot x}(1+\sin x)^{\cot x} \ge (1-\sin x\cdot\cot x)(1+\sin x\cdot\cot x) = \sin^2 x.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sin x = 0$ hoặc $\cot x = 1$, nhưng cả hai điều này là không thể xảy ra do $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Vì vậy, ta đi đến

$$(\cos^2 x)^{\cot x} > \sin^2 x.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Bài O16. *Cho $n \ge 2$ là một số nguyên dương cho trước và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương bất kì. Đặt*

$$S_n = \min\left\{x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right\}.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của S_n theo n.

(Tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2009)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ chứng minh rằng giá trị lớn nhất của S_n là $2\cos\frac{\pi}{n+2}$. Thật vậy, giả sử $S_n > 2\cos\frac{\pi}{n+2}$, khi đó ta có

$$\min\left\{x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right\} > 2\cos\frac{\pi}{n+2}.$$

Đặt $a_i = \frac{\sin\frac{(i+1)\pi}{n+2}}{\sin\frac{i\pi}{n+2}}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ thì ta dễ thấy $a_i > 0$ và

$$a_1 = \frac{1}{a_1}+a_2 = \cdots = \frac{1}{a_{n-1}}+a_n = \frac{1}{a_n} = 2\cos\frac{\pi}{n+2}.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng $x_i > a_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, theo giả thiết phản chứng, ta sẽ có

$$2\cos\frac{\pi}{n+2} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{a_n} = 2\cos\frac{\pi}{n+2}.$$

Đó là điều vô lí, và ta sẽ có ngay điều phải chứng minh. Để chứng minh khẳng định trên, ta hãy để ý rằng nếu có một số k $(k \le n-1)$ nào đó mà $x_k > a_k$ thì

$$2\cos\frac{\pi}{n+2} = \frac{1}{a_k}+a_{k+1} > \frac{1}{x_k}+a_{k+1}.$$

Mà theo giả thiết phản chứng thì $\frac{1}{x_k}+x_{k+1} > 2\cos\frac{\pi}{n+2}$ nên kết hợp với trên, ta có ngay $x_{k+1} > a_{k+1}$. Điều này chứng tỏ rằng nếu khẳng định của ta đúng với k thì nó cũng đúng cho mọi $i = k, k+1, \ldots, n$. Nhưng rõ ràng $x_1 > a_1$ (theo giả thiết phản chứng) nên từ đó, ta suy ra được $x_i > a_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Từ chứng minh này, kết hợp với lập luận ở trên, ta thấy rằng đánh giá $S_n > 2\cos\frac{\pi}{n+2}$ là không thể xảy ra, hay nói một cách khác, với mọi $n \ge 2$ thì $S_n \le 2\cos\frac{\pi}{n+2}$. Dễ thấy đẳng thức xảy ra được khi $x_i = a_i$ nên đây cũng chính là giá trị lớn nhất của S_n. Bài toán được giải quyết xong. ■

Bài O17. *Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực thỏa mãn $|a_i| \le 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. Chứng minh rằng tồn tại một số $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho*

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k| \le \frac{2k+1}{4}.$$

(Tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2009)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đặt $b_0 = 0, b_i = a_1 + \cdots + ia_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ thì ta có $a_i = \frac{b_i - b_{i-1}}{i}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Như vậy, từ giả thiết ta có $|b_i - b_{i-1}| \le i$ và

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - b_{i-1}}{i} = -\frac{b_0}{1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{b_i}{i} - \frac{b_i}{i+1} \right) + \frac{b_n}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{i(i+1)} + \frac{b_n}{n}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $b_1 > 0$, bởi vì nếu $b_1 = 0$ thì bài toán hiển nhiên được thỏa mãn, còn nếu $b_1 < 0$ thì ta có thể thay a_i bởi $-a_i$, lúc này giả thiết của bài toán vẫn không đổi nhưng ta sẽ có $b_1' > 0$. Bây giờ, từ giả thiết này, ta thấy rằng trong dãy $b_2, \dots, b_n$ tồn tại ít nhất một số không dương, ta gọi k là chỉ số nhỏ nhất sao cho $b_k \le 0$, khi đó ta có $b_{k-1} > 0$, và

$$k \ge |b_k - b_{k-1}| = |b_k| + |b_{k-1}|.$$

Nếu $|b_k| > \frac{2k+1}{4}$ và $|b_{k-1}| > \frac{2(k-1)+1}{4}$ thì ta có

$$|b_k| + |b_{k-1}| > \frac{2k+1}{4} + \frac{2(k-1)+1}{4} = k \text{ (mâu thuẫn với trên).}$$

Vì vậy ta phải có $|b_k| \le \frac{2k+1}{4}$ hoặc $|b_{k-1}| \le \frac{2(k-1)+1}{4}$. Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài O18. *Cho $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n$ là các số thực bất kì. Chứng minh rằng*

$$1 + \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2 \le \frac{4}{3} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right).$$

(Dự tuyển IMO 1970)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \le \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)}.$$

Vì vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{4}{3}(1 + a^2)(1 + b^2) \ge a^2 + b^2 + 2ab + 1,$$

trong đó $a = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$ và $b = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$. Ta có

$$4(1 + a^2)(1 + b^2) - 3(a^2 + b^2 + 2ab + 1) = (a - b)^2 + (2ab - 1)^2 \ge 0,$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u_i = v_i$ và $u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \frac{1}{2}$. ■

Bài O19. *Chứng minh rằng với mọi a,b,c,d dương, ta đều có*

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4.$$

(Dự tuyển IMO 1971)

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{c+a}{c+d}=(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}\right)\geq\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{b+d}{b+c}+\frac{d+b}{d+a}\geq\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}.$$

Cộng tương ứng vế với vế hai bất đẳng thức này, ta dễ dàng thu được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=c$ và $b=d$. ■

Bài O20. *Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\geq\frac{3}{2}.$$

(Phạm Kim Hùng, Tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2009)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta dễ thấy

$$VT\cdot[a^2(b+c^2)+b^2(c+a^2)+c^2(a+b^2)]\geq\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về

$$2\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này cho 3, rồi sử dụng các đánh giá sau

$$\begin{aligned}6\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2&=6\sum_{cyc}a^3+12\sum_{cyc}ab\sqrt{ab}\geq 6\sum_{cyc}a^3+24\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{a+b}\\&=2\left(\sum_{cyc}a^3\right)\left(\sum_{cyc}a\right)+8\sum_{cyc}\frac{a^2b^2(a+b+c)}{a+b}\\&=2\left(\sum_{cyc}a^3\right)\left(\sum_{cyc}a\right)+8\sum_{cyc}a^2b^2+8abc\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b},\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}9(a^2b+b^2c+c^2a)=3(a+b+c)(a^2b+b^2c+c^2a)&=3(a^3b+b^3c+c^3a)+3\sum_{cyc}a^2b^2+3abc\sum_{cyc}a\\&\leq(a^2+b^2+c^2)^2+3\sum_{cyc}a^2b^2+3abc\sum_{cyc}a,\end{aligned}$$

ta có thể đưa bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$2\left(\sum_{cyc}a^3\right)\left(\sum_{cyc}a\right)+8\sum_{cyc}a^2b^2+8abc\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b}\ge\sum_{cyc}a^4+14\sum_{cyc}a^2b^2+3abc\sum_{cyc}a,$$

tương đương

$$\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)+abc\sum_{cyc}a-6\sum_{cyc}a^2b^2\ge 4abc\left(\sum_{cyc}a-2\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b}\right).$$

Theo bất đẳng thức *Schur* bậc 4 thì

$$\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2).$$

Vì vậy, bất đẳng thức trên được suy ra từ

$$3\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)-6\sum_{cyc}a^2b^2\ge 4abc\left(\sum_{cyc}a-2\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b}\right).$$

Không mấy khó khăn, ta có thể dễ dàng viết lại bất đẳng thức này dưới dạng $x(b-c)^2+y(c-a)^2+z(a-b)^2\ge 0$, trong đó $x=3bc-\frac{2abc}{b+c}$ và các biểu thức y,z tương tự. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó ta dễ thấy $z\ge y\ge x$, lại có

$$x+y=3ac+3bc-\frac{2abc}{b+c}-\frac{2abc}{a+c}\ge 3ac+3bc-\frac{2abc}{b}-\frac{2abc}{a}=ac+bc>0,$$

nên $x+y>0$, từ đó ta suy ra được $z\ge y>0$. Đến đây, với chú ý rằng $(a-c)^2\ge(b-c)^2$, ta có

$$x(b-c)^2+y(c-a)^2+z(a-b)^2\ge(x+y)(b-c)^2+z(a-b)^2\ge 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài O21. *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0 và $a+b+c=1$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\left(bc+\frac{a}{b+c}\right)\left(ca+\frac{b}{c+a}\right)\left(ab+\frac{c}{a+b}\right)\le\frac{1}{4}.$$

(Tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2009)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Khi đó, ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}\left(ca+\frac{b}{c+a}\right)\left(ab+\frac{c}{a+b}\right)&=a^2bc+\frac{c^2a}{a+b}+\frac{b^2a}{a+c}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\\&=a^2bc+b^2+c^2-\frac{bc^2}{a+b}-\frac{b^2c}{a+c}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\\&=(b+c)^2+bc\left[a^2-2-\frac{c}{a+b}-\frac{b}{a+c}+\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)}\right]\\&=(b+c)^2+bc\left[a^2-1+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\right].\end{aligned}$$

Đặt $A = a^2 - 1 + \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$ (dễ thấy $A \le 0$), bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại dưới dạng

$$[(b+c)^2 + Abc]\left(bc + \frac{a}{b+c}\right) \le \frac{1}{4}, \quad \text{tương đương} \quad a(b+c) + Ab^2c^2 + bc\left[\frac{aA}{b+c} + (b+c)^2\right] \le \frac{1}{4}.$$

Ta có $\frac{1}{4} - a(b+c) = \frac{(b+c-a)^2}{4} \ge 2bc(b+c-a)^2$ và $Ab^2c^2 \le 0$ nên bất đẳng thức này được suy ra từ

$$bc\left[\frac{aA}{b+c} + (b+c)^2\right] \le 2bc(b+c-a)^2, \quad \text{hay là} \quad 2(b+c-a)^2 \ge \frac{aA}{b+c} + (b+c)^2.$$

Đến đây, ta đặt $t = \frac{b+c}{2} \le \frac{1}{3}$ thì dễ thấy $\frac{bc}{(a+b)(a+c)} \le \frac{t^2}{(a+t)^2}$ nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$2(2t-a)^2 \ge \frac{a}{2t}\left[a^2 - 1 + \frac{t^2}{(a+t)^2}\right] + 4t^2.$$

Thay $a = 1 - 2t$ vào, bất đẳng thức này trở thành

$$2(4t-1)^2 \ge \frac{1-2t}{2t}\left[(1-2t)^2 - 1 + \frac{t^2}{(1-t)^2}\right] + 4t^2,$$

tương đương

$$2(4t-1)^2 - 4t^2 \ge (1-2t)(2t-2) + \frac{t(1-2t)}{2(1-t)^2},$$

hay là

$$2(16t^2 - 11t + 2) \ge \frac{t(1-2t)}{2(1-t)^2}.$$

Ta có $4(1-t)^2 \ge 4\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} > 1$ và $16t^2 - 11t + 2 - t(1-2t) = 2(1-3t)^2 \ge 0$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ cùng các hoán vị tương ứng. ■

Bài O22. *Cho p, q là các số tự nhiên thỏa mãn $q \ge p$. Xét $n+1$ $(n \ge 2)$ số thực $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = 1$ thỏa mãn*

$$a_k \le \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Chứng minh rằng

$$(p+1)\sum_{k=1}^{n-1} a_k^p \ge (q+1)\sum_{k=1}^{n-1} a_k^q.$$

(Chọn đội tuyển Romania dự thi IMO 2006)

Lời giải. Từ giả thiết, ta dễ thấy $0 = a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n = 1$, và $0 \le a_1 = a_1 - a_0 \le a_2 - a_1 \le \cdots \le a_n - a_{n-1} = 1 - a_{n-1}$. Một nhận xét hữu ích giúp ta có thể đưa bài toán về trường hợp khá đơn giản, đó là ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $q = p + 1$ là đủ. Bây giờ, sử dụng công thức tổng *Abel*, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_k^p = a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^p - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\sum_{i=1}^{k} a_i^p.$$

Để ý rằng $a_n = 1$ nên $\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{p+1} + 1$ và $a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^p = \sum_{k=1}^{n} a_k^p = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^p + 1$, vì thế

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k^{p+1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^p - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{i=1}^{k} a_i^p.$$

Do $a_i - a_{i-1} \le a_{k+1} - a_k$ với mọi $i = 1, \ldots, k$, nên

$$(a_{k+1} - a_k) \sum_{i=1}^{k} a_i^p \ge \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) a_i^p.$$

Lại có $pa_i^{p+1} + a_{i-1}^{p+1} \ge (p+1)a_{i-1}a_i^p$ (theo bất đẳng thức $AM - GM$ suy rộng), nên

$$(a_i - a_{i-1})a_i^p \ge \frac{a_i^{p+1} - a_{i-1}^{p+1}}{p+1}.$$

Từ những lập luận này, ta thu được

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} a_k^{p+1} &\le \sum_{k=1}^{n-1} a_k^p - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) a_i^p \\
&\le \sum_{k=1}^{n-1} a_k^p - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^{p+1} - a_{i-1}^{p+1}}{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_k^p - \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{p+1}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$(p+1) \sum_{k=1}^{n-1} a_k^p \ge (p+2) \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{p+1},$$

hay nói một cách khác, bất đẳng thức đã cho đúng trong trường hợp $q = p+1$. Vì vậy, phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p = q$, hoặc $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, hoặc $p = 0, q = 1$ và $a_k = \frac{k}{n}$. ■

Bài O23. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d, ta đều có*

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c} + \frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d} + \frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a} + \frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b} \ge 0.$$

(Dự tuyển IMO 2008)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đặt $P(a,b,c,d)$ là vế trái của bất đẳng thức đã cho. Không mất tính tổng quát, ta thấy rằng ta có thể giả sử $(a-c)(b-d) \ge 0$. Thật vậy, nếu $(a-c)(b-d) \le 0$, ta lấy $a_1 = b, b_1 = c, c_1 = d, d_1 = a$ thì ta cũng có $P(a_1,b_1,c_1,d_1) = P(a,b,c,d)$, và lúc này ta lại có $(a_1 - c_1)(b_1 - d_1) = -(a-c)(b-d) \ge 0$. Bây giờ, ta hãy để ý rằng

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c} + \frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a} = \frac{(a-c)^2}{a+b+c} - \frac{(a+2c)(a-c)(b-d)}{(a+b+c)(a+c+d)},$$

và

$$\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d} + \frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b} = \frac{(b-d)^2}{b+c+d} + \frac{(b+2d)(a-c)(b-d)}{(b+c+d)(d+a+b)} \ge \frac{(b-d)^2}{b+c+d}.$$

Do đó, bất đẳng thức đã cho được suy ra từ

$$\frac{(a-c)^2}{a+b+c}+\frac{(b-d)^2}{b+c+d}\ge\frac{(a+2c)(a-c)(b-d)}{(a+b+c)(a+c+d)}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{(a-c)^2}{a+b+c}+\frac{(b-d)^2}{b+c+d}\ge\frac{2(a-c)(b-d)}{\sqrt{(a+b+c)(b+c+d)}}.$$

Vì thế, ta chỉ cần chứng minh được

$$2(a+c+d)\sqrt{\frac{a+b+c}{b+c+d}}\ge a+2c.$$

Nếu $a\ge d$ thì ta có $\sqrt{\frac{a+b+c}{b+c+d}}\ge 1$ và $2(a+c+d)\ge a+2c$ nên bất đẳng thức này là hiển nhiên. Nếu $d\ge a$ thì ta dễ thấy $\sqrt{\frac{a+b+c}{b+c+d}}\ge\sqrt{\frac{a+c}{c+d}}$ nên bất đẳng thức trên là hệ quả của

$$2(a+c+d)\sqrt{a+c}\ge(a+2c)\sqrt{c+d}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}2(a+c+d)\sqrt{a+c}&=2\sqrt{a+c+d}\sqrt{(a+c+d)(a+c)}\ge 2(a+c)\sqrt{a+c+d}\\&\ge 2(a+c)\sqrt{c+d}\ge(a+2c)\sqrt{c+d},\end{aligned}$$

nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=c$ và $b=d$. ■

Bài O24. *Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $abcd=1$ và $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$. Chứng minh rằng*

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}>a+b+c+d.$$

(Dự tuyển IMO 2008)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Sử dụng các bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\right)&=(a+c)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\\&=(a+c)(b+d)\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}\right)\\&\ge\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\left(\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bd}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bd}}\right)\\&\ge\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\left(\frac{2}{a+c}+\frac{2}{b+d}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{ac}\sqrt{bd}}}\\&=(a+b+c+d)+(a+b+c+d)\\&>\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)+(a+b+c+d).\end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}>a+b+c+d.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Bài O25. *Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{2}\le a^2+b^2+c^2+d^2\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau*

$$Q=(a-2b+c)^2+(b-2c+d)^2+(b-2a)^2+(c-2d)^2.$$

(Chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 1993)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Trước hết ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của Q. Đặt $k=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$(a-2b+c)^2=\left(\frac{a}{k}\cdot k+(-b)+(-b)+c\right)^2\le(k^2+3)\left(\frac{a^2}{k^2}+2b^2+c^2\right),$$
$$(b-2c+d)^2=\left(b+(-c)+(-c)+\frac{d}{k}\cdot k\right)^2\le(k^2+3)\left(b^2+2c^2+\frac{d^2}{k^2}\right),$$
$$(b-2a)^2=\left(\frac{a}{k}\cdot k+\frac{a}{k}\cdot k+(-b)\right)^2\le(2k^2+1)\left(\frac{2a^2}{k^2}+b^2\right),$$
$$(c-2d)^2=\left(\frac{d}{k}\cdot k+\frac{d}{k}\cdot k+(-c)\right)^2\le(2k^2+1)\left(\frac{2d^2}{k^2}+c^2\right).$$

Cộng tương ứng vế với vế các bất đẳng thức này, ta thu được

$$Q\le 5\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(a^2+d^2)+5(k^2+2)(b^2+c^2).$$

Do $k=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ nên $1+\frac{1}{k^2}=k^2+2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, vì thế ta có

$$Q\le\frac{15+5\sqrt{5}}{2}(a^2+d^2+b^2+c^2)\le\frac{15+5\sqrt{5}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{a}{k^2}=-b=c=-\frac{d}{k^2}\\ a^2+b^2+c^2+d^2=1\end{cases}$ tức là $a=\pm\frac{k^2}{\sqrt{2(k^4+1)}}, b=-\frac{a}{k^2}, c=\frac{a}{k^2}, d=-a$. Vì đẳng thức có thể xảy ra nên $\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$ cũng chính là giá tị lớn nhất của Q.

Bây giờ, ta sẽ đi tìm giá trị nhỏ nhất của Q. Để tiến hành, ta sẽ đặt $\begin{cases}a-2b+c=-5x\\ b-2c+d=-5y\\ b-2a=-5z\\ c-2d=-5t\end{cases}$, khi đó ta có $\begin{cases}a=3x+2y+4z+t\\ b=6x+4y+3z+2t\\ c=4x+6y+2z+3t\\ d=2x+3y+z+4t\end{cases}$. Đến đây, áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* một lần nữa, ta có

$$\begin{aligned}
(3x+2y+4z+t)^2 &= \left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}y+2k\cdot\frac{2z}{k}+k\cdot\frac{t}{k}\right)^2\\
&\le (5k^2+5)\left(3x^2+2y^2+\frac{4z^2}{k^2}+\frac{t^2}{k^2}\right),\\
(6x+4y+3z+2t)^2 &= \left(\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}x+2\cdot 2y+\sqrt{3}k\cdot\frac{\sqrt{3}z}{k}+\sqrt{2}k\cdot\frac{\sqrt{2}t}{k}\right)^2\\
&\le (10+5k^2)\left(6x^2+4y^2+\frac{3z^2}{k^2}+\frac{2t^2}{k^2}\right),\\
(4x+6y+2z+3t)^2 &= \left(2\cdot 2x+\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}y+\sqrt{2}k\cdot\frac{\sqrt{2}z}{k}+\sqrt{3}k\cdot\frac{\sqrt{3}t}{k}\right)^2\\
&\le (10+5k^2)\left(4x^2+6y^2+\frac{2z^2}{k^2}+\frac{3t^2}{k^2}\right),\\
(2x+3y+z+4t)^2 &= \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}y+k\cdot\frac{z}{k}+2k\cdot\frac{2t}{k}\right)^2\\
&\le (5k^2+5)\left(2x^2+3y^2+\frac{z^2}{k^2}+\frac{4t^2}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

Cộng tương ứng vế với vế các bất đẳng thức này, ta thu được

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \le 25(3k^2+5)(x^2+y^2)+25\left(2+\frac{3}{k^2}\right)(z^2+t^2).$$

Do $k=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ nên $3k^2+5=2+\frac{3}{k^2}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. Lại có theo giả thiết thì $a^2+b^2+c^2+d^2\ge\frac{1}{2}$, nên từ trên ta thu được

$$Q=25(x^2+y^2+z^2+t^2)\ge\frac{1}{7+3\sqrt{5}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x=y=\frac{z}{k^2}=\frac{t}{k^2} \\ 25(x^2+y^2+z^2+t^2)=\frac{1}{7+3\sqrt{5}} \end{cases}$ tức là $x=y=\pm\frac{1}{5\sqrt{\left(14+6\sqrt{5}\right)(k^4+1)}}$ và $z=t=k^2x=k^2y$, từ đây ta dễ dàng tìm được a,b,c,d thỏa mãn đẳng thức xảy ra. Và cũng vì đẳng thức có thể xảy ra nên $\frac{1}{7+3\sqrt{5}}$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất của Q. Bài toán được giải quyết hoàn toàn. ■

Bài O26. *Cho $n\ge 3$ là một số nguyên cho trước và $x_i>1$ $(1\le i\le n)$ là các số thực thỏa mãn*

$$\frac{x_i^2}{x_i-1}\ge S=\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \forall i=1,2,\ldots,n.$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể có của S.[1]

(Olympic toán Romania 2008)

[1]Trong đề bài gốc, bài toán được cho giả thiết là $n\ge 2$ và yêu cầu tìm $\sup S$, nhưng xét thấy với $n=2$ thì rõ ràng $\sup S=+\infty$ nên chúng tôi đã sửa lại thành như trên.

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Từ giả thiết, ta dễ thấy

$$\frac{x_i^2}{x_i-1} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i = x_i + \sum_{k\neq i} x_k > x_i + (n-1) \geq x_i + 2,$$

suy ra $x_i^2 > (x_i-1)(x_i+2)$, hay là $1 < x_i < 2$ với mọi $i = 1,2,\dots,n$. Để giải bài toán này, ta cần xét trường hợp sau: $S > 4$, khi đó ta sẽ chứng minh rằng $x_i \leq \frac{S-\sqrt{S^2-4S}}{2}$. Thật vậy, bất đẳng thức $\frac{x_i^2}{x_i-1} \geq S$ có thể được viết dưới dạng tương đương là $f(x_i) = x_i^2 - Sx_i + S \geq 0$. Ta thấy rằng $f(x_i)$ là một tam thức bậc hai của x_i với hệ số cao nhất dương và có hai nghiệm phân biệt là $\frac{S-\sqrt{S^2-4S}}{2}$ và $\frac{S+\sqrt{S^2-4S}}{2}$. Vì vậy, để $f(x_i) \geq 0$, ta cần có $x_i \leq \frac{S-\sqrt{S^2-4S}}{2}$ hoặc $x_i \geq \frac{S+\sqrt{S^2-4S}}{2}$. Tuy nhiên, khả năng thứ hai là không thể xảy ra, bởi vì nếu nó xảy ra ta sẽ có $x_i > \frac{S}{2}$, mà $x_i < 2$ nên ta thu được $S < 4$, điều này mâu thuẫn với giả thiết mà ta đang xét, đó là $S > 4$. Như vậy, ta phải có

$$x_i \leq \frac{S-\sqrt{S^2-4S}}{2} \quad \forall i = 1,2,\dots,n.$$

Từ đó, ta suy ra được

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n \cdot \frac{S-\sqrt{S^2-4S}}{2}.$$

Đến đây, bằng một chút biến đổi đơn giản, ta dễ dàng thu được $S \leq \frac{n^2}{n-1}$. Trong trường hợp thứ hai, $S \leq 4$, khi đó ta dễ dàng kiểm tra được $S \leq 4 \leq \frac{n^2}{n-1}$, nên trong mọi trường hợp ta đều có

$$S \leq \frac{n^2}{n-1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{n}{n-1}$. ■

Những bài bất đẳng thức tự sáng tạo và sưu tầm

Bài CH1. *Giả sử a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác, hãy chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{bc}{a^4+2b^2c^2}+\frac{ca}{b^4+2c^2a^2}+\frac{ab}{c^4+2a^2b^2}\le\frac{3}{a^2+b^2+c^2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>0$, ta có thể viết lại nó dưới dạng

$$\sum_{cyc}\left[bc-\frac{bc(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^4+2b^2c^2}\right]+\frac{3\sum\limits_{cyc}a^2b^2}{\sum\limits_{cyc}a^2}-\sum_{cyc}bc\ge 0,$$

tương đương

$$\sum_{cyc}\frac{bc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^4+2b^2c^2}+\frac{3\sum\limits_{cyc}a^2b^2-\sum\limits_{cyc}ab(a^2+b^2)-\sum\limits_{cyc}a^2bc}{\sum\limits_{cyc}a^2}\ge 0,$$

hay là

$$2\sum_{cyc}\frac{bc(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^4+2b^2c^2}-\frac{\sum\limits_{cyc}\left(2ab+2ac-b^2-c^2\right)(a-b)(a-c)}{\sum\limits_{cyc}a^2}\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối này có dạng $X(a-b)(a-c)+Y(b-c)(b-a)+Z(c-a)(c-b)\ge 0$, trong đó

$$X=\frac{2bc(a+b)(a+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^4+2b^2c^2}+b^2+c^2-2a(b+c)+(b-c)^2,$$

và các biểu thức Y,Z tương tự. Đây là một dạng của bất đẳng thức *Vornicu Schur* nên ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức này để giải bài toán đã cho. Muốn như vậy, yêu cầu đầu tiên ta cần phải thỏa mãn đó là X,Y,Z là những đại lượng không âm, và may mắn thay, điều này luôn đúng. Thật vậy, bất đẳng thức $X\ge 0$ (các bất đẳng thức $Y\ge 0$ và $Z\ge 0$ được xét tương tự) tương đương với

$$\frac{2bc(a+b)(a+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^4+2b^2c^2}+b^2+c^2-2a(b+c)+(b-c)^2\ge 0.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\frac{(a+b)(a+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^4+2b^2c^2}>\frac{(a^2+bc)(a^2+2bc)}{a^4+2b^2c^2}>1.$$

Vì thế, ta có $X>2bc+b^2+c^2-2a(b+c)=(b+c)(b+c-2a)$, dẫn đến kết luận của ta là hiển nhiên nếu $b+c\ge 2a$. Xét trường hợp $a\ge t=\frac{b+c}{2}$, ta sẽ chứng minh rằng

$$(a+b)(a+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 3a^4+6b^2c^2. \qquad (*)$$

Khi đó, ta sẽ có $X \geq 6bc + b^2 + c^2 - 2a(b+c) + (b-c)^2 = 2(b+c)(b+c-a) \geq 0$, chính là điều mà ta đang tìm cách chứng minh. Đặt $x = bc \leq t^2$ thì bất đẳng thức $(*)$ có thể được viết lại thành

$$(a^2 + 2ta + x)(a^2 + 4t^2 - 2x) \geq 3a^4 + 6x^2,$$

hay là

$$-8x^2 + \left(4t^2 - 4at - a^2\right)x + \left(a^2 + 4t^2\right)\left(a^2 + 2ta\right) - 3a^4 \geq 0.$$

Do $4t^2 - 4at - a^2 < 0$ nên

$$\begin{aligned} VT &\geq -8t^4 + (4t^2 - 4at - a^2)t^2 + \left(a^2 + 4t^2\right)\left(a^2 + 2ta\right) - 3a^4 \\ &= (2t-a)(2a^3 + 2a^2t + at^2 - 2t^3) \geq 0. \end{aligned}$$

Như vậy, khẳng định trên của ta đã được chứng minh. Bây giờ, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có $X(a-b)(a-c) \geq 0$ và $a - c - \frac{b}{c}(a-b) = \frac{(b-c)(b+c-a)}{c} \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} X(a-b)(a-c) &\geq Y(b-c)(b-a) + Z(a-c)(b-c) \\ &\geq Y(b-c)(b-a) + Z \cdot \frac{b}{c}(a-b) \cdot (b-c) = \frac{(bZ - cY)(a-b)(b-c)}{c}. \end{aligned}$$

Vì thế, ta chỉ cần chứng minh $bZ \geq cY$ là bài toán được giải quyết xong, điều này tương đương với việc chứng minh

$$2a(a^2+b^2+c^2)(b+c)\left[\frac{b^2(a+c)}{2a^2b^2+c^4} - \frac{c^2(a+b)}{2a^2c^2+b^4}\right] + 2(b-c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac\right) \geq 0.$$

Dễ dàng đánh giá được $\frac{b^2(a+c)}{2a^2b^2+c^4} \geq \frac{c^2(a+b)}{2a^2c^2+b^4}$ nên bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 2b = 2c$ và các hoán vị tương ứng. ■

Bài CH2. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}} + \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}} \geq 1 + \frac{9abc}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

(Dương đức Lâm)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Sử dụng các bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và *AM – GM*, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}{(a+c)(b+c)} \geq \sum_{cyc} \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}+c\right)}{(a+c)(b+c)} \\ &= \sum_{cyc} \frac{ab}{(a+c)(b+c)} + \sqrt{abc}\sum_{cyc} \frac{\sqrt{c}}{(a+c)(b+c)} \\ &= 1 + \sqrt{abc}\sum_{cyc} \frac{\sqrt{c}}{(a+c)(b+c)} - \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{abc}\sum_{cyc} \frac{\sqrt{c}}{(a+c)(b+c)} - \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9abc}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)},$$

tương đương

$$\sum_{cyc}\sqrt{c}(a+b)-2\sqrt{abc}\ge\frac{9\sqrt{abc}(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Đến đây, ta hãy để ý rằng $\sum_{cyc}\sqrt{c}(a+b)-6\sqrt{abc}=\sum_{cyc}\sqrt{c}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ và

$$\frac{9\sqrt{abc}(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}-4\sqrt{abc}=\frac{\sqrt{abc}\sum_{cyc}c(a-b)^2}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)},$$

suy ra bất đẳng thức trên là hệ quả của bất đẳng thức sau

$$\sqrt{c}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge\frac{c\sqrt{abc}(a-b)^2}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)},$$

hay là

$$2(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge c\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2.$$

Đây là một bất đẳng thức đúng bởi vì $2(a+b+c)\ge 2(a+b)\ge\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ (theo *Cauchy Schwarz*) và $ab+bc+ca\ge bc+ca\ge 2c\sqrt{ab}$ (theo $AM-GM$). Và như vậy, bài toán đã cho đã được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $c=0$. ■

Bài CH3. *Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $a+b=a^4+b^4$. Chứng minh rằng*

$$a^ab^b\le 1\le a^{a^3}b^{b^3}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên trái. Dễ thấy rằng nó tương đương với $a\ln a+b\ln b\le 0$. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $\ln x\le x-1\ \forall x>0$, ta có

$$3a\ln a-(a^4-a)\le 3a(a-1)-(a^4-a)=-a(a+2)(a-1)^2\le 0,$$

từ đó suy ra

$$3(a\ln a+b\ln b)\le(a^4-a)+(b^4-b)=0.$$

Và như thế, bất đẳng thức trên trái đã được chứng minh xong. Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Cũng tương tự như trên, ta sẽ lấy logarith nepe hai vế và viết lại bất đẳng thức dưới dạng $a^3\ln a+b^3\ln b\ge 0$. Xét hàm số sau với $x\in(0,2)$: $f(x)=3\ln x-\frac{x^4-x}{x^3}$, ta có

$$f'(x)=\frac{3}{x}-1-\frac{2}{x^3}=\frac{(x-1)(2+2x-x^2)}{x^3}.$$

Suy ra phương trình $f'(x)=0$ chỉ có một nghiệm duy nhất trên khoảng $(0,2)$ là $x=1$. Mặt khác, qua 1 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên ta tìm được $f(x)\ge f(1)=0$ với mọi $x\in(0,2)$. Đến đây, sử dụng giả thiết của bài toán và bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có $a+b=a^4+b^4\ge\frac{(a+b)^4}{8}$, suy ra $a+b\le 2$, mà a,b là các số dương nên $a,b\in(0,2)$. Vì thế, áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh, ta có

$$3(a^3\ln a+b^3\ln b)\ge a^3\cdot\frac{a^4-a}{a^3}+b^3\cdot\frac{b^4-b}{b^3}=a^4+b^4-a-b=0.$$

Bất đẳng thức bên phải được chứng minh xong. Dễ thấy ở cả hai bất đẳng thức (bên trái và bên phải) đẳng thức chỉ xảy ra tại một điểm là $(a,b)=(1,1)$. ■

Bài CH4. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn không có hai số nào trong chúng có thể đồng thời bằng 0, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$\frac{a}{a^2+3bc}+\frac{b}{b^2+3ca}+\frac{c}{c^2+3ab}\le\frac{(a+b+c)^3}{4(ab+bc+ca)^2}.$$

(Dương đức Lâm)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Nhân cả hai vế của bất đẳng thức cho $ab+bc+ca>0$, và để ý rằng $a-\frac{a(ab+bc+ca)}{a^2+3bc}=\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+3bc}+\frac{abc}{a^2+3bc}$, ta có thể viết lại nó như sau

$$\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+3bc}+abc\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+3bc}+\frac{(a+b+c)^3}{4(ab+bc+ca)}-(a+b+c)\ge 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có $\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+3bc}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}$ nên bất đẳng thức trên được suy ra từ

$$\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+3bc}+\frac{9abc}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}+\frac{(a+b+c)^3}{4(ab+bc+ca)}-(a+b+c)\ge 0,$$

tương đương

$$\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+3bc}+\frac{(a+b+c)^3+9abc}{4(ab+bc+ca)}-(a+b+c)\ge\frac{9abc}{4\sum_{cyc}ab}-\frac{9abc}{\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab}.$$

Ta có $(a+b+c)^3+9abc-4(a+b+c)(ab+bc+ca)=\sum_{cyc}a(a-b)(a-c)$ và

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\sum_{cyc}(a-b)(a-c),$$

nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+3bc}+\frac{\sum_{cyc}a(a-b)(a-c)}{4(ab+bc+ca)}\ge\frac{9abc\sum_{cyc}(a-b)(a-c)}{4\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab\right)}.$$

Ta thấy bất đẳng thức này có dạng $X(a-b)(a-c)+Y(b-c)(b-a)+Z(c-a)(c-b)\ge 0$, với

$$\begin{aligned}X&=a+\frac{4a(ab+bc+ca)}{a^2+3bc}-\frac{9abc}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\\&\ge a+\frac{4a(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}-\frac{9abc}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\\&=\frac{a[a^2+7a(b+c)+(b-c)^2]}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\ge 0,\end{aligned}$$

và các biểu thức Y,Z tương tự. Bây giờ, giả sử rằng $a \ge b \ge c$, ta sẽ chứng minh $aX \ge bY$, tương đương

$$(a^2-b^2)+4(ab+bc+ca)\left(\frac{a^2}{a^2+3bc}-\frac{b^2}{b^2+3ca}\right) \ge \frac{9abc(a-b)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}.$$

Một điều dễ thấy là $\frac{a^2}{a^2+3bc} \ge \frac{b^2}{b^2+3ca}$ và $a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca) \ge 12bc$, suy ra

$$VT-VP \ge (a^2-b^2) - \frac{9a \cdot \frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{12} \cdot (a-b)}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} = \frac{(a-b)(a+4b)}{4} \ge 0.$$

Đến đây, với để ý rằng $Z(c-a)(c-b) \ge 0$ và $a-c \ge \frac{a}{b}(b-c) \ge 0$, ta thu được

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} X(a-b)(a-c) &\ge X(a-b)(a-c)+Y(b-c)(b-a)\\ &\ge X(a-b)\cdot\frac{a}{b}(b-c)+Y(b-c)(b-a) = \frac{(aX-bY)(a-b)(b-c)}{b} \ge 0.\end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị của bộ số $(t,t,0)$ với t là một số dương bất kì. ■

Bài CH5. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$(k+bc)(k+ca)(k+ab) \ge (k+1)^3.$$

(Vuonga2khtn*[2])

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Cho $c=t>0$ và $a=b=\frac{2}{t+1}$ thì ta dễ thấy $ab+bc+ca+abc=4$ và bất đẳng thức đã cho trở thành $\left(k+\frac{2t}{t+1}\right)^2\left[k+\frac{4}{(t+1)^2}\right] \ge (k+1)^3$, tương đương

$$\frac{(t-1)^2[(k^2+k-1)t^2+(2k^2-2k-6)t+k^2-3k-1]}{(t+1)^4} \ge 0.$$

Và như vậy, theo yêu cầu của đề bài, ta cần có $(k^2+k-1)t^2+(2k^2-2k-6)t+k^2-3k-1 \ge 0$. Vế trái của bất đẳng thức này là một tam thức bậc 2 của t, và chúng ta đều biết rằng để nó không âm với mọi t dương thì một điều kiện cần là hai hệ số cao nhất và thấp nhất phải không âm, tức là $k^2+k-1 \ge 0$ và $k^2-3k-1 \ge 0$. Từ đây, ta tìm được $k \le -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $k \ge \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là tập hợp tất cả các giá trị cần tìm của k, tức là

$$(k+bc)(k+ca)(k+ab) \ge (k+1)^3.$$

Để chứng minh, chúng ta sẽ chia làm 2 trường hợp
+ Xét $k \ge \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Khi đó, áp dụng kết quả bài O2, ta có

$$\begin{aligned}(k+bc)(k+ca)(k+ab) &= k^3+k^2(ab+bc+ca)+kabc(a+b+c)+a^2b^2c^2\\ &\ge k^3+k^2(ab+bc+ca)+kabc(ab+bc+ca)+a^2b^2c^2\\ &= k^3+k^2(4-abc)+kabc(4-abc)+a^2b^2c^2.\end{aligned}$$

[2]Những bài mà chúng tôi không biết tên thật của tác giả và chỉ biết nickname, chúng tôi sẽ ghi nickname kèm theo dấu * ở phía sau. Khi nào biết được tên thật sự của tác giả, chúng tôi xin sửa lại và ghi đúng tên của người đặt ra bài toán.

Mà $k^3+k^2(4-abc)+kabc(4-abc)+a^2b^2c^2-(k+1)^3=(1-abc)[(k-1)abc+k^2-3k-1]\ge 0$ (do $1\ge abc$ (đánh giá này được suy ra trực tiếp từ giả thiết), $(k-1)abc\ge 0$ và $k^2-3k-1\ge 0$) nên hiển nhiên

$$(k+bc)(k+ca)(k+ab)\ge (k+1)^3.$$

+ Xét $k\le -\frac{1+\sqrt{5}}{2}<-1$. Đặt $\sqrt{ab}=x, \sqrt{bc}=y, \sqrt{ca}=z$ thì ta có $x^2+y^2+z^2+xyz=4$, và ta phải chứng minh $(k+x^2)(k+y^2)(k+z^2)\ge (k+1)^3$. Áp dụng bất đẳng thức *Schur* bậc 3, ta có

$$\begin{aligned}4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) &\le \frac{9x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}+(x^2+y^2+z^2)^2\\ &=\frac{9t^2}{4-t}+(4-t)^2\ (t=xyz\le 1).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}(k+x^2)(k+y^2)(k+z^2)-(k+1)^3 &= k^2(x^2+y^2+z^2-3)+k(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-3)+t^2-1\\ &\ge k^2(1-t)+k\left[\frac{\frac{9t^2}{4-t}+(4-t)^2}{4}-3\right]+t^2-1\\ &=(1-t)\left[k^2+\frac{k(t^2-20t+16)}{4(4-t)}-t-1\right].\end{aligned}$$

Lại có

$$\frac{k(t^2-20t+16)}{4(4-t)}-t-k=\frac{t[(k+4)t-16(k+1)]}{4(4-t)}\ge \frac{t[(k+4)t-16(k+1)t]}{4(4-t)}=-\frac{3t^2(5k+4)}{4(4-t)}\ge 0,$$

nên

$$k^2+\frac{k(t^2-20t+16)}{4(4-t)}-t-1\ge k^2+k-1\ge 0.$$

Như vậy, khẳng định của ta đã được chứng minh xong. Và do đó, tập hợp tất cả các giá trị của k thỏa mãn yêu cầu của đề bài là $k\in\left(-\infty,-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty\right)$. ■

Bài CH6. *Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+d^3+8(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ge 1.$$

(Phạm Văn Thuận)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Chúng tôi xin được giới thiệu cùng bạn đọc chứng minh sau. Mặc dù là một chứng minh không đẹp nhưng nó lại là một ý tưởng mới về bất đẳng thức (chuyển từ bất đẳng thức thuần nhất sang dạng không thuần nhất). Từ giả thiết, ta dễ dàng suy ra được $a,b,c,d\in[0,1]$ và ta cũng có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng $P(a,b,c,d)\ge 0$, trong đó

$$P(a,b,c,d)=\sum_{cyc}a^3+\frac{1}{4}\sum_{cyc}a^2+8(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)-\frac{5}{4}.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $P(a,b,c,d)\ge 0$ đúng với mọi $a,b,c,d\in[0,1]$ mà không cần thiết phải thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}P(a,b,c,d)-P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d\right)&=\frac{(a-b)^2[6(a+b)+1-16(1-c)(1-d)]}{8},\\ P(a,b,c,d)-P(a+b,0,c,d)&=-\frac{ab[6(a+b)+1-16(1-c)(1-d)]}{2},\\ P(a,b,c,d)-P(a+b-1,1,c,d)&=-\frac{(1-a)(1-b)[6(a+b)+1-16(1-c)(1-d)]}{2}.\end{aligned}$$

Từ đây, ta thấy nếu $6(a+b)+1-16(1-c)(1-d)\ge 0$ thì $P(a,b,c,d)\ge P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d\right)$. Nếu $6(a+b)+1-16(1-c)(1-d)\le 0$ và $a+b\le 1$ thì $P(a,b,c,d)\ge P(a+b,0,c,d)$. Nếu $6(a+b)+1-16(1-c)(1-d)\le 0$ và $a+b\ge 1$ thì $P(a,b,c,d)\ge P(a+b-1,1,c,d)$. Những lập luận này chứng tỏ rằng, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh nó đúng trong ba trường hợp sau là đủ $a=b, ab=0$ và $(1-a)(1-b)=0$. Hoàn toàn tương tự, ta cũng thấy rằng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng trong ba trường hợp $c=d, cd=0$ và $(1-c)(1-d)=0$ thì bài toán cũng được giải quyết xong. Kết hợp hai lập luận này lại và loại bớt những trường hợp trùng nhau, ta có thể đưa bài toán về xét trong 4 trường hợp sau

+ Xét $a=b$ và $c=d$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2a^3+2c^3+\frac{a^2+c^2}{2}+8(1-a)^2(1-c)^2-\frac{5}{4}\ge 0.$$

Đặt $t=a+c$ và $x=ac$ $\left(0\le x\le \frac{t^2}{4}\right)$, ta có thể viết lại nó như sau

$$2t(t^2-3x)+\frac{t^2-2x}{2}+8(1-t+x)^2-\frac{5}{4}\ge 0,$$

tương đương

$$f(x)=32x^2+4(15-22t)x+8t^3+34t^2-64t+27\ge 0.$$

Nếu $4t^2-22t+15\le 0$ thì ta có $f'(x)=64x+4(15-22t)\le 16t^2+4(15-22t)=4(4t^2-22t+15)\le 0$, dẫn đến $f(x)$ là hàm giảm với mọi $x\le \frac{t^2}{4}$, và ta thu được

$$f(x)\ge f\left(\frac{t^2}{4}\right)=(2t^2-10t+27)(t-1)^2\ge 0.$$

Nếu $15-22t\ge 0$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên đúng bởi vì ta luôn có $8t^3+34t^2-64t+27>0$ với mọi $t\ge 0$.

Nếu $15-22t\le 0$ và $4t^2-22t+15\ge 0$ thì ta có $\frac{15}{22}\le t\le \frac{11-\sqrt{61}}{4}$, khi đó dễ thấy

$$\Delta'_f=4(15-22t)^2-32(8t^3+34t^2-64t+27)=-4(64t^3-212t^2+148t-9)<0,$$

nên $f(x)$ luôn đạt giá trị không âm với mọi $a,c\in[0,1]$. Trường hợp thứ nhất được giải quyết xong.

+ Xét $a=b$ và $d=0$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2a^3+c^3+\frac{2a^2+c^2}{4}+8(1-a)^2(1-c)-\frac{5}{4}\ge 0,$$

tương đương

$$2a^3+\frac{a^2}{2}-8a(2-a)(1-c)+\frac{(1-c)(27-5c-4c^2)}{4}\ge 0.$$

Do $1-c\ge 0$ và $27-5c-4c^2\ge 27-9c$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$2a^3+\frac{a^2}{2}-8a(2-a)(1-c)+\frac{9(1-c)(3-c)}{4}\ge 0,$$

hay là

$$f(c)=9c^2-4(8a^2-16a+9)c+8a^3+34a^2-64a+27\ge 0.$$

Nếu $16a^2-32a+9\ge 0$ thì ta có $f'(c)=18c-4(8a^2-16a+9)\le 18-4(8a^2-16a+9)=-2(16a^2-32a+9)\le 0$ nên $f(c)$ là hàm giảm với mọi $c\le 1$, và ta thu được $f(c)\ge f(1)=2a^2(4a+1)\ge 0$.

Nếu $16a^2-32a+9\le 0$ thì $\frac{4-\sqrt{7}}{4}\le a\le 1$, khi đó bằng cách tính biệt thức của $f(c)$, ta dễ thấy

$$\Delta'_f=4(8a^2-16a+9)^2-9(8a^3+34a^2-64a+27)=256a^4-1096a^3+1294a^2-576a+81<0,$$

dẫn đến $f(c)\ge 0$ và trường hợp thứ hai cũng được giải quyết xong.
+ Xét $b=1$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $a^3+c^3+d^3+\frac{a^2+c^2+d^2}{4}\ge 0$, là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng do a,c,d là những số không âm.
+ Xét $b=0$ và $d=0$. Khi đó, ta phải chứng minh

$$a^3+c^3+\frac{a^2+c^2}{4}+8(1-a)(1-c)-\frac{5}{4}\ge 0.$$

Đặt $t=a+c$ và $x=ac$ $\left(0\le x\le \frac{t^2}{4}\right)$, bất đẳng thức này trở thành

$$t(t^2-3x)+\frac{t^2-2x}{4}+8(1-t+x)-\frac{5}{4}\ge 0,$$

hay là

$$6(5-2t)x+(1-t)(27-5t-4t^2)\ge 0.$$

Nếu $t\le 1$ thì bất đăng thức cuối là hiển nhiên bởi vì ta có $6(5-2t)x\ge 0$ và $(1-t)(27-5t-4t^2)\ge 0$. Trong trường hợp ngược lại, sử dụng đánh giá $(1-a)(1-c)\ge 0$, ta suy ra được $x\ge t-1$, dẫn đến

$$6(5-2t)x+(1-t)(27-5t-4t^2)\ge 6(5-2t)(t-1)+(1-t)(27-5t-4t^2)=(4t-3)(t-1)^2\ge 0.$$

Trường hợp thứ tư cũng được giải quyết xong. Và như thế, phép chứng minh của ta cũng được hoàn tất. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ hoặc $a=1,b=c=d=0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Bài CH7. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=a^3+b^3+c^3$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{a}{a^2+1}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2+\frac{b}{b^2+1}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{c}{c^2+1}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

(Gabriel Dospinescu)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta dễ thấy

$$VT\cdot\left(\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}+\frac{c^2+1}{c}\right)\ge\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)^2.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$2\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Ta thấy rằng bất đẳng thức này chính là tổng của hai bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

và

$$\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}\right)^2\ge(a+b+c)^2.$$

Bất đẳng thức thứ nhất tương đương với

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3,$$

mà $\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}\geq \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)^2\geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ và $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$ nên bất đẳng thức này hiển nhiển đúng.
Xét bất đẳng thức thứ hai, lấy căn bậc hai hai vế, ta thấy rằng bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq a+b+c.$$

Từ giả thiết, áp dụng các bất đẳng thức *Chebyshev* và $AM-GM$, ta có

$$3(a+b+c)=3(a^3+b^3+c^3)\geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}(a+b+c),$$

suy ra $1\geq abc$, và ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}&=\frac{1}{3}\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2a}{c}+\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2c}{b}+\frac{b}{a}\right)\\&\geq \sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}=\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geq a+b+c.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài CH8. *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn*

$$\frac{1}{a^2+47}+\frac{1}{b^2+47}+\frac{1}{c^2+47}=\frac{1}{24}.$$

Chứng minh bất đẳng thức sau

$$a+b+c\geq 10\sqrt{\frac{47}{23}}.$$

(Yongyao*)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Để ý rằng $\frac{1}{a^2+47},\frac{1}{b^2+47},\frac{1}{c^2+47}\leq \frac{1}{47}$ nên từ giả thiết, ta có thể đặt được $\frac{1}{a^2+47}=\frac{1-x}{47},\frac{1}{b^2+47}=\frac{1-y}{47},\frac{1}{c^2+47}=\frac{1-z}{47}$ với x,y,z là các số thực không âm nằm trong đoạn $[0,1]$. Từ phép đặt này, chúng ta có thể dễ dàng suy ra được $x+y+z=\frac{25}{24}$, và ta phải chứng minh

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}\geq \frac{10}{\sqrt{23}}.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $z=\min\{x,y,z\}$. Khi đó, dễ thấy $x+y\geq \frac{2}{3}(x+y+z)>\frac{2}{3}$, dẫn đến

$$x^2+y^2-(x^3+y^3)-\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{4}=-\frac{(3x+3y-2)(x-y)^2}{4}\leq 0.$$

Từ đây, áp dụng bất đẳng thức *Holder*, ta thu được

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}\geq \sqrt{\frac{(x+y)^3}{x^2(1-x)+y^2(1-y)}}\geq \sqrt{\frac{(x+y)^3}{\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{4}}}=2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}.$$

Vì thế, để chứng minh bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$2\sqrt{\frac{25-24z}{23+24z}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}} \geq \frac{10}{\sqrt{23}}.$$

Việc chứng minh bất đẳng thức này khá đơn giản, xin được dành cho bạn đọc. ■

Nhận xét. Với cùng một cách làm như trên, chúng ta có thể chứng minh được một kết quả đẹp hơn rất nhiều là

Với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $\min\{a,b,c\} \geq 1$ và $\frac{1}{a^2+47}+\frac{1}{b^2+47}+\frac{1}{c^2+47}=\frac{1}{24}$ thì

$$a+b+c \geq 15.$$

Và một điều thú vị hơn nữa là bất đẳng thức này tương đương với kết quả sau (rất đẹp và khó) của tác giả Vasile Cirtoaje trên tạp chí Crux Mathematicorum

Với mọi số thực không âm x,y,z thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 thì

$$\sqrt{1+\frac{48}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{48y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{48z}{x+y}} \geq 15.$$

♣

Bài CH9. *Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và tổng của chúng là 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau*

$$P=\frac{a-b}{\sqrt{a+b}}+\frac{b-c}{\sqrt{b+c}}+\frac{c-a}{\sqrt{c+a}}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đặt $x=\sqrt{a+b}, y=\sqrt{b+c}$ và $z=\sqrt{c+a}$, ta được

$$a=\frac{z^2+x^2-y^2}{2},\quad b=\frac{x^2+y^2-z^2}{2},\quad c=\frac{y^2+z^2-x^2}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}|P| &= \left|\sum_{cyc}\frac{a-b}{\sqrt{a+b}}\right| = \left|\sum_{cyc}\frac{(z^2+x^2-y^2)-(x^2+y^2-z^2)}{2x}\right| \\ &= \left|\sum_{cyc}\frac{z^2-y^2}{x}\right| = \frac{|(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)|}{xyz} = \frac{\left|(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x+y+z)\right|}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)\left(\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)\left(\sqrt{b+c}+\sqrt{b+a}\right)}.\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $c=\min\{a,b,c\}$, ta có thể dễ dàng kiểm tra được các đánh giá sau

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| \leq |ab(a-b)|,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab(a+b)}},$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)\left(\sqrt{b+c}+\sqrt{b+a}\right)} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)},$$

và
$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}{\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}=1+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}\le 1+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$
Những đánh giá này giúp ta thu được bất đẳng thức sau
$$\begin{aligned}|P| &\le \frac{|ab(a-b)|\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)}{\sqrt{ab(a+b)}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+b}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\\ &=\left|\frac{a-b}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}-\sqrt{a}\right|=\frac{1}{\sqrt{a+b+c}}\left|\frac{a-b}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}-\sqrt{a}\right|\\ &\le \frac{1}{\sqrt{a+b}}\left|\frac{a-b}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right|.\end{aligned}$$
Đặt $x=\frac{a}{a+b}$ thì ta có $\frac{b}{a+b}=1-x$, và
$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}=x-(1-x)+\sqrt{1-x}-\sqrt{x}=2x-\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-1=f(x).$$
Tính đạo hàm $f'(x)$, ta được $f'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Giải phương trình $f'(x)=0$, ta tìm được hai nghiệm của nó trong khoảng $(0,1)$ là $x_1=\frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$ và $x_2=\frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}$. Từ đó, bằng cách lập bảng biến thiên, dễ thấy rằng $f\left(\frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16}\right)$, hay là $-\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}\le f(x)\le\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}$. Vì $|P|\le|f(x)|$ nên ta cũng suy ra được
$$-\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}\le P\le\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}.$$
Mặt khác, cho $a=\frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16},b=\frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16},c=0$ thì ta dễ thấy $P=\frac{\left(5-\sqrt{17}\right)\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{32}$; và cho $a=\frac{8-\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16},b=\frac{8+\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{16},c=0$ thì $P=-\frac{\left(5-\sqrt{17}\right)\sqrt{46-2\sqrt{17}}}{32}$, nên ta đi đến kết luận
$$\max P=\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}\quad \text{và}\quad \min P=-\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{32}}.$$
Bài toán được giải quyết xong. ■

Bài CH10. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c, bất đẳng thức sau đây luôn được thỏa mãn*
$$\frac{a}{2a^2+3b+2}+\frac{b}{2b^2+3c+2}+\frac{c}{2c^2+3a+2}\le\frac{3}{7}.$$
(Phan Thành Nam)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Do tính hoán vị vòng quanh nên ta có thể giả sử b là số hạng nằm giữa a và c. Khi đó, có 2 trường hợp để xét là $c\ge b\ge a$ và $a\ge b\ge c$.
+ *Xét trường hợp $c\ge b\ge a$.* Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có
$$\frac{a}{2a^2+3b+2}\le\frac{a}{4a+3b},\quad \frac{b}{2b^2+3c+2}\le\frac{b}{4b+3c},\quad \frac{c}{2c^2+3a+2}\le\frac{c}{4c+3a}.$$

Vì thế, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a}{4a+3b}+\frac{b}{4b+3c}+\frac{c}{4c+3a}\le\frac{3}{7},$$

tức là

$$15(ab^2+bc^2+ca^2)\ge 8(a^2b+b^2c+c^2a)+21abc.$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng bởi vì ta có $8(ab^2+bc^2+ca^2)\ge 8(a^2b+b^2c+c^2a)$ (do $c\ge b\ge a$) và $7(ab^2+bc^2+ca^2)\ge 21abc$ (theo $AM-GM$).
+ *Xét trường hợp $a\ge b\ge c$*. Lúc này, có 2 khả năng xảy ra như sau

- *Khả năng thứ nhất $a\le b+3c$*. Với giả thiết này, thực hiện tương tự như trường hợp thứ nhất ở trên, ta thấy rằng bất đẳng thức của ta sẽ được chứng minh nếu ta có

  $$15(ab^2+bc^2+ca^2)\ge 8(a^2b+b^2c+c^2a)+21abc,$$

  hay là

  $$f(a)=(15c-8b)a^2+(15b^2-21bc-8c^2)a+15bc^2-8b^2c\ge 0.$$

  Nếu $8b>15c$ thì $f(a)$ là một tam thức bậc 2 theo a với hệ số cao nhất âm, vì thế $f(a)\ge\min\{f(b),f(b+3c)\}$. Mà $f(b)=7b(b-c)^2\ge 0, f(b+3c)=7b^3-17b^2c-38bc^2+111c^3>0$ nên hiển nhiên $f(a)\ge 0$.

  Trong trường hợp $15c\ge 8b$, tính đạo hàm $f'(a)$, ta có

  $$\begin{aligned}f'(a)&=2a(15c-8b)+15b^2-21bc-8c^2\\&\ge 2b(15c-8b)+15b^2-21bc-8c^2=(8c-b)(b-c)\ge 0,\end{aligned}$$

  từ đó suy ra $f(a)$ là hàm đồng biến, và ta suy ra $f(a)\ge f(b)\ge 0$.

- *Khả năng thứ hai $a\ge b+3c$*. Trong khả năng này, sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta thu được các đánh giá

  $$\frac{a}{2a^2+3b+2}\le\frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}},\quad \text{và}\quad \frac{c}{2c^2+3a+2}\le\frac{c}{4c+3a}\le\frac{c}{3b+13c}.$$

  Do đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $0<c\le b$ thì bài toán được giải quyết xong

  $$g(c)=\frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}}+\frac{b}{2b^2+3c+2}+\frac{c}{3b+13c}\le\frac{3}{7}.$$

  Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này đúng với mọi $c>0$ mà không cần phải thỏa mãn $c\le b$. Thật vậy, ta có

  $$g'(c)=3b\left[\frac{1}{(3b+13c)^2}-\frac{1}{(2b^2+3c+2)^2}\right].$$

  Phương trình $g'(c)=0$ chỉ có một nghiệm dương duy nhất là $c_0=\frac{2b^2-3b+2}{10}>0$. Qua c_0 thì $g'(c)$ đổi dấu từ dương sang âm nên với mọi $c>0$, ta có

  $$g(c)\le g\left(\frac{2b^2-3b+2}{10}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}}+\frac{2b^2+7b+2}{26b^2-9b+26}.$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\frac{1}{2\sqrt{2(3b+2)}}+\frac{2b^2+7b+2}{26b^2-9b+26}<\frac{3}{7},$$

do đó, kết hợp với trên, ta được $g(c)<\frac{3}{7}$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài CH11. *Giả sử a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và tổng của chúng là 2. Chứng minh rằng khi đó, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$\sqrt{\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}}\ge 2+\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn, T. Q. Anh). Xét các số thực x,y,z sao cho $x,y\ge z\ge 0$, dễ thấy

$$\frac{x+z}{x^2+xz+z^2}=\frac{x+z}{\left(x+\frac{z}{2}\right)(x+z)-\frac{1}{2}z(x-z)}\ge\frac{x+z}{\left(x+\frac{z}{2}\right)(x+z)}=\frac{1}{x+\frac{z}{2}}.$$

Ngoài ra, ta cũng có đánh giá sau

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{x+y+z}{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(x+\frac{z}{2}\right)\left(y+\frac{z}{2}\right)+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(x+\frac{z}{2}\right)\left(y+\frac{z}{2}\right)+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2}{x^2+xy+y^2}-1\ge\frac{x+y+z}{x+y}-1,$$

tương đương

$$\frac{3z(2x+2y+z)}{4(x^2+xy+y^2)}\ge\frac{z}{x+y}\ \text{(hiển nhiên đúng).}$$

Bây giờ, trở lại bài toán của ta. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử rằng $a\ge b\ge c$, khi đó từ hai đánh giá trên, ta được

$$\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{1}{b+\frac{c}{2}},\quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{1}{a+\frac{c}{2}},$$

và

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{a+b+c}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(b+\frac{c}{2}\right)+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{1}{\sqrt{v}}+\sqrt{\frac{2}{u^2+uv+v^2}}\ge 2+\sqrt{\frac{2}{3}},$$

trong đó $u=a+\frac{c}{2}$ và $v=b+\frac{c}{2}$.

Đây là một bài tập rất tốt cho phép cân bằng hệ số trong việc sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$. Xin được dành cho bạn đọc để hoàn thiện nốt chứng minh này. Chú ý rằng ở bất đẳng thức đã cho, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể chứng minh được kết quả tổng quát hơn vẫn còn đúng

Giả sử a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=2$ và k là một số thực không âm bất kì, khi đó

$$\left(\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right)^k+\left(\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}\right)^k+\left(\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}\right)^k\ge 2+\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

♣

Bài CH12. *Cho a,b,c là các số thực bất kì khác nhau từng đôi một. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{a^2b^2+1}{(a-b)^2}+\frac{b^2c^2+1}{(b-c)^2}+\frac{c^2a^2+1}{(c-a)^2}\ge\frac{3}{2}.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Lời giải 1 (V. Q. B. Cẩn). Bất đẳng thức đã cho có dạng không thuần nhất, cho nên ý tưởng của ta sẽ là cố gắng đưa nó về dạng thuần nhất để giải, vì ở dạng thuần nhất sẽ có rất nhiều phương pháp giúp ta giải quyết trọn vẹn bài toán. Áp dụng bất đẳng thức *AM – GM*, ta có

$$VT=\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}+\sum_{cyc}\frac{1}{(a-b)^2}\ge 2\sqrt{\left[\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{(a-b)^2}\right]}.$$

Mặt khác, dễ thấy

$$\sum_{cyc}\frac{1}{(a-b)^2}=\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a-b}\right)^2,\quad \text{và}\quad \sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}=\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{a-b}\right)^2,$$

nên từ đánh giá trên, ta thu được

$$\begin{aligned}VT&\ge 2\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a-b}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{a-b}\right)\\&=\frac{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}.\end{aligned}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$12(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab)\ge 9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Để ý rằng $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ và

$$6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-b^2ca-c^2ab)=(2bc-ca-ab)^2+(2ca-ab-bc)^2+(2ab-bc-ca)^2,$$

bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* cho ta

$$VT\ge\left[\sum_{cyc}(b-c)(2bc-ca-ab)\right]^2=9\left(\sum_{cyc}a^2b-\sum_{cyc}ab^2\right)^2=9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=VP.$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài CH13. *Cho các số a,b,c,d lần lượt là độ dài các cạnh của một tứ giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{9}{7}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\geq\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{abcd}.$$

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\geq b\geq c\geq d$. Khi đó, nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $abcd>0$, ta có thể viết lại nó thành

$$\frac{9}{7}\left[\frac{bcd}{a}+\frac{a(b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2)}{bcd}\right]\geq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{bcd}{a}+\frac{a(b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2)}{27bcd}\geq\frac{2}{9}\sqrt{3(b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2)}.$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, chúng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{2}{7}\sqrt{3(b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2)}+\frac{26}{21}a\left(\frac{bc}{d}+\frac{cd}{b}+\frac{db}{c}\right)\geq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Đặt $t=\frac{c+d}{2}$. Khi đó, ta dễ dàng kiểm tra được $b^2c^2+c^2d^2+d^2b^2\geq 2b^2t^2+t^4$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{26}{21}a\left(\frac{bc}{d}+\frac{cd}{b}+\frac{db}{c}\right)-c^2-d^2\geq\frac{26}{21}a\left(2b+\frac{t^2}{b}\right)-2t^2.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{26}{21}a\left[\frac{b(c-d)^2}{cd}+\frac{cd-t^2}{b}\right]\geq c^2+d^2-2t^2,\quad\text{hay là}\quad\frac{26}{21}a\left[\frac{b(c-d)^2}{cd}-\frac{(c-d)^2}{4b}\right]\geq\frac{(c-d)^2}{2}.$$

Ta có $\frac{26}{21}a\left(\frac{b}{cd}-\frac{1}{4b}\right)\geq\frac{26}{21}a\cdot\frac{3}{4b}\geq\frac{26}{21}b\cdot\frac{3}{4b}=\frac{13}{14}>\frac{1}{2}$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, và khẳng định của ta được chứng minh. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{2}{7}\sqrt{3(2b^2t^2+t^4)}+\frac{26}{21}a\left(2b+\frac{t^2}{b}\right)\geq a^2+b^2+2t^2.$$

Đặt $f(a)=VT-VP$ thì ta dễ thấy $f(a)$ là một tam thức bậc hai của a với hệ số cao nhất âm, do đó nó là một hàm lõm. Điều này khiến ta liên tưởng đến tính chất sau của hàm lõm: Mọi hàm $f(x)$ liên tục và lõm trên đoạn $[x_1,x_2]$ thì $f(x)\geq\min\{f(x_1),f(x_2)\}$. Ta hãy cố thử sử dụng tính chất này để giải bài toán đã cho xem sao. Muốn vậy, cần phải xác định được một đoạn chặn giá trị của a lại, rất đơn giản, ta hãy để ý đến giả thiết của đề bài a,b,c,d là độ dài bốn cạnh của một tứ giác và $a=\max\{a,b,c,d\}$. Với những giả thiết này, ta có thể dễ dàng suy ra được $b+2t\geq a\geq b$, và như thế $f(a)\geq\min\{f(b),f(b+2t)\}$. Ta có

$$\begin{aligned}f(b)&=\frac{2}{7}\sqrt{3(2b^2t^2+t^4)}+\frac{26}{21}b\left(2b+\frac{t^2}{b}\right)-2b^2-2t^2\\&=\frac{2}{7}\sqrt{3(2b^2t^2+t^4)}+\frac{10}{21}b^2-\frac{16}{21}t^2\geq\frac{2}{7}\sqrt{3(2t^4+t^4)}+\frac{10}{21}t^2-\frac{16}{21}t^2>0,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
f(b+2t) &= \frac{2}{7}\sqrt{3(2b^2t^2+t^4)}+\frac{26}{21}(b+2t)\left(2b+\frac{t^2}{b}\right)-(b+2t)^2-b^2-2t^2 \\
&\geq \frac{2}{7}(2bt+t^2)+\frac{26}{21}(b+2t)\left(2b+\frac{t^2}{b}\right)-(b+2t)^2-b^2-2t^2 \\
&= \frac{26(b+2t)t^2}{21b}+\frac{10}{21}b^2+\frac{32}{21}bt-\frac{40}{7}t^2=\frac{52t^3}{21b}+\frac{10}{21}b^2+\frac{32}{21}bt-\frac{94}{21}t^2 \\
&\geq \frac{52t(2bt-b^2)}{21b}+\frac{10}{21}b^2+\frac{32}{21}bt-\frac{94}{21}t^2=\frac{10}{21}(b-t)^2\geq 0,
\end{aligned}$$

nên hiển nhiên $f(a)\geq 0$ và bài toán của ta đã được chứng minh xong. ■

Bài CH14. *Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số thực dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$a_1+a_2+\cdots+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)^2.$$

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Để ý rằng $\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)^2=a_1+a_n-2\sqrt{a_1a_n}$, ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_1a_n}+a_2+\cdots+a_{n-1}\geq n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$VT\geq n\sqrt[n]{\sqrt{a_1a_n}\sqrt{a_1a_n}a_2\cdots a_{n-1}}=n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=VP.$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài CH15. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương x và mọi số nguyên dương n, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k^2}}{k}\geq x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

(Graham Denham, Crux Mathematicorum)

Lời giải 1 (Kee Wai Lau). Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực dương y

$$f_n(y)=1+\frac{y^{n+2}}{n+1}-y^2>0.$$

Bằng cách dùng đạo hàm, ta dễ thấy $f_n(y)$ đạt được giá trị nhỏ nhất tại $y=\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)^{1/n}$, và giá trị đó bằng

$$1+\frac{1}{n+1}\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)^{1+\frac{2}{n}}-\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)^{\frac{2}{n}}=1-\frac{n}{n+2}\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)^{\frac{2}{n}}.$$

Đây là một giá trị dương. Thật vậy, với $n=1$, ta có $1-\frac{1}{1+2}\left(\frac{2(1+1)}{1+2}\right)^{\frac{2}{1}}=1-\frac{16}{27}>0$. Với $n\geq 2$ thì

$$\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\geq 2>\frac{2(n+1)}{n+2},$$

và nó đã chứng tỏ điều mà ta vừa khẳng định ở trên. Bây giờ, quay trở lại bài toán đã cho. Ta sẽ chứng minh nó bằng quy nạp theo n. Với $n=1$, bất đẳng thức đã cho trở thành đẳng thức. Giả sử rằng bất đẳng thức này đúng với một giá trị nào đó (không nhỏ hơn 1) của n, khi đó ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^{k^2}}{k}-x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} &\ge x^{\frac{n(n+1)}{2}}+\frac{x^{(n+1)^2}}{n+1}-x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}\\ &= x^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(1+\frac{x^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{n+1}-x^{n+1}\right)=x^{\frac{n(n+1)}{2}}f_n\left(x^{\frac{n+1}{2}}\right)>0.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng nó cũng đúng cho $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra được nó đúng với mọi n nguyên dương. Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Lời giải 2 (Graham Denham, Walther Janous). Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\frac{\sum_{k=1}^n kx^2}{\sum_{k=1}^n k}\ge\left(x^{\sum_{k=1}^n k^3}\right)^{\frac{1}{\sum_{k=1}^n k}}.$$

Do $\sum_{k=1}^n k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$ nên từ đánh giá trên, ta thu được

$$\sum_{k=1}^n kx^2\ge\frac{n(n+1)}{2}x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=1}^n\frac{x^{k^2}}{k}=\sum_{k=1}^n\int_0^x kx^{k^2-1}dx\ge\frac{n(n+1)}{2}\int_0^x x^{\frac{n(n+1)}{2}-1}dx=x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Bài CH16. *Với mọi $n\ge 1$, ta đặt $a_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt[k]{k}}{a_k^2}<\frac{2n+1+\ln^2 n}{n+1+\frac{1}{2}\ln^2 n}.$$

(Mihaly Bencze, Crux Mathematicorum)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Với $n=1,2,3$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $n\ge 4$, khi đó với mọi $3<k\le n$, ta có

$$\frac{\sqrt[k]{k}}{a_k^2}<\frac{\sqrt[k]{k}}{a_{k-1}a_k}=\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k},$$

từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\frac{\sqrt[k]{k}}{a_k^2} &= 1+\frac{\sqrt{2}}{a_2^2}+\frac{\sqrt[3]{3}}{a_3^2}+\sum_{k=4}^n\frac{\sqrt[k]{k}}{a_k^2}<1+\frac{\sqrt{2}}{a_2^2}+\frac{\sqrt[3]{3}}{a_3^2}+\sum_{k=4}^n\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\\ &= 1+\frac{\sqrt{2}}{a_2^2}+\frac{\sqrt[3]{3}}{a_3^2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_n}<1+\frac{\sqrt{2}}{a_2^2}+\frac{\sqrt[3]{3}}{a_3^2}+\frac{1}{a_3}\approx 1.5989\ldots<\frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{2n+1+\ln^2 n}{n+1+\frac{1}{2}\ln^2 n}=2-\frac{1}{n+1+\frac{1}{2}\ln^2 n}\ge 2-\frac{1}{4+1+\frac{1}{2}\ln^2 4}\approx 1.8322\ldots>\frac{8}{5},$$

nên bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài CH17. *Cho dãy a_n được định nghĩa như sau*

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{và} \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+1)^2 \text{ với mọi } n = 1, 2, \ldots$$

Tìm số thực C_n nhỏ nhất sao cho với mọi bộ số thực không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - k}{\left(x_k + \cdots + x_n + \frac{k^2-k+2}{2}\right)^2} \le C_n a_n.$$

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đặt $b_1 = \frac{x_1-1}{(x_1+\cdots+x_n+1)^2}$ và $b_k = b_{k-1} + \frac{x_k-k}{\left(x_k+\cdots+x_n+\frac{k^2-k+2}{2}\right)^2}$ với mọi $k \ge 2$, ta sẽ chứng minh rằng

$$b_k \le \frac{a_k}{x_{k+1} + \cdots + x_n + \frac{(k+1)^2-(k+1)+2}{2}} \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Thật vậy, giả sử bất đẳng thức này đúng với một số k bất kì, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
b_{k+1} &= b_k + \frac{x_{k+1}-(k+1)}{\left(x_{k+1}+\cdots+x_n+\frac{(k+1)^2-(k+1)+2}{2}\right)^2} \\
&\le \frac{a_k}{x_{k+1}+\cdots+x_n+\frac{(k+1)^2-(k+1)+2)}{2}} + \frac{x_{k+1}-(k+1)}{\left(x_{k+1}+\cdots+x_n+\frac{(k+1)^2-(k+1)+2}{2}\right)^2} \\
&= \frac{(a_k+1)x_{k+1}+a_k(x_{k+2}+\cdots+x_n)+a_kX-(k+1)}{(x_{k+1}+\cdots+x_n+X)^2} \qquad \left(X = \frac{(k+1)^2-(k+1)+2}{2}\right) \\
&= \frac{((a_k+1)x_{k+1}+a_k(x_{k+2}+\cdots+x_n)+a_kX-(k+1))\,(a_k+1)^2}{((a_k+1)(x_{k+1}+\cdots+x_n)+(a_k+1)X)^2} \\
&= \frac{((a_k+1)x_{k+1}+a_k(x_{k+2}+\cdots+x_n)+a_kX-(k+1))\,(a_k+1)^2}{((a_k+1)x_{k+1}+a_k(x_{k+2}+\cdots+x_n)+a_kX-(k+1)+x_{k+2}+\cdots+x_n+X+k+1)^2} \\
&\le \frac{(a_k+1)^2}{4(x_{k+2}+\cdots+x_n+X+k+1)} = \frac{a_{k+1}}{x_{k+2}+\cdots+x_n+\frac{(k+2)^2-(k+2)+2}{2}}.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng khẳng định của ta cũng đúng cho $k+1$, mà hiển nhiên nó đúng với $k=1$ nên từ đây, ta suy ra nó đúng cho mọi $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Bây giờ, sử dụng khẳng định này, ta có

$$\begin{aligned}
VT &= b_{n-1} + \frac{x_n-n}{\left(x_n+\frac{n^2-n+2}{2}\right)^2} \le \frac{a_{n-1}}{x_n+\frac{n^2-n+2}{2}} + \frac{x_n-n}{\left(x_n+\frac{n^2-n+2}{2}\right)^2} \\
&= \frac{(a_{n-1}+1)x_n+a_{n-1}Y-n}{(x_n+Y)^2} \qquad \left(Y = \frac{n^2-n+2}{2}\right) \\
&= \frac{((a_{n-1}+1)x_n+a_{n-1}Y-n)\,(a_{n-1}+1)^2}{((a_{n-1}+1)(x_n+Y))^2} \\
&= \frac{((a_{n-1}+1)x_n+a_{n-1}Y-n)\,(a_{n-1}+1)^2}{((a_{n-1}+1)x_n+a_{n-1}Y-n+Y+n)^2} \\
&\le \frac{(a_{n-1}+1)^2}{4(Y+n)} = \frac{2}{n^2+n+2}a_n.
\end{aligned}$$

Ngoài ra, dễ thấy đẳng thức luôn xảy ra nên từ đánh giá này, ta tìm được $\min C_n = \frac{2}{n^2+n+2}$. Bài toán được giải quyết xong. ■

Bài CH18. *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực bất kì có tổng bằng 0. Tìm hằng số $C = C(n)$ tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$C\sum_{i=1}^{n}|a_i| \le \sum_{1\le i<j\le n}|a_i - a_j|.$$

(Walther Janous, Crux Mathematicorum)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Cho $a_1 = 1, a_2 = \cdots = a_n = -\frac{1}{n-1}$, ta tìm được $C \le \frac{n}{2}$. Ta sẽ chứng minh rằng, đây chính là giá trị mà ta cần tìm, tức là với mọi a_i thỏa mãn giả thiết của đề bài thì

$$\sum_{1\le i<j\le n}|a_i - a_j| \ge \frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i|.$$

Do tính đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử được $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$. Mặt khác, lại có $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ nên tồn tại một số k $(1 \le k \le n-1)$ sao cho $a_1 \ge \cdots \ge a_k \ge 0 \ge a_{k+1} \ge \cdots \ge a_n$. Khi đó, ta có $a_1 + \cdots + a_k = -(a_{k+1} + \cdots + a_n)$ và

$$\sum_{1\le i<j\le n}|a_i - a_j| = \sum_{1\le i<j\le n}(a_i - a_j) = \sum_{i=1}^{n}(n+1-2i)a_i, \quad \sum_{i=1}^{n}|a_i| = 2\sum_{i=1}^{k}a_i.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-2i)a_i \ge n\sum_{i=1}^{k}a_i, \quad \text{tức là} \quad \sum_{i=1}^{k}(n+1-2i)a_i + \sum_{i=k+1}^{n}(n+1-2i)a_i \ge n\sum_{i=1}^{k}a_i.$$

Ta có $a_1 \ge \cdots \ge a_k$ và $n+1-2\cdot 1 \ge \cdots \ge n+1-2\cdot k$ nên theo bất đẳng thức *Chebyshev*,

$$\sum_{i=1}^{k}(n+1-2i)a_i \ge \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}(n+1-2i)\right)\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right) = (n-k)\sum_{i=1}^{k}a_i.$$

Tương tự, ta cũng có $a_{k+1} \ge \cdots \ge a_n$ và $n+1-2\cdot(k+1) \ge \cdots \ge n+1-2\cdot n$, nên

$$\sum_{i=k+1}^{n}(n+1-2i)a_i \ge \frac{1}{n-k}\left(\sum_{i=k+1}^{n}(n+1-2i)\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}a_i\right) = -k\sum_{i=k+1}^{n}a_i = k\sum_{i=1}^{k}a_i.$$

Từ đây, ta thu được

$$VT \ge (n-k)\sum_{i=1}^{k}a_i + k\sum_{i=1}^{k}a_i = n\sum_{i=1}^{k}a_i = VP.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. Và như vậy, ta đi đến kết luận $\max C(n) = \frac{n}{2}$. ■

Bài CH19. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, ta đều có*

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}} + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} + \frac{1}{c+\frac{1}{a}} \ge \frac{1}{a+\frac{1}{a}} + \frac{1}{b+\frac{1}{b}} + \frac{1}{c+\frac{1}{c}}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \max\{a,b,c\}$. Khi đó, ta có

$$\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)-\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=\frac{(a-c)(b-c)}{ac}\geq 0.$$

Từ đó dẫn đến

$$\frac{1}{b+\frac{1}{c}}+\frac{1}{c+\frac{1}{a}}\geq\frac{1}{b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{c+\frac{1}{c}}.$$

Vì vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}}+\frac{1}{b+\frac{1}{a}}\geq\frac{1}{a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{b+\frac{1}{b}}.$$

Bằng một số tính toán đơn giản, ta thấy ngay bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}\geq 0 \text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài CH20. *Cho $2n$ số thực $a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2\ldots,b_n$ thỏa mãn $0<a_1\leq\cdots\leq a_n$ và $0\leq b_1\leq\cdots\leq b_n$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2\geq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2.$$

(Darij Grinberg)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp theo n. Với $n=2$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{4}(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2\geq(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2.$$

Do $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2$ nên bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)\geq 2|a_1b_2-a_2b_1|.$$

Ta có $(a_1+a_2)(b_1+b_2)-2(a_1b_2-a_2b_1)=a_1b_1+3a_2b_1+b_2(a_2-a_1)\geq 0$, và

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)+2(a_1b_2-a_2b_1)=a_1b_1+3a_1b_2+a_2(b_2-b_1)\geq 0,$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Vậy khẳng định của ta đúng khi $n=2$. Giả sử khẳng định đúng cho $n=k$ ($k\geq 2$), khi đó ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng khi $n=k+1$. Thật vậy, khi $n=k+1$, bất đẳng thức của ta có dạng

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i\right)^2\geq\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ib_i\right)^2.$$

Đặt $a=\sum_{i=1}^k a_i$, $b=\sum_{i=1}^k b_i$ và với chú ý rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ib_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2+\sum_{i=1}^k(a_{k+1}b_i-a_ib_{k+1})^2,$$

ta có thể viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng

$$\frac{1}{4}(a_{k+1}+a)^2(b_{k+1}+b)^2 \ge \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{k}(a_{k+1}b_i - a_ib_{k+1})^2.$$

Để ý rằng $0 \le a_1 \le \cdots \le a_k$ và $0 \le b_1 \le \cdots \le b_k$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2 \le \frac{1}{4}a^2b^2.$$

Mặt khác, dễ thấy $(a_{k+1}+a)^2(b_{k+1}+b)^2 \ge a_{k+1}^2(b_{k+1}+b)^2 + a^2b^2 + b_{k+1}^2(a^2+2a_{k+1}a) + 2a_{k+1}ab^2$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$a_{k+1}^2(b_{k+1}+b)^2 + b_{k+1}^2(a^2+2a_{k+1}a) + 2a_{k+1}ab^2 \ge 4\sum_{i=1}^{k}(a_{k+1}b_i - a_ib_{k+1})^2.$$

Đến đây, ta có đánh giá sau

$$\sum_{i=1}^{k}(a_{k+1}b_i - a_ib_{k+1})^2 = a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} a_i^2 - 2a_{k+1}b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_ib_i \le a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} a_i^2,$$

do đó bất đẳng thức cuối được suy ra từ

$$a_{k+1}^2(b_{k+1}+b)^2 + b_{k+1}^2(a^2+2a_{k+1}a) + 2a_{k+1}ab^2 \ge 4a_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + 4b_{k+1}^2\sum_{i=1}^{k} a_i^2,$$

hay là

$$a_{k+1}^2\left(b_{k+1}^2 + b^2 + 2b_{k+1}b - 4\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) + b_{k+1}^2\left(a^2 + 2a_{k+1}a - 4\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right) + 2a_{k+1}ab^2 \ge 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
b_{k+1}^2 + b^2 + 2b_{k+1}b - 4\sum_{i=1}^{k} b_i^2 &= b_{k+1}^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 + 2b_{k+1}\sum_{i=1}^{k} b_i - 4\sum_{i=1}^{k} b_i^2 \\
&\ge b_k^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} b_i\right)^2 + 2b_k\sum_{i=1}^{k} b_i - 4\sum_{i=1}^{k} b_i^2 \\
&\ge b_k^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + 2b_k\sum_{i=1}^{k-1} b_i + 2b_k\sum_{i=1}^{k} b_i - 4\sum_{i=1}^{k} b_i^2 \\
&= 4b_k\sum_{i=1}^{k-1} b_i - 3\sum_{i=1}^{k-1} b_i^2 \ge 0,
\end{aligned}$$

mà $a_{k+1} \ge a_k$, $2a_{k+1}a \ge 2a_ka$, $2a_{k+1}ab^2 \ge 2a_kab^2 \ge a_k^2b^2$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$a_k^2\left(b_{k+1}^2 + b^2 + 2b_{k+1}b - 4\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right) + b_{k+1}^2\left(a^2 + 2a_ka - 4\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right) + a_k^2b^2 \ge 0,$$

tương đương

$$a_k^2\left(2b^2+2b_{k+1}b-4\sum_{i=1}^{k}b_i^2\right)+b_{k+1}^2\left(a_k^2+a^2+2a_ka-4\sum_{i=1}^{k}a_i^2\right)\ge 0.$$

Dựa trên lập luận ở trên, ta dễ thấy $2b^2+2b_{k+1}b-4\sum_{i=1}^{k}b_i^2\ge 0$ và $a_k^2+a^2+2a_ka-4\sum_{i=1}^{k}a_i^2\ge 0$, từ đó suy ra khẳng định của ta cũng đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra nó đúng với mọi $n\ge 2$. Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Bài CH21. *Cho a,b,c,d là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a-c)(2a+c)}{(a+b+c)^2}+\frac{(b-d)(2b+d)}{(b+c+d)^2}+\frac{(c-a)(2c+a)}{(c+d+a)^2}+\frac{(d-a)(2d+b)}{(d+a+b)^2}\ge 0.$$

(Park Doo Sung)

Lời giải (V. Q. B. Cẩn). Đặt $P(a,b,c,d)$ là vế trái của bất đẳng thức đã cho. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $(a-c)(d-b)\ge 0$. Thật vậy, nếu $(a-c)(d-b)\le 0$, lấy $a_1=b, b_1=c, c_1=d, d_1=a$ thì ta có $P(a,b,c,d)=P(a_1,b_1,c_1,d_1)$ và $(a_1-c_1)(d_1-b_1)=-(a-c)(d-b)\ge 0$. Như vậy ta hoàn toàn có thể giả thiết như trên. Bây giờ, với giả thiết này, ta sẽ chỉ ra rằng ta có thể giả sử một cách không mất tổng quát rằng $a\ge c$ và $d\ge b$. Thật vậy, nếu $a\ge c$ thì hiển nhiên $d\ge b$ do $(a-c)(d-b)\ge 0$. Ngược lại, nếu $a\le c$ thì ta có $b\ge d$, lúc này đặt $a_2=c, b_2=d, c_2=a, d_2=b$ thì ta dễ thấy $P(a,b,c,d)=P(a_2,b_2,c_2,d_2)$, hơn nữa ta có $(a_2-c_2)(d_2-b_2)=(a-c)(d-b)\ge 0$ và $a_2\ge c_2, d_2\ge b_2$. Bây giờ, ta hãy để ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{(a-c)(2a+c)}{(a+b+c)^2}+\frac{(c-a)(2c+a)}{(c+d+a)^2}&=\\ &=\frac{(a-c)^2}{(a+b+c)^2}+\frac{(a-c)(d-b)(2c+a)(2a+b+2c+d)}{(a+b+c)^2(c+d+a)^2}\ge\frac{(a-c)^2}{(a+b+c)^2},\end{aligned}$$

và

$$\frac{(b-d)(2b+d)}{(b+c+d)^2}+\frac{(d-a)(2d+b)}{(d+a+b)^2}=\frac{(d-b)^2}{(b+c+d)^2}-\frac{(a-c)(d-b)(b+2d)(a+2b+c+2d)}{(b+c+d)^2(d+a+b)^2}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a-c)^2}{(a+b+c)^2}+\frac{(d-b)^2}{(b+c+d)^2}\ge\frac{(a-c)(d-b)(b+2d)(a+2b+c+2d)}{(b+c+d)^2(d+a+b)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ với chú ý rằng $(a-c)(d-b)\ge 0$, ta thấy ngay bất đẳng thức này là hệ quả của bất đẳng thức sau

$$\frac{2}{(a+b+c)(b+c+d)}\ge\frac{(b+2d)(a+2b+c+2d)}{(b+c+d)^2(d+a+b)^2}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức cuối cho $(a+b+c)(b+c+d)^2(d+a+b)^2>0$, ta có thể viết lại nó dưới dạng

$$f(c)=2(b+c+d)(d+a+b)^2-(b+2d)(a+2b+c+2d)(a+b+c)\ge 0.$$

Dễ thấy $f(c)$ là một hàm lõm của c, mà $0<c\le a$ nên ta có $f(c)\ge\min\{f(0),f(a)\}$. Lại có

$$f(0)=2(b+d)(d+a+b)^2-(b+2d)(a+2b+2d)(a+b)=ab(a+b)+2d^2(b+d)\ge 0,$$

và
$$f(a)=2(d+a+b)^3-2(b+2d)(a+b+d)(2a+b)=2(a-d)^2(a+b+d)\ge 0,$$
nên hiển nhiên $f(c)\ge 0$. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=c$ và $b=d$. ■

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được kết quả tương tự sau

Với mọi số thực dương a,b,c,d thì
$$\frac{(a-c)(2a+c)}{a+b+c}+\frac{(b-d)(2b+d)}{b+c+d}+\frac{(c-a)(2c+a)}{c+d+a}+\frac{(d-b)(2d+b)}{d+a+b}\ge 0.$$

♣

Bài CH22. *Cho $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng*
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}x_i\le 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2 x_k^{-1}.$$

(Gord Sinnamon và Hans Heinig, Crux Mathematicorum)

Lời giải (Gord Sinnamon, Hans Heinig). Ta dễ dàng kiểm tra được rằng
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}x_i=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\sum_{j=1}^{k}x_j=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-k+2}{2}x_k\ge\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2x_k.$$

Vì vậy, sử dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta thu được
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}x_i&=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\sum_{j=1}^{k}x_j=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)x_k^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)x_k^{-1/2}\\&\le\left[\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)^2x_k\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2x_k^{-1}\right]^{-1/2}\\&\le\left(2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}x_i\right)^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2x_k^{-1}\right]^{-1/2}.\end{aligned}$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra được
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j}x_i\le 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}x_j\right)^2 x_k^{-1}.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. ■

Các bài toán hình học

Bài HH1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Chứng minh rằng*

$$MA + 2OI \ge MB + MC \ge MA - 2OI.$$

(Trần Quang Hùng)

Lời giải (T. Q. Hùng). Sử dụng tính chất phép chiếu vector, ta có

$$MA^2 = 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MA}, \quad \text{suy ra} \quad MA = 2\overrightarrow{MO}\cdot\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$MB = 2\overrightarrow{MO}\cdot\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}, \quad MC = 2\overrightarrow{MO}\cdot\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}.$$

Vậy từ ba đẳng thức trên, ta thu được

$$MB + MC - MA = 2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right). \tag{1}$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* dạng vector, ta có

$$-MO\left|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right| \le \overrightarrow{MO}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right) \le MO\left|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right|. \tag{2}$$

Do $M \in (O)$ nên $MO = R$, chúng ta sẽ tính $\left|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right|$. Thật vậy

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right|^2 &= 3+2\left(\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}\cdot\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}\cdot\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}-\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}\cdot\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right)\\
&= 3+2(\cos(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC})-\cos(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})-\cos(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}))\\
&= 3-2(\cos A+\cos B+\cos C)\ (\text{do } M \text{ nằm trên cung nhỏ } BC)\\
&= 3-2\frac{R+r}{R}\ \left(\text{do } \cos A+\cos B+\cos C = \frac{R+r}{R}\right)\\
&= \frac{R^2-2Rr}{R^2} = \frac{OI^2}{R^2}\ (\text{công thức Euler})
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$MO\left|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}+\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\right| = OI. \tag{3}$$

Vậy từ $(1),(2),(3)$ ta thu được bất đẳng thức $MA+2OI \ge MB+MC \ge MA-2OI$, và đẳng thức xảy ra chỉ khi ABC là tam giác đều. ■

Bài HH2. *Cho tam giác ABC, trực tâm H, bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Với mọi điểm M trên mặt phẳng, hãy tìm giá trị bé nhất của biểu thức*

$$MA^3 + MB^3 + MC^3 - \frac{3}{2}R\cdot MH^2.$$

(Trần Quang Hùng)

Lời giải (T. Q. Hùng). Bằng bất đẳng thức $AM-GM$, chúng ta có

$$\frac{MA^3}{R}+\frac{R^2+MA^2}{2}\ge \frac{MA^3}{R}+R.MA\ge 2MA^2,$$

suy ra

$$\frac{MA^3}{R}\ge \frac{3}{2}MA^2-\frac{R^2}{2}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{MB^3}{R}\ge \frac{3}{2}MB^2-\frac{R^2}{2},\quad \frac{MC^3}{R}\ge \frac{3}{2}MC^2-\frac{R^2}{2}.$$

Như vậy

$$\frac{MA^3+MB^3+MC^3}{R}\ge \frac{3}{2}(MA^2+MB^2+MC^2)-\frac{3}{2}R^2. \tag{1}$$

Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2+MC^2&=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2\\&=3MO^2+2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+3R^2\\&=3MO^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OH}+3R^2 \text{ (do } \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH})\\&=3MO^2-(OM^2+OH^2-MH^2)+3R^2\\&=2MO^2-OH^2+MH^2+3R^2\\&\ge 3R^2-OH^2+MH^2. \end{aligned}\tag{2}$$

Vậy từ $(1),(2)$, ta suy ra

$$\frac{MA^3+MB^3+MC^3}{R}\ge \frac{3}{2}(3R^2-OH^2+MH^2)-\frac{3}{2}R^2.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với R, ta thu được

$$MA^3+MB^3+MC^3-\frac{3}{2}R\cdot MH^2\ge 3R^3-\frac{3}{2}R\cdot OH^2=\text{const}.$$

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $M\equiv O$, vì vậy giá trị trên cũng chính là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^3+MB^3+MC^3-\frac{3}{2}R\cdot MH^2$. Bài toán được giải quyết xong. ■

Bài HH3. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ bên trong nó. Chứng minh rằng*

$$(AP+BP+CP)^2\ge\sqrt{3}(aPA+bPB+cPC).$$

(Nguyễn Lữ Khoa, Mathematical Reflections)

Lời giải (T. Q. Hùng). Chúng ta lần lượt đặt $\angle BPC=\alpha,\angle CPA=\beta,\angle APB=\gamma$, khi đó $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$. Bởi định lý hàm số cosine, ta có

$$a^2=PB^2+PC^2-2PB\cdot PC\cos\alpha,\quad \text{suy ra}\quad a^2PA=PA(PB^2+PC^2)-PA\cdot PB\cdot PC\cos\alpha.$$

Tương tự, ta tính được b^2PB, c^2PC. Từ bất đẳng thức cơ bản $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \geq -\frac{3}{2}$ với mọi α, β, γ thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, ta thu được

$$\begin{aligned}
&a^2PA + b^2PB + c^2PC = \\
&\quad = PA(PB^2 + PC^2) + PB(PC^2 + PA^2) + PC(PA^2 + PB^2) - 2PA \cdot PB \cdot PC(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \\
&\quad \leq PA(PB^2 + PC^2) + PB(PC^2 + PA^2) + PC(PA^2 + PB^2) + 3PB \cdot PC \cdot PA \\
&\quad = (PA + PB + PC)(PB \cdot PC + PC \cdot PA + PA \cdot PB) \\
&\quad \leq \frac{1}{3}(PA + PB + PC)^3.
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}
(PA + PB + PC)^4 = (PA + PB + PC)^3(PA + PB + PC) &\geq 3(a^2PA + b^2PB + c^2PC)(PA + PB + PC) \\
&\geq 3(aPA + bPB + cPC)^2 \text{ (\textit{Cauchy Schwarz})}.
\end{aligned}$$

Lấy căn bậc hai của hai vế, ta thu được

$$(PA + PB + PC)^2 \geq \sqrt{3}(aPB + bPB + cPC).$$

Đó chính là điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều và P trùng với tâm của nó. ∎

Bài HH4. *Giả sử a, b, c là ba cạnh của tam giác và m_a, m_b, m_c lần lượt là các trung tuyến tương ứng với chúng. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{m_a}{a^2} + \frac{m_b}{b^2} + \frac{m_c}{c^2} \geq \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{2abc}.$$

(Bodan*)

Lời giải (T. Q. Hùng). Bất đẳng thức tương đương

$$\left(\frac{m_abc}{a} + \frac{m_bca}{b} + \frac{m_cab}{c}\right)^2 \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Ta lại có

$$\left(\frac{m_abc}{a} + \frac{m_bca}{b} + \frac{m_cab}{c}\right)^2 \geq 3\sum_{cyc} \frac{(m_bca) \cdot (m_cab)}{bc} = 3\sum_{cyc} a^2m_bm_c.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$3\sum_{cyc} a^2m_bm_c \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2, \quad \text{tức là} \quad 4\sum_{cyc} a^2m_bm_c \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Thật vậy, chuyển qua tam giác trung tuyến với ba cạnh là m_a, m_b, m_c với chú ý rằng $a^2 = \frac{4}{9}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$ và $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$, chúng ta cần chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)m_bm_c \geq (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2.$$

Bằng các biến đổi tương đương, ta thấy rằng bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}(m_a^2 - (m_b - m_c)^2)(m_b - m_c)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng bởi vì $m_a > |m_b - m_c|, m_b > |m_c - m_a|, m_c > |m_a - m_b|$. Đó là điều phải chứng minh. ■

Bài HH5. *Với mọi tam giác nhọn ABC, các trung tuyến m_a, m_b, m_c, các bán kính bằng tiếp r_a, r_b, r_c, nửa chu vi s, chứng minh bất đẳng thức*

$$m_a \cdot r_a + m_b \cdot r_b + m_c \cdot r_c \le s^2.$$

(Darij Grinberg)

Lời giải (Darij Grinberg). Gọi A' là trung điểm BC và O là tam đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có O nằm trong tam giác vì ABC là tam giác nhọn. Vậy $OA' = OC\cos A'OC = R\cos A$, từ đó suy ra

$$m_a = AA' \le OA + OA' = R + R\cos A = 2R\cos^2\frac{A}{2} = \frac{a}{\sin A}\cos^2\frac{A}{2} = \frac{a}{2}\cdot\cot\frac{A}{2}.$$

Nói cách khác $m_a \le \frac{a}{2} : \tan\frac{A}{2}$. Ta lại có $\tan\frac{A}{2} = \frac{r_a}{s}$, do đó $m_a \le \frac{a}{2} : \frac{r_a}{s} = \frac{as}{2r_a}$. Nhân cả hai vế cho r_a, ta thu được $m_a \cdot r_a \le \frac{as}{2}$. Tương tự cho các đỉnh B, C thì $m_b \cdot r_b \le \frac{bs}{2}$ và $m_c \cdot r_c \le \frac{cs}{2}$. Và như thế

$$m_a \cdot r_a + m_b \cdot r_b + m_c \cdot r_c \le \frac{as}{2} + \frac{bs}{2} + \frac{cs}{2} = \frac{a+b+c}{2}\cdot s = s \cdot s = s^2.$$

Đó là điều phải chứng minh. ■

Bài HH6. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\cos^2\frac{A}{2} - \sum_{cyc}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) \le \frac{3}{2}.$$

(Trần Quang Hùng)

Lời giải (T. Q. Hùng). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $A \le C \le B$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} &\le \frac{1}{2}\left[1 + \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)^2\right] + \cos\frac{A+B}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\right) + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(3 - \cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2}\right) + \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\right)^2. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\right)^2 \ge \frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\cos^2\frac{A}{2} - \sum_{cyc}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right). \qquad (2)$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với từng bất đẳng thức trong dãy sau

$$\left(\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\right)^2 \ge \left(\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right)^2,$$

$$-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\ge 2\cos^2\frac{C}{2}-2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$
$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}\ge 0,$$
$$\left(\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)\ge 0.$$

Điều này luôn đúng bởi ta có $\cos\frac{A}{2}\ge\cos\frac{C}{2}\ge\cos\frac{B}{2}$ (do giả thiết $A\le C\le B$). Vậy từ $(1),(2)$, ta có

$$\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\cos^2\frac{A}{2}-\sum_{cyc}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right).$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài HH7. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\ge\sin\frac{3A}{2}+\sin\frac{3B}{2}+\sin\frac{3C}{2}.$$

(USAMO 2002)

Lời giải (T. H. Sơn). Thực hiện các biến đổi tương đương, ta thấy rằng bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{cyc}\cos\frac{B-C}{2}\ge\sum_{cyc}\sin\frac{3A}{2},$$
$$2\sum_{cyc}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\ge 3\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}-4\sum_{cyc}\sin^3\frac{A}{2},$$
$$4\sum_{cyc}\sin^3\frac{A}{2}+2\sum_{cyc}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge 2\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$2\left(\sin^3\frac{A}{2}+\sin^3\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)\ge\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}. \tag{1}$$

Thật vậy, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với từng bất đẳng thức trong dãy sau

$$2\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}\ge 1,$$
$$1-\cos A+1-\cos B+\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\ge 1,$$
$$1+2\sin\frac{C}{2}\ge\cos A+\cos B+\cos\frac{A-B}{2}\text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Tương tự, ta có

$$2\left(\sin^3\frac{B}{2}+\sin^3\frac{C}{2}\right)+\sin\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\ge\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}, \tag{2}$$
$$2\left(\sin^3\frac{C}{2}+\sin^3\frac{A}{2}\right)+\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\ge\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}. \tag{3}$$

Vậy từ $(1),(2)$ và (3), ta suy ra

$$4\sum_{cyc}\sin^3\frac{A}{2}+2\sum_{cyc}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geq 2\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}.$$

Đó là điều phải chứng minh. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều. ■

Bài HH8. *Cho tam giác nhọn ABC, P là điểm bất kỳ bên trong tam giác ABC, đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC tại một điểm thứ hai A_0, tương tự ta có B_0 và C_0. Chứng minh rằng*

(a)

$$PA_0\cdot PB_0\cdot PC_0\geq 8PA\cdot PB\cdot PC;$$

(b)

$$\frac{PA_0}{PA}+\frac{PB_0}{PB}+\frac{PC_0}{PC}\geq 6.$$

(Zhaoli*)

Lời giải (Yimin Ge). Sử dụng bất đẳng thức *Ptolemy*, ta có

$$PA_0\geq\frac{PB\cdot CA_0+PC\cdot BA_0}{BC}.$$

Đặt $x=\sin\angle BPC_0=\sin\angle CPB_0$, $y=\sin\angle BPA_0=\sin\angle APB_0$, $z=\sin\angle CPA_0=\sin\angle APC_0$. Theo định lý hàm số *sine*, ta có

$$\frac{CA_0}{BC}=\frac{z}{x},\quad \frac{BA_0}{BC}=\frac{y}{x}.$$

Từ đó ta thu được

$$PA_0\geq\frac{z}{x}PB+\frac{y}{x}PC. \tag{1}$$

Tương tự cho B_0,C_0, ta có

$$PB_0\geq\frac{x}{y}PC+\frac{z}{y}PB, \tag{2}$$

$$PC_0\geq\frac{y}{z}PA+\frac{x}{z}PC. \tag{3}$$

Nhân các bất đẳng thức $(1),(2),(3)$, ta được

$$PA_0\cdot PB_0\cdot PC_0\geq\prod_{cyc}\left(\frac{z}{x}PB+\frac{y}{x}PC\right)\geq 8PA\cdot PB\cdot PC.$$

Đó là bất đẳng thức phần a). Bây giờ ta sẽ chứng minh phần b). Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ kết hợp với các bất đẳng thức $(1),(2),(3)$, ta được

$$\sum_{cyc}\frac{PA_0}{PA}\geq\sum_{cyc}\left(\frac{z}{x}\frac{PB}{PA}+\frac{y}{x}\frac{PC}{PA}\right)\geq 6.$$

Bài toán được chứng minh xong. ■

Bài HH9. *Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{MA}{BC}+\frac{MB}{CA}+\frac{MC}{AB}\geq\min\left\{\frac{b}{c}+\frac{c}{b},\frac{c}{a}+\frac{a}{c},\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\}\geq 2.$$

(Johnmclay*)

Lời giải (Darij Grinberg). Ta dễ thấy vế sau không nhỏ hơn 2, ta chỉ phải chứng minh

$$\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}\geq \min\left\{\frac{b}{c}+\frac{c}{b},\frac{c}{a}+\frac{a}{c},\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\}.$$

Đặt $E=\min\left\{\frac{b}{c}+\frac{c}{b},\frac{c}{a}+\frac{a}{c},\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\}$. Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử rằng M nằm trên cung BC của đường tròn ngoại tiếp không chứa A. Từ đẳng thức *Ptolemy*, ta suy ra $CA\cdot MB+AB\cdot MC=BC\cdot MA$. Nói cách khác, $b\cdot MB+c\cdot MC=a\cdot MA$. Như vậy, $MA=\frac{b\cdot MB+c\cdot MC}{a}$. Từ đó,

$$\begin{aligned}\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}&=\frac{\frac{b\cdot MB+c\cdot MC}{a}}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}=\frac{MB\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+MC\cdot\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)}{a}\\&\geq\frac{MB\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+MC\cdot\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)}{MB+MC}\geq\frac{MB\cdot E+MC\cdot E}{MB+MC}=E.\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng minh được

$$\frac{MA}{a}+\frac{MB}{b}+\frac{MC}{c}\geq \min\left\{\frac{b}{c}+\frac{c}{b},\frac{c}{a}+\frac{a}{c},\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right\}\geq 2.$$

■

Bài HH10. *Cho tam giác ABC, M là điểm bất kỳ bên trong nó, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$PA\sin\angle BPC+PB\sin\angle CPA+PC\sin\angle APB.$$

(Manlio)

Lời giải (LevonNurbekian*). Ta sẽ chứng minh rằng

$$PA\sin\angle BPC+PB\sin\angle CPA+PC\sin\angle APB\leq\frac{AB+BC+CA}{2}.$$

Thật vậy, đặt $\varphi=\angle PAB,\delta=\angle PBC,\omega=\angle PCA,\alpha=\angle BAC,\beta=\angle ABC,\gamma=\angle BCA$. Sử dụng biến đổi lượng giác, ta có, bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với

$$\cos\varphi\cos\delta\cos\omega+\cos(\alpha-\varphi)\cos(\beta-\delta)\cos(\gamma-\omega)\leq\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2},$$

hay là

$$\sum_{cyc}\sin\alpha\cos\left(\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}+\varphi-\delta-\omega\right)\leq\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

Điều này hiển nhiên, và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\varphi=\frac{\alpha}{2},\delta=\frac{\beta}{2},\omega=\frac{\gamma}{2}$, khi đó P trùng tâm nội tiếp tam giác ABC. ■

Sưu tầm các bài viết hay về bất đẳng thức

1. Cauchy – Bunyakovski – Schwarz Inequality[3]

TRẦN NAM DŨNG, GABRIEL DOSPINESCU

Together with *Arthimetic mean – Geometric mean* (*AM – GM*), *Schur*, *Jensen* and *Holder* inequality, *Cauchy – Bunyakovski – Schwarz* inequality[4] (*CBS*) is a fundamental result, with remarkable applications. The main question is how do we recognise an inequality that can be solved using this method? It is very hard to say this clearly, but it is definitely good to think of *CBS* inequality whenever we have sums of radicals or sums of squares and especially when we have expressions involving radicals.

Let us first consider some problems in which it is better to apply the direct form of *CBS* inequality

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

The main difficulty is to choose a_i and b_i. We will see that in some cases this is trivial, while in the other cases it is very difficult. Let us solve some problems now:

Example 1. *Prove that if x, y, z are real numbers such that $x^2+y^2+z^2=2$, then the following inequality holds*

$$x+y+z \le 2+xyz.$$

(IMO Shorlist, proposed by Poland)

Solution. Why do we shoud think of *CBS* inequality? The reason: the relation we are asked to prove can be written as $x(1-yz)+y+z \le 2$ and we are bound to consider the sum $x^2+y^2+z^2$. However, there are lots of ways to apply *CBS*. The choice

$$[x(1-yz)+y+z]^2 \le [x^2+y^2+z^2][2+(1-yz)^2]$$

does not help. So, maybe it is better to look at $y+z$ as a single number. Observe that we have the equality when $x=1, y=1$ and $z=1$ (for example), the choice

$$x(1-yz)+y+z \le \sqrt{[x^2+(y+z)^2][1+(1-yz)^2]}$$

becomes natural. So, we must prove that $2(1+yz)(2-2yz+y^2z^2) \le 4$ or $y^3z^3 \le y^2z^2$, which is easy, since $2 \ge y^2+z^2 \ge 2yz$. ■

Another non-trivial application of *CBS* inequality is the following problem.

Example 2. *Let a, b, c, x, y, z be positive real numbers such that $ax+by+cz=xyz$. Prove that*

$$x+y+z > \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}.$$

[3] Bài viết này được trích từ tạp chí Toán học và tuổi trẻ.

[4] Trong quyển sách này, chúng ta gọi là bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*.

Solution. We write $\frac{a}{yz}+\frac{b}{zx}+\frac{c}{xy}=1$ and now the substitution $a=yzu, b=zxv$ and $c=xyw$ becomes natural. So, we must prove that

$$\sqrt{z(yu+xv)}+\sqrt{x(zv+yw)}+\sqrt{y(zu+xw)}<x+y+z \text{ for } u+v+w=1.$$

One can see the form of the *CBS* inequality

$$\left[\sqrt{z(yu+xv)}+\sqrt{x(zv+yw)}+\sqrt{y(zu+xw)}\right]\le(x+y+z)(yu+xv+zv+yw+zu+xw),$$

and the latter is of course smaller than $(x+y+z)^2$, since $u+v+w=1$. ■

We have seen that *CBS* inequality can be applied when we have sums. What about products? The following example will show that we need some imagination in this case:

Example 3. *Let n $(n\ge 2)$ be an integer and let $a_1,a_2,\ldots,a_n$ be positive real numbers. Prove the inequality*

$$(a_1^3+1)(a_2^3+1)\cdots(a_n^3+1)\ge(a_1^2a_2+1)\cdots(a_n^2a_1+1).$$

(Czech – Slovak – Polish Match, 2001)

Solution. We try to apply *CBS* inequality for each factor of the product in the *RHS*. It is natural to write $(1+a_1^2a_2)^2\le(1+a_1^3)(1+a_1a_2^2)$, since we need $1+a_1^3$, which appears in the *LHS*. Similarly, we can write

$$(1+a_2^2a_3)^2\le(1+a_2^3)(1+a_2a_3^2),\quad\ldots,\quad(1+a_n^2a_1)^2\le(1+a_n^3)(1+a_na_1^2).$$

Multiplying we obtain

$$[(a_1^2a_2+1)\cdots(a_n^2a_1+1)]^2\le[(a_1^3+1)\cdots(a_n^3+1)][(1+a_1a_2^2)\cdots(1+a_na_1^2)].\qquad(*)$$

Well, it seems that *CBS* inequality does not work for this one. False! We use again the same argument to find that

$$[(1+a_1a_2^2)\cdots(1+a_na_1^2)]^2\le[(a_1^3+1)\cdots(a_n^3+1)][(a_1^2a_2+1)\cdots(a_n^2a_1+1)].\qquad(**)$$

Thus, if $(a_1^2a_2+1)\cdots(a_n^2a_1+1)\ge(1+a_1a_2^2)\cdots(1+a_na_1^2)$, then $(*)$ will give the answer, otherwise $(**)$ will. ■

It is now time to solve some harder problems.

Example 4. *Given $x>0, y>0$ such that $x^2+y^3\ge x^3+y^4$. Prove that*

$$x^3+y^3\le 2.$$

(Russia, 1999)

Solution. The idea is to majorize x^3+y^3 with $A(x^3+y^4)$ for a certain A, which seems reasonable, looking at the exponents. We can try some tricks with *CBS* and *AM – GM*:

$$(x^3+y^3)^2\le(x^3+y^4)(x^3+y^2)\le(x^2+y^3)(x^3+y^2)\le\left(\frac{x^2+y^2+x^3+y^3}{2}\right)^2.$$

Thus we have established that $x^3+y^3\le x^2+y^2$. However $(x^2+y^2)^2\le(x+y)(x^3+y^3)$ and so $x^2+y^2\le x+y\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Hence $x^2+y^2\le 2$ and consequently $x^3+y^3\le 2$. ■

Example 5. *Prove that if* $x, y, z \in [-1, 1]$ *satisfying* $x+y+z+xyz = 0$, *then*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le 3.$$

Solution. We first try *CBS* inequality in the obvious form:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le \sqrt{3(x+y+z+3)}.$$

But is the *RHS* smaller than 3? Well, if $x+y+z \le 0$, it is. Let us suppose it is not the case. Thus $xyz < 0$. Let $z < 0$. It follows that $x, y \in (0, 1]$. We will not give up and try to use again *CBS* inequality, but for the first two radicals:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} \le \sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1}.$$

We have to prove that

$$\sqrt{2x+2y+4}+\sqrt{z+1} \le 3,$$

which is equivalent to

$$\frac{2(x+y)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \le \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}}, \quad \text{or} \quad \frac{-2z(1+xy)}{2+\sqrt{2x+2y+4}} \le \frac{-z}{1+\sqrt{z+1}},$$

that is

$$2xy+2(1+xy)\sqrt{z+1} \le \sqrt{2x+2y+4}.$$

Since $1+z = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$, everything comes down to proving that

$$xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} \le \sqrt{1+\frac{x+y}{2}}.$$

We would like to use *CBS* inequality such that $1-x$ vanishes from the *LHS*. Specifically:

$$\begin{aligned} xy+\sqrt{(1-x)(1-y)(1+xy)} &= \sqrt{x}\cdot\sqrt{xy^2}+\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+xy-y-xy^2} \\ &\le \sqrt{1+xy-y} \le 1 \le \sqrt{1+\frac{x+y}{2}}. \end{aligned}$$

■

Maybe the hardest example of them all is the following problem:

Example 6. *Prove that for all positive real numbers* a, b, c, x, y, z, *we have*

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) \ge 3\cdot\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}.$$

(Walther Janous, Crux Mathematicorum)

Solution. We have

$$\begin{aligned} \sum_{cyc}\frac{a}{b+c}(y+z)+\sum_{cyc}(y+z) &= \left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{y+z}{b+c}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{cyc}(b+c)\right]\left(\sum_{cyc}\frac{y+z}{b+c}\right) \\ &\ge \frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\sqrt{y+z}\right)^2. \end{aligned}$$

We will show that

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\sqrt{y+z}\right)^2 \geq \frac{3\sum\limits_{cyc} yz}{\sum\limits_{cyc} x} + 2\sum_{cyc} x \tag{1}$$

from which our result will follow.
(1) is equivalent to

$$\left[\sum_{cyc}\left(x+\sqrt{x^2+xy+yz+zx}\right)\right]\left(\sum_{cyc} x\right) \geq 3\sum_{cyc} yz + 2\left(\sum_{cyc} x\right)^2.$$

Since

$$\sum_{cyc}\sqrt{x^2+(xy+yz+zx)} \geq \sqrt{\left(\sum_{cyc} x\right)^2 + 9\sum_{cyc} yz}.$$

Hence, it is enough to show that

$$\left(\sum_{cyc} x\right)\sqrt{\left(\sum_{cyc} x\right)^2 + 9\sum_{cyc} yz} \geq 3\sum_{cyc} yz + 2\left(\sum_{cyc} x\right)^2$$

which becomes obvious when we square both sides. ■

We will now take a look at most used trick in past year constest problems. It is a direct variant of CBS inequality:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{bk} \geq \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k},$$

for all real numbers a_k and positive numbers b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

An easy application of this trick is the following problem given at the Tournament of The Towns competition.

Example 7. *Prove that for all positive real numbers a, b, c, we have the following inequality*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Solution. If we write the *RHS* as $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$, we will know what we have to do

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = \sum_{cyc}\frac{(a^2)^2}{a(a^2+ab+b^2)} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a(a^2+ab+b^2)}.$$

So, we will be able to prove the inequality if $\sum\limits_{cyc} a(a^2+ab+b^2) \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$, which is in fact verified with equality occur. ■

There are cases when it is impossible to find a_i and b_i. Let us discuss some problems in which it is not easy at all to use the trick.

Example 8. *Prove that for all positive real numbers a,b,c, we have the inequality*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}.$$

(Japan, 1997)

Solution. The most natural way would be:

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}=\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{b+c}{a}-1\right)^2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+1}\ge\frac{\left(\sum\limits_{cyc}\frac{b+c}{a}-3\right)^2}{\sum\limits_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+3}$$

because this way we obtain a nice inequality in three variables, whose properties are well-known. Thus, we have to show that if $x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{2}$, then

$$(x+y+z-3)^2\ge\frac{3}{5}(x^2+y^2+z^2+3),$$

which is equivalent to

$$\left(\sum_{cyc}x\right)^2-15\sum_{cyc}x+3\sum_{cyc}xy+18\ge 0.$$

Unfortunately, we cannot use directly the fact that $xy+yz+zx\ge 12$. So, we should look for some thing like $xy+yz+zx\ge k(x+y+z)$. The best would be $k=2$ (so as to have an equality when $x=y=z=2$). Indeed, after some computations this can be written as

$$\sum_{cyc}a^3+3abc\ge\sum_{cyc}ab(a+b),$$

which is *Schur* inequality. Hence, we can write

$$\left(\sum_{cyc}x\right)^2-15\sum_{cyc}x+3\sum_{cyc}xy+18\ge\left(\sum_{cyc}x\right)^2-9\sum_{cyc}x+18\ge 0,$$

the last one being obvious since $x+y+z\ge 6$. ■

At IMO 2001, problem 2 was a challenge for the contestants. Here we suggest an approach, which leads to a nice generalization.

Example 9. *Given positive real number $k\ge 8$. Show that for positive real numbers a,b,c, we have*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\ge\frac{3}{\sqrt{k+1}}.$$

(Generalization of IMO 2001)

Solution. We have, by *CBS* inequality

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}\right)\left(\sum_{cyc}a\sqrt{a^2+kbc}\right)\ge\left(\sum_{cyc}a\right)^2.$$

Now, apply *CBS* inequality again for the second sum, we have

$$\left(\sum_{cyc} a\sqrt{a^2+kbc}\right)^2 = \left(\sum_{cyc} \sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3+kabc}\right) \le \left(\sum_{cyc} a\right)\left[\sum_{cyc}(a^3+kabc)\right].$$

All we have to do now is to show that

$$(k+1)\left(\sum_{cyc} a\right)^3 \ge 9\sum_{cyc}(a^3+kabc).$$

But it is equivalent to

$$(k-8)(a^3+b^3+c^3)+3(k+1)(a+b)(b+c)(c+a) \ge 27kabc,$$

which is obvious by *AM – GM* inequality. ■

Practice problems

1. Given $x,y,z>1$ such that $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Prove that

$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

(Iran, 1998)

2. Prove that if $a_1,a_2,\ldots,a_6 \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$, then we have

$$\frac{a_1-a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2-a_3}{a_3+a_4}+\frac{a_3-a_4}{a_4+a_5}+\frac{a_4-a_5}{a_5+a_6}+\frac{a_5-a_6}{a_6+a_1}+\frac{a_6-a_1}{a_1+a_2} \ge 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

3. Given $x \in [0,1]$. Show that

$$x\left(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2}\right) \le 16.$$

(Olympiad of 30 April of Vietnam, 1996)

4. Prove that for $2n$ arbitrary real numbers $a_1,a_2,\ldots,a_n$ and $x_1,x_2,\ldots,x_n$, we have

$$\sum_{i=1}^n a_ix_i+\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)} \ge \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right).$$

When does equality hold?

(Kvant 1989)

5. Given real numbers a,b,c,x,y,z such that $(a+b+c)(x+y+z)=3$ and $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$. Prove that

$$ax+by+cz \ge 0.$$

(Mathlinks contest 2005)

Giúp bạn giải toán

Hiện tại chưa có bài ở mục này.

Danh mục tài liệu tham khảo

[1] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, Vol. 1, GIL publishing house, 2004.

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, Cosmin Pohoata, *Old and New Inequalities*, Vol. 2, GIL publishing house, 2008.

[3] Iurie Boreico, Võ Quốc Bá Cẩn, Mircea Lascu, Yong Su, Bin Xiong, *Introduction to Inequalities*, GIL publishing house, 2009.

[4] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Bất đẳng thức và một số vấn đề liên quan*, chuyên đề bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên, hè 2005.

[5] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities – Old and New Methods*, GIL publishing house, 2006.

[6] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[7] Hojoo Lee, *Topics in Inequalities*, 2006.

[8] Thomas Mildorf, *Olympiad Inequalities*, 2005.

[9] Tạp chí *Crux Mathematicorum*.

[10] Tạp chí *toán học Mathvn*.

[11] Tạp chí *toán học và tuổi trẻ*.

[12] Tạp chí *Recreatii Matematice* (tiếng Romania).

[13] Các tài liệu olympic toán online.