$\sum_{ABC}^{GLA}$ NHỮNG PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

BẤT ĐẲNG THỨC

BẤT ĐẲNG THỨC

ĐỘC ĐÁO

LỜI NÓI ĐẦU

Những năm gần đây Bất đẳng thức (BĐT) giống như một "nữ hoàng" - mang trong mình nhiều vẻ đẹp huyền bí . Từ những kì thi ĐH – CĐ, HSG Tỉnh hay đến những kì thi Olympic quốc gia, quốc tế, BĐT được trao cho một vị trí đặc biệt quan trọng. Nó xuất hiện trong bài thi như để thử thách sự dũng mạnh của các chiến binh…vì thế nó có khả năng " hô phong, hoán vũ ", nó làm chao đảo không biết bao nhiêu cái đầu thông minh nhất.

Cũng chính vì vẻ đẹp chứa đựng nhiều sự tiềm ẩn đó mà không biết bao nhiêu anh tài lao vào cuộc chinh phục đỉnh cao. Hàng loạt những cái tên luôn được giới trẻ yêu Toán, yêu BĐT trong nước nhắc đến như : Phạm Kim Hùng, Nguyễn Anh Cường, Võ Thành Nam, Bùi Việt Anh… với sự mới mẻ về phương pháp, sâu sắc về kiến thức. Bên cạnh họ là những tác phẩm tuyệt đỉnh như : Dồn biến, Only ABC, GLA…với sức "sát thương" khủng khiếp khi đứng cạnh những BĐT đỉnh cao …

Có lẽ vì thế mà BĐT không còn đứng kiêu hãnh như trước nữa, giờ đây một đứa trẻ 15, 17 tuổi có thể nhìn những BĐT ở đẳng cấp quốc tế của những năm về trước với nụ cười ngạo nghễ … Nhưng cái lung linh huyền ảo đó chưa hẳn đã bị chinh phục, bởi trong dân gian đâu đó vẫn còn mờ ảo bóng của những anh tài chưa hé lộ.

May mắn cho tôi bởi tôi ít nhất cũng đã một lần được biết đến những điều mới lạ đó, có thể với tôi một phát minh, 1 sáng kiến quá xa vời bởi còn quá mênh mông những BĐT tôi chỉ dám nhìn ngắm nó từ rất…rất xa, có những phương pháp giải toán tôi đọc hàng trăm lần mà chưa hiểu hết sự gửi gắm của tác giả . Nhưng có một ai đó đã nói rằng : "*Đừng sợ hãi khi phải đối đầu với một đối thủ mạnh hơn, mà hãy vui mừng vì bạn đã có cơ hội để chiến đấu hết mình*"…tôi thấy mình mạnh mẽ hơn …!!!

- PHẠM KIM CHUNG -

I. KĨ THUẬT CÔ – SI NGƯỢC DẤU .

Bài 1 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c>0: a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$$

BG . Ta có : $\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\overset{AM-GM}{\ge}a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$. Hoàn toàn tương tự ta có :

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge(a+b+c)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{3}{2}$$. Do $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=3$

Bài 2 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c,d>0: a+b+c+d=4$ .Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\ge 2$$

BG . Hoàn toàn tương tự **Bài 1 .** Lưu ý rằng :

$$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)\underset{AM-GM}{\le}\frac{\left[(a+c)+(b+d)\right]^2}{4}=4$$

Bài 3 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c,d>0: a+b+c+d=4$ .Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge 2$$

BG . Ta có : $\frac{a}{1+b^2c}=a-\frac{ab^2c}{1+b^2c}\overset{AM-GM}{\ge}a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{b\sqrt{a.a.c}}{2}\overset{AM-GM}{\ge}a-\frac{b(a+ac)}{4}$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge(a+b+c+d)-\frac{1}{4}(ab+bc+cd+da)-\frac{1}{4}(abc+bcd+cda+dab)$$ Lại có :

$$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)\underset{AM-GM}{\le}\frac{\left[(a+c)+(b+d)\right]^2}{4}=4$$

và $abc+bcd+cda+dab=bc(a+d)+da(c+b)\overset{AM-GM}{\le}\frac{(b+c)^2}{4}(a+d)+\frac{(a+d)^2}{4}(c+b)=$

$$=\frac{(b+c)(a+d)}{4}(a+b+c+d)\overset{AM-GM}{\le}\frac{(a+b+c+d)^2}{16}(a+b+c+d)=4 .\quad\Rightarrow đpcm$$

Bài 4 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c,d>0$ .Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2}\ge\frac{a+b+c+d}{2}$$

BG . Ta có : $\frac{a^3}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\overset{AM-GM}{\ge}a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$.

Hoàn toàn tương tự ta sẽ giải quyết được BĐT trên .

Bài 5 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c>0: a+b+c=3$ .Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$$

BG . Ta có : $\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\overset{AM-GM}{\ge}a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2.b^2}$. Lại có :

$\sqrt[3]{a^2.b^2} = \sqrt[3]{1.ab.ab} \overset{AM-GM}{\leq} \frac{1+2ab}{3}$. Do đó : $\frac{a^2}{a+2b^2} \geq a - \frac{2}{9}(1+2ab)$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq (a+b+c) - \frac{4}{9}(ab+bc+ca) - \frac{2}{3} \geq 3 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 1$. đpcm .

Bài 6 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c>0: a+b+c=3$ .Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$$

BG . Ta có : $\frac{a^2}{a+2b^3} = a - \frac{2ab^3}{a+2b^3} \overset{AM-GM}{\geq} a - \frac{2ab^3}{3b^2\sqrt[3]{a}} = a - \frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2}$

Lại có : $b\sqrt[3]{a^2} = b\sqrt[3]{1.a.a} \overset{AM-GM}{\leq} b.\frac{1+2a}{3}$. Đến đây tương tự **Bài 5 .**

Bài 7 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c>0: a+b+c=3$ .Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{b^2+1} + \frac{c+1}{c^2+1} \geq 3$$

BG . Bài toán này có cách làm tương tự **Bài 1.** chẳng qua tác giả chỉ cộng thêm đại lượng

$\frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}$ vào vế trái của BĐT đã CM .

Bài 8 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c,d>0: a+b+c+d=4$ .Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+d^2} + \frac{d+1}{1+a^2} \geq 4$$

Bài 9 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c,d>0: a+b+c+d=4$ .Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+d^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq 2$$

Bài 10 . (Sáng tạo BĐT – P.K.H) Cho $a,b,c>0: a+b+c=3$ .Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

II. SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN ĐỂ TÌM LỜI GIẢI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Tôi không có nhiều những thông tin về phương pháp này, chỉ biết phương pháp này được viết bởi Kin - Yin Li với tiêu đề "Using Tangent Lines to Prove Inequalities " năm 2005. Sau đó trên diễn đàn toán học : www.mathscope.org tác giả Nguyễn Tất Thu đã viết lại làm đề tài SKKN

Cái hay của phương pháp này là sự xuất phát tự nhiên để tìm lời giải cho bất đẳng thức. Ta đi vào một số VD sau đó sẽ điểm qua ý đồ giải toán của nó.

Bài 1. Cho $a,b,c \in R : a+b+c=6$. Chứng minh rằng : $a^4+b^4+c^4 \ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$

BG .

- ***Lời giải 1.*** Thực ra bài toán với bài toán này thì gã khổng lồ Cauchy – Schwarz (BunhiaCopxki) sẽ khuất phục nó không mấy khó khăn.

$$\left(a+b+c\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \overset{CS-SCW}{\ge} \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge \left(a^2+b^2+c^2\right)\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3} \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Từ đó ta có : $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^4+b^4+c^4\right) \overset{CS-SCW}{\ge} \left(a^3+b^3+c^3\right)^2 \ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)$. □

- ***Lời giải 2.*** Sẽ thật thiếu sót khi không nhắc đến sự sát thương " kinh hoàng" của BĐT AM – GM (Cô-si) . Ta có : $a^4+2a \overset{AM-GM}{\ge} 3a^3,\ b^4+2b \overset{AM-GM}{\ge} 3b^3, c^4+2c \overset{AM-GM}{\ge} 3c^3$.

Lại có : $a^3+2 \overset{AM-GM}{\ge} 3a,\ b^3+2 \overset{AM-GM}{\ge} 3b,\ c^3+2 \overset{AM-GM}{\ge} 3c$. Do đó :

$a^4+b^4+c^4+2\left(a+b+c\right) \ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left[3\left(a+b+c\right)-6\right] \Rightarrow$ đpcm

- ***Lời giải 3.*** Nhưng tác giả muốn dùng bài toán đơn giản này để nhắc đến một cách chứng minh khác :

Ta có : $a^4-2a^3-\left(8a-16\right)=\left(a-2\right)^2\left(a^2-2a+4\right) \ge 0 \Rightarrow a^4-2a^3 \ge 8a-16$. Tương tự ta có :

$a^4+b^4+c^4-2\left(a^3+b^3+c^3\right) \ge 8\left(a+b+c\right)-48=0 \Rightarrow$ đpcm

Nếu nhìn qua thì Lời giải 3. có vẻ thiếu tự nhiên khi đại lượng (8a – 16) xuất hiện. Nhưng đó cũng chính là điểm mấu chốt của phương pháp tiếp tuyến.

Nhận xét :

Nếu $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0 ; y_0)$ (A không phải là điểm uốn) khi đó tồn tại một khoảng $(\alpha;\beta)$ chứa điểm x_0 sao cho $f\left(x\right) \ge ax+b, \forall x \in \left(\alpha;\beta\right)$ *hoặc* $f\left(x\right) \le ax+b, \forall x \in \left(\alpha;\beta\right)$. *Đẳng thức xảy ra khi $x = x_0$. Từ đây ta có* $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \ge a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb, \forall x_i \in \left(\alpha;\beta\right)$ *hoặc* $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right) \le a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb, \forall x_i \in \left(\alpha;\beta\right)$

Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0 ; y_0)$ là : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Như vậy trong lời giải 3. phương trình $y = 8x - 16$ chính là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = 2$. Và để chứng minh $x^4-2x^3-\left(8x-16\right) \ge 0$, ta chỉ việc chia đa thức này cho $(x - 2)^2$.

Bài 2 . Cho $a,b,c > 0 : a+b+c=1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \ge \frac{9}{10}$$

BG . Trước khi giải bằng phương pháp tiếp tuyến như tư tưởng của tác giả, tôi sẽ giải quyết nó bởi một BĐT quen thuộc : BĐT Schwarz .

Ta có : $VT=\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+bca}+\frac{c^2}{c+cab} \overset{Schwarz}{\ge} \frac{\left(a+b+c\right)^2}{a+b+c+3abc} \overset{AM-GM}{\ge} \frac{1}{1+\frac{\left(a+b+c\right)^3}{9}}=\frac{9}{10}$

_ *Lời giải bằng phương pháp tiếp tuyến :* Để giải được bằng phương pháp tiếp tuyến, nhất thiết phải chuyển BĐT đã cho về 1 BĐT chứa các biểu thức dưới dạng 1biến số.

Ta có : $\dfrac{a}{1+bc} \overset{AM-GM}{\geq} \dfrac{a}{1+\dfrac{(b+c)^2}{4}} = \dfrac{4a}{4+(1-a)^2}$. Tương tự như vậy ta sẽ đưa BĐT đã cho về dạng tương đương như sau : $\dfrac{4a}{a^2-2a+5}+\dfrac{4b}{b^2-2b+5}+\dfrac{4c}{c^2-2c+5} \geq \dfrac{9}{10}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-2x+5}$, đạo hàm : $f'(x)=\dfrac{-4x^2+20}{(x^2-2x+5)^2}$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$ (điểm rơi) là : $y=\dfrac{99x-3}{100}$.

Do đó : $\dfrac{4x}{x^2-2x+5} - \dfrac{99x-3}{100} = \dfrac{(3x-1)^2(15-11x)}{100(x^2-2x+5)} \geq 0, \forall x \in (0;1)$. Đến đây bài toán đã tìm ra hướng đi !

Bài 3 . Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác . Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

BG. Chuẩn hóa : Bất đẳng thức đã cho thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh BĐT đúng với mọi số thực dương thỏa mãn : $a + b + c = 1$. Khi đó BĐT đã cho trở thành :

$$\left(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right) \leq 9 \Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c) \leq 9$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{5x-1}{x-x^2}$, tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$ là : $y = 18x - 3$

Xét $f(x) - (18x - 3) = \dfrac{(3x-1)^2(2x-1)}{x-x^2}$. Do a, b, c là 3 cạnh của tam giác nên :

$1=a+b+c>2a\,(2b,2c)$ do đó $x<\dfrac{1}{2}$ suy ra : $f(x)-(18x-3) \geq 0,\ \forall x \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Từ đó ta giải quyết bài toán !

Bài 4 (VĐ Toán Ba Lan 1996). Cho $a,b,c \geq -\dfrac{3}{4}$ thỏa mãn : $a+ b+ c =1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$$

BG . Xét hàm số : $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$ là : $y=\dfrac{36x+3}{50}$

Xét $\dfrac{36x+3}{50} - f(x) = \dfrac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)} \geq 0, \forall x \geq -\dfrac{3}{4}$. Từ đó ta có lời giải !

Bài 5 (JAPAN MO 2002). Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có bất đẳng thức :

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

BG . Chuẩn hóa : $a + b + c = 1$. BĐT đã cho tương đương với BĐT :

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1}+\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1}+\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} \geq \frac{3}{5}$$

Xét hàm số : $f(x)=\dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2-2x+1}$, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{-54x+23}{25}$

Do đó : $f(x)-\dfrac{-54x+23}{25} = \dfrac{2(54x^3-27x^2+1)}{25(2x^2-2x+1)} = \dfrac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)} \geq 0,\ \forall x \in (0;1)$.

Bài toán đã tìm ra hướng giải quyết !

Chú ý : *Khi chứng minh :* $f(x)-(ax+b)\geq 0$ ***nếu bạn ngại biến đổi tương đương thì đạo hàm và khảo sát nó trên khoảng thích hợp .***

Bài 6 (USA MO 2003). Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có bất đẳng thức :

$$\frac{(b+c+2a)^2}{(b+c)^2+2a^2}+\frac{(c+a+2b)^2}{(c+a)^2+2b^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2+2c^2}\leq 8$$

BG . Chuẩn hóa : $a+b+c=1$. BĐT đã cho tương đương với BĐT :

$$\frac{(1+a)^2}{3a^2-2a+1}+\frac{(1+b)^2}{3b^2-2b+1}+\frac{(1+c)^2}{3c^2-2c+1}\leq 8$$

Xét hàm số : $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}$, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{3}$ là : $y=\frac{12x+4}{3}$

Lúc đó : $f(x)-\frac{12x+4}{3}=\frac{-(3x-1)^2(4x+1)}{3(3x^2-2x+1)}\leq 0,\forall x\in(0;1)$. Bài toán đã tìm ra hướng giải quyết !

Ở các bài tập 3, 5, 6 ta bắt gặp một kĩ thuật có tên là : Kĩ thuật chuẩn hóa *, nó sẽ mang đến cho BĐT cần chứng minh với 1 cách nhìn dễ hơn. Những BĐT chuẩn hóa được là những BĐT thuần nhất :* ***Đ/n hàm số thuần nhất :*** Hàm số f(a, b, c) được gọi là thuần nhất với các biến trên miền I nếu nó thỏa mãn điều kiện : $f(ta, tb, tc) = t^k f(a, b, c)$ với mọi $t,a,b,c\in I$ và k là một hằng số không phụ thuộc vào a,b,c,t mà chỉ phụ thuộc vào bản thân hàm f.

Bài 7 (RUSSIA MO 2002). Cho $a,b,c>0: a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$$

BG . Ta có : $9=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$. Do đó BĐT cần CM tương đương với BĐT :

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}\geq 9$$

Xét hàm số : $f(x)=x^2+2\sqrt{x}$, tiếp tuyến của hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=1$ là : $y=3x$.

Khi đó $f(x)-3x=x^2-3x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2(x+2\sqrt{x})\geq 0,\ \forall x\in(0;3)$. Bài toán đã tìm thấy hướng giải !

Bài 8 . Cho $a,b,c>0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

BG . Chuẩn hóa : $a^2+b^2+c^2=1$. BĐT đã cho tương đương với BĐT :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq a+b+c+1$$

_*Lời giải 1.* BĐT $\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a+b+c)-1\geq 0$ .Lại có : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$, ta cần CM :

$\frac{3+\sqrt{3}}{a+b+c}-(a+b+c)-1\geq 0$, xét hàm số $f(x)=\frac{3+\sqrt{3}}{x}-x-1,$ với $0<x\leq\sqrt{3}$, hàm f(x) nghịch biến suy ra đpcm .

_ *Lời giải 2.* Bài toán này làm được bằng phương pháp tiếp tuyến với việc xét hàm :

$f(x)=\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{x}-x,\ \ x\in(0;1)$, tiếp tuyến của nó tại $x_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ là : $y=-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x+\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$

Bài 9 . Cho $a,b,c>0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}$$

BG . _ *Lời giải 1.* Sử dụng BĐT Cauchy – Schwarz (BunhiaCopxki)

$$(a+b+c)\left[\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right]\overset{CS-SCW}{\geq}\left[\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right]^2\overset{Nesbit}{\geq}\frac{9}{4}$$, suy ra đpcm .

_ *Lời giải 2* . Phương pháp tiếp tuyến .

Chuẩn hóa : a+b+c=1, BĐT đã cho tương đương với BĐT :

$\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-b)^2}+\frac{c}{(1-c)^2}\geq\frac{9}{4}$. Xét hàm số : $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{3}$ là : $y=\frac{18x-3}{4}$. Lúc đó ta có :

$f(x)-\frac{18x-3}{4}=\frac{-18x^3+39x^2-20x+3}{4(1-x)^2}=\frac{(3x-1)^2(-2x+3)}{4(1-x)^2}\geq,\forall x\in(0;1)$. Bài toán đã có hướng giải.

Bài 10 (CHINA MO 2005) . Cho $a,b,c>0:a+b+c=1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\geq 1$$

Bài 11 (NEWZEALAND MO 1998) . Cho n số thực dương thỏa mãn : $\sum_{i=1}^{n}x_i=n$. Chứng minh :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_i^2}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}$$

Bài 12 (HONGKONG MO 1998) . Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng :

$$\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}\leq\frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

Bài 13 (Olympic 30-4 năm 2006) . Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng :

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}$$

Bài 14 . Cho $a,b,c,d>0:ab+bc+cd+da=1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$

Bài 15 . Cho $a,b,c>0:a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\leq\frac{9}{2}$$

Bài 16 (BĐT Nesbit) . Cho $a,b,c>0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

_ *Tìm lời giải :*

Chuẩn hóa : a+ b + c =3, BĐT đã cho trở thành :

$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\geq\frac{3}{2}$ **.** Xét hàm số : $f(x)=\frac{x}{3-x}$, phương trình tiếp tuyến tại $x_0=1$ là : $y=\frac{3x-1}{4}$

Ta có : $f(x)-\frac{3x-1}{4}=\frac{3(x-1)^2}{4(3-x)}\geq 0,\ \forall x\in(0;3)$….**succeed !**

Bài 17 (CHINA TST 2004) . Cho $a,b,c,d>0:abcd=1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sum_{a,b,c,d}\frac{1}{(1+a)^2}\geq 1$$

Bài 18 (UK TST 2004) . Cho $a_i > 0, i = \overline{1,n} : \prod_{i=1}^{n} a_i = 1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + 3}{(a_i + 1)^2} \geq 3 \quad (\forall n > 2, n \in N)$$

Bài 19 . Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{(3a+b+c)^3}{3a^3+(b+c)^3} + \frac{(3b+c+a)^3}{3b^3+(c+a)^3} + \frac{(3c+a+b)^3}{3c^3+(a+b)^3} \leq \frac{375}{11}$$

Bài 20 (SERBIA 2005). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

_*Lời giải khác :*

Chuẩn hóa : a + b + c =6. BĐT đã cho tương đương với BĐT : $\frac{a}{\sqrt{6-a}} + \frac{b}{\sqrt{6-b}} + \frac{c}{\sqrt{6-c}} \geq 3$

Đặt : $\sqrt{6-a} = x, \quad \sqrt{6-b} = y, \sqrt{6-c} = z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 12 \Rightarrow x + y + z \leq 6$, ta có :

$$\frac{6-x^2}{x} + \frac{6-y^2}{y} + \frac{6-z^2}{z} \geq 3 \Leftrightarrow 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \geq 3 \quad (1)$$

$$VT(1) = 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - (x+y+z) \overset{SCW}{\geq} \frac{54}{x+y+z} - (x+y+z) \overset{AM-GM}{\geq} 3 = VP(1)$$

Bài 21 . Chứng minh bất đẳng thức : $\frac{2x^2}{2x^2+(y+z)^2} + \frac{2y^2}{2y^2+(z+x)^2} + \frac{2z^2}{2z^2+(x+y)^2} \leq 1$

Bài 22. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1$$

Bài 23. Cho a, b, c là độ dài các cạnh tam giác. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b}$$

- ***Mới nhìn qua chúng ta có thể nghĩ rằng bài 10, bài 15 có thể giải quyết đơn giản bằng phương pháp tiếp tuyến, nhưng…hãy đặt bút .!!!***

Bài 10 (CHINA MO 2005) . Cho $a, b, c > 0 : a + b + c = 1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$$

_ Tìm lời giải bằng p^2 tiếp tuyến :

Xét hàm số : $f(x) = 10x^3 - 9x^5$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $x_0 = \frac{1}{3}$ là : $y = \frac{75x - 16}{27}$

Do đó : $f(x) - \frac{75x-16}{27} = \frac{270x^3 - 243x^5 - 75x + 16}{27} = \frac{(3x-1)^2(-27x^3 - 18x^2 + 21x + 16)}{27}$.

Ta cần xét xem hiệu trên có lớn hơn hoặc bằng 0, hay không ? Lúc đó ta chỉ cần kiểm tra xem hàm số : $g(x) = -27x^3 - 18x^2 + 21x + 16$ có dương với mọi $x \in (0;1)$?

Đạo hàm : $g'(x) = -81x^2 - 36x + 21$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{7}{9} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Ta có bảng BT :

x	0		$\frac{1}{3}$		1
g'(x)		+	0	−	
g(x)	16	↗		↘	−8

Nhìn vào BBT ta thấy : g(x) >0 hay g(x) < 0 , $\forall x \in (0;1)$ ….???????????????????

- Rõ ràng phương pháp tiếp tuyến có bán kính sát thương chưa rộng, nó đang bộc lộ điểm yếu…và nhất thiết phải nâng cấp .
- Đây là nguyên văn lời giải của nickname : **2M** trên trang web : mathscope.org

xét $f(x)=10x^3-9x^5$ trên $(0;1)$ có $f''(x)=180x(\frac{1}{3}-x^2)$ đặt $\sqrt{\frac{1}{3}}=s$ có
$f''(x)>0$ trên $(0;s)$ và $f''(x)<0$ trên $(s;1)$
gỉa dụ $a\le b\le c$ xét 2 trường ợp
-nếu $c\in(0;s)$ tì do $f(\frac{1}{3})+(x-\frac{1}{3})f'(\frac{1}{3})\le f(x)\forall x\in(0;s)$ nên

$$f(\tfrac{1}{3})+(a-\tfrac{1}{3})f'(\tfrac{1}{3})\le f(a)$$
$$f(\tfrac{1}{3})+(b-\tfrac{1}{3})f'(\tfrac{1}{3})\le f(b)$$
$$f(\tfrac{1}{3})+(c-\tfrac{1}{3})f'(\tfrac{1}{3})\le f(c)$$

do đó $1=3f(\frac{1}{3})+(a+b+c-3.\frac{1}{3})f'(\frac{1}{3})\le f(a)+f(b)+f(c)$ (i)....
- Nếu $c\in[s;1)$
có

$$0=f(0)+(b-0)f'(0)\le f(b)$$
$$0=f(0)+(c-0)f'(0)\le f(c)$$
$$f(1)+\frac{f(s)-f(1)}{s-1}(c-1)\le f(c)$$

cơ mà $\frac{f(s)-f(1)}{s-1}(c-1)=\frac{\frac{7}{9}\sqrt{3}-1}{s-1}(c-1)>0$ do $\frac{7}{9}\sqrt{3}-1>0>s-1;c-1$

do đó $f(a)+f(b)+f(c)>0+0+1+\frac{f(s)-f(1)}{s-1}(c-1)>1$ (ii) ....

từ (i) và (ii) có đpcm!

Bài giải trên xuất phát từ Bổ đề :

Nếu f(x) lõm trên khoảng (a; b) liên tục trên đoạn [a; b] thì :

$$f(x)\le f(a)+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-a)=f(b)+\frac{f(a)-f(b)}{a-b}(x-b),\ \forall x\in[a;b]$$