Chuyên đề BDHSG

PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN
ĐỐI VỚI BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN SỐ

KỸ THUẬT DỒN VỀ HAI BIẾN BẰNG NHAU

Huỳnh Chí Hào

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức ba biến dạng:

$$f\left(x,y,z\right)\geq 0$$

với x,y,z là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đó.

Khi đó ta sẽ thực hiện hai bước chính sau đây:

Bước 1: Chứng minh $f\left(x,y,z\right)\geq f\left(t,t,z\right)$

Đối với bất đẳng thức không điều kiện thì dồn biến theo các đại lượng trung bình:

$$t=\frac{x+y}{2},t=\sqrt{xy};t=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},\ldots$$

Bước 2: Chứng minh $f\left(t,t,z\right)\geq 0$

Kết luận: $f\left(x,y,z\right)\geq 0$

Chú ý: Đối với các bất đẳng thức đồng bậc ta có thể làm cho chúng đơn giản hơn bằng cách chuẩn hóa các biến trong bất đẳng thức trước khi thực hiện hai bước.

★Thí dụ 1. *Cho* $x,y,z\ge 0$. *Chứng minh rằng:*

$$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz} \qquad (1)$$

Lời giải.

CÁCH 1: Thực hiện dồn biến theo TBC

Bước 1:

- Ta có: $(1)\Leftrightarrow x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}\ge 0$ (2)
- Xét biểu thức $f(x,y,z)=x+y+z-3\sqrt[3]{xyx}$. Ta chứng minh: $f(x,y,z)\ge 0$

  Thực hiện dồn biến theo TBC: $t=\dfrac{x+y}{2}$, ta sẽ chứng minh:

$$f(x,y,z)\ge f(t,t,z) \qquad (3)$$

- Thật vậy, xét hiệu: $d=f(x,y,z)-f(t,t,z)$

$$=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}-\left[2t+z-3\sqrt[3]{t^2z}\right]$$

$$=x+y+3\left(\sqrt[3]{t^2z}-\sqrt[3]{xyz}\right)$$

Mà $t=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow t^2\ge xy\Rightarrow \sqrt[3]{t^2z}-\sqrt[3]{xyz}\ge 0$ nên $d\ge 0$

Bước 2: Chứng minh $f(t,t,z)=2t+z-3\sqrt[3]{t^2z}\ge 0$ (4)

- Thật vậy: $(4)\Leftrightarrow 2t+z\ge 3\sqrt[3]{t^2z}\Leftrightarrow (2t+z)^3-27t^2z\ge 0$

$$\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z)\ge 0 \quad \text{(đúng)}$$

Kết luận: $f(x,y,z)\ge 0$

CÁCH 2: Thực hiện dồn biến theo TBN

Bước 1:

- Ta có: $(1) \Leftrightarrow x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} \geq 0$ (2)
- Xét biểu thức $f(x,y,z)=x+y+z-3\sqrt[3]{xyx}$. Ta chứng minh: $f(x,y,z)\geq 0$

  Thực hiện dồn biến theo TBN: $t=\sqrt{xy}$, ta sẽ chứng minh:

  $$f(x,y,z)\geq f(t,t,z) \quad (3)$$

- Thật vậy, xét hiệu: $d=f(x,y,z)-f(t,t,z)$

  $$=x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}-\left[2t+z-3\sqrt[3]{t^2z}\right]$$

  $$=x+y-2t$$

  Mà $t=\sqrt{xy} \Rightarrow 2t \leq x+y \Rightarrow x+y-2t\geq 0$ nên $d\geq 0$

Bước 2: Chứng minh $f(t,t,z)=2t+z-3\sqrt[3]{t^2z}\geq 0$ (4)

- Thật vậy: $(4) \Leftrightarrow 2t+z\geq 3\sqrt[3]{t^2z} \Leftrightarrow (2t+z)^3-27t^2z\geq 0$

  $\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z)\geq 0$ (đúng)

Kết luận: $f(x,y,z)\geq 0$

CÁCH 3: Chuẩn hóa & thực hiện dồn biến theo TBC

- Vì bất đẳng thức (1) là đồng bậc nên bằng cách chuẩn hóa ta có thể giả sử:

$$x+y+z=1 \qquad (*)$$

Bước 1:

- Ta có: $(1) \Leftrightarrow 1 \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow 1-27xyz \geq 0$ (2)
- Xét biểu thức $f(x,y,z)=1-27xyz$. Ta chứng minh: $f(x,y,z) \geq 0$

  Thực hiện dồn biến theo TBC: $t=\dfrac{x+y}{2}$, ta sẽ chứng minh:

$$f(x,y,z) \geq f(t,t,z) \qquad (3)$$

  Kiểm tra (*): Khi thay x,y bởi $t=\dfrac{x+y}{2}$ thì (*) vẫn thỏa

- Xét hiệu:

$$\begin{aligned} d &= f(x,y,z)-f(t,t,z) \\ &= 1-27xyz-\left(1-27t^2z\right) \\ &= 27\left(t^2z-xyz\right) \end{aligned}$$

Mà $t=\dfrac{x+y}{2} \Rightarrow t^2 \geq xy \Rightarrow xyz \leq t^2z$ nên $d \geq 0$

Bước 2: Chứng minh $f(t,t,z)=1-27t^2z \geq 0$ (4)

- Thật vậy: $f(t,t,z)=1-27t^2z=1-27t^2(1-2t)=(1+6t)\left(1-3t^2\right) \geq 0$
- Với điều kiện (*) thì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3t=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$

  Vậy trong trường hợp tổng quát đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \geq 0$

Kết luận: $f(x,y,z) \geq 0$

CÁCH 4: Chuẩn hóa & thực hiện dồn biến theo TBN

- Vì bất đẳng thức (1) là đồng bậc nên bằng cách chuẩn hóa ta có thể giả sử:

$$xyz = 1 \qquad (*)$$

Bước 1:

- Ta có: $(1) \Leftrightarrow x+y+z \geq 3 \Leftrightarrow x+y+z-3 \geq 0$ (2)
- Xét biểu thức $f(x,y,z) = x+y+z-3$. Ta chứng minh: $f(x,y,z) \geq 0$

  Thực hiện dồn biến theo TBC: $t = \sqrt{xy}$, ta sẽ chứng minh:

$$f(x,y,z) \geq f(t,t,z) \qquad (3)$$

  Kiểm tra (*): Khi thay x, y bởi $t = \sqrt{xy}$ thì (*) vẫn thỏa

- Xét hiệu:

$$\begin{aligned} d &= f(x,y,z) - f(t,t,z) \\ &= x+y+z-3-(2t+z-3) \\ &= x+y-2t \end{aligned}$$

Mà $t = \sqrt{xy} \Rightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} = 2t \Rightarrow x+y-2t \geq 0$ nên $d \geq 0$

Bước 2: Chứng minh $f(t,t,z) \geq 0$ (4)

- Thật vậy: $f(t,t,z) = 2t+z-3 = 2t + \dfrac{1}{t^2} - 3 = \dfrac{(t-1)^2(2t+1)}{t^2} \geq 0$
- Với điều kiện (*) thì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

  Vậy trong trường hợp tổng quát đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \geq 0$

Kết luận: $f(x,y,z) \geq 0$

★**Thí dụ 2.** *Cho* a,b,c *là các số thực dương thỏa mãn điều kiện* $a.b.c=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}\ge\frac{25}{4} \qquad (1)$$

Lời giải.

- Xét biểu thức $f(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}$.
  Thực hiện dồn biến theo TBN, ta sẽ chứng minh:

$$f(a,b,c)\ge f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right) \qquad (3)$$

- Ta có: $d=f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{13}{a+b+c+1}-\left[\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}+\frac{13}{a+2\sqrt{bc}+1}\right]$

$$=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{\sqrt{bc}}\right)+13\left(\frac{1}{a+b+c+1}-\frac{1}{a+2\sqrt{bc}+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left[\frac{1}{bc}-\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}\right]$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a=\max\{a,b,c\}$, do $abc=1\Rightarrow bc\le 1\Rightarrow\frac{1}{bc}\ge 1$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{13}{(a+b+c+1)\left(a+2\sqrt{bc}+1\right)}\le\frac{13}{\left(3\sqrt[3]{abc}+1\right)\left(3\sqrt[3]{abc}+1\right)}=\frac{13}{16}<1$$

nên $d\ge 0\Rightarrow f(a,b,c)\ge f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)$

- Chứng minh $f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\ge\frac{25}{4}$ (4)

- Đặt $t=\sqrt{bc}$ với $0<t\le 1$, ta sẽ chứng minh: $f\left(\frac{1}{t^2},t,t\right)\ge\frac{25}{4}$ (5)

- Ta có: $f\left(\frac{1}{t^2},t,t\right)=t^2+\frac{2}{t}+\frac{13}{\frac{1}{t^2}+2t+1}=t^2+\frac{2}{t}+\frac{13t^2}{2t^3+t^2+1}\ge\frac{25}{4}$

$$\Leftrightarrow t^2+\frac{2}{t}-3+13\left(\frac{t^2}{2t^3+t^2+1}-\frac{1}{4}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{t^3-3t+2}{t}+13\frac{-2t^3+3t^2-1}{4\left(2t^3+t^2+1\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2(t+2)}{t}+13\frac{(t-1)^2(-2t-1)}{4\left(2t^3+t^2+1\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)^2\left(8t^4+20t^3-18t^2-9t+8\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(t-1)^2\left[2\left(2t^2-1\right)^2+5t(2t-1)^2+2\left(5t^2-7t+3\right)\right]\ge 0$$

- Suy ra: $f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\geq\frac{25}{4}$

- **Kết luận:** $f\left(x,y,z\right)\geq 0$

Giải thích kỹ năng phân tích:

$$8t^4+20t^3-18t^2-9t+8=\left(8t^4-8t^2+2\right)+\left(20t^3-20t^2+5t\right)+\left(10t^2-14t+6\right)$$

$$=2\left(2t^2-1\right)^2+5t\left(2t-1\right)^2+2\left(5t^2-7t+3\right)\geq 0$$

Bài tập tương tự

1. Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}\geq 5$$

2. Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$$

3. Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)+7\geq 5\left(a+b+c\right)$$