0.1 Biểu diễn cơ sở phương pháp SOS

Mở đầu

Trong các bài toán được dẫn ra ở các mục trước hẳn các bạn đã nhận thấy sự lặp đi lặp lại của biểu diễn dạng $F(a,b,c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$. Các định lý sau đây sẽ cho thấy sự tồn tại của biểu diễn đó. Chúng tôi tự giới hạn mình trong lớp các bất đẳng thức 3 biến đối xứng, tuy nhiên điều đó sẽ không làm hạn chế tầm ứng dụng của phương pháp này. Các bạn có thể sử dụng các ví dụ để kiểm chứng rằng với cùng tư tưởng dưới đây, hầu hết các bất đẳng thức hoán vị 3 cũng có những biểu diễn tương tự. Chúc các bạn may mắn !

0.1.1 Các khái niệm cơ bản

i) Tập xác định (TXĐ)

Từ đây trở đi nếu không có gì thay đổi, để cho bài toán rõ ràng và tránh những phiền phức không đáng có, TXĐ của tất cả các hàm số và bất đẳng thức sẽ giới hạn trong tập các số thực không âm R^3_+ hơn nữa đôi khi để hợp lý chúng ta sẽ bỏ đi điểm $(0,0,0)$.

ii) Định nghĩa 1: về hàm đối xứng ba biến

Một hàm phân thức ba biến $F(a,b,c)$ được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $F(a,b,c) = F(x,y,z)$ đúng với mọi hoán vị (x,y,z) của (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi số thực dương x mà $F(x,x,x) = 0$ thì $F(a,b,c)$ được gọi là hàm đối xứng ba biến chuẩn.

iii) Định nghĩa 2: về hàm nửa đối xứng ba biến

Một hàm phân thức ba biến $G(a,b,c)$ được gọi là nửa đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $G(a,b,c) = G(a,c,b)$ đúng với mọi bộ ba số thực dương (a,b,c). Hơn nữa nếu với mọi cặp hai số thực dương x,y mà $G(x,y,y) = 0$ thì $G(a,b,c)$ được gọi là hàm nửa đối xứng ba biến chuẩn.

0.1.2 Các định lý cơ sở

i) Định lý 1: về cơ sở của phương pháp SOS

Giả sử $F(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng ba biến chuẩn thì tồn tại một đa thức nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng

$$F(a,b,c) = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2$$

Trước khi đưa ra một chứng minh của định lý này dựa trên một số hiểu biết đơn giản về không gian vecto chúng tôi muốn nhấn mạnh với các bạn rằng định lý trên là đủ để áp dụng đối với tất cả các hàm phân thức đối xứng ba biến.

Bởi vì định lý 1 hạn chế trong lớp các đa thức ba biến nên có có thể nói tới bậc của đa thức. Trong đa thức ba biến a, b, c sẽ chứa (và chỉ chứa !) các hạng tử dạng $t_{m,n,p}a^m b^n c^p$ trong đó m, n, p là các số nguyên không âm. Nếu $t_{m,n,p} \neq 0$ thì $m + n + p$ được gọi là bậc của hạng tử này. Trong trường hợp ngược lại ta quy ước bậc của hạng tử này bằng 0. Số $m + n + p$ lớn nhất được gọi là bậc của đa thức đó.

Chứng minh định lý 1

Ta chứng minh định lý 1 cho lớp các đa thức bậc n.

Ký hiệu $S(F)$ là tập hợp tất cả các đa thức ba biến $F(a, b, c)$ đối xứng chuẩn bậc n, $S(Q)$ là tập hợp tất cả các đa thức $Q(a, b, c)$ đối xứng ba biến chuẩn bậc n có dạng $Q(a, b, c) = G(a, b, c)(b - c)^2 + G(b, c, a)(c - a)^2 + G(c, a, b)(a - b)^2$, ở đây $G(a, b, c)$ là đa thức nửa đối xứng ba biến bậc $n - 2$ (ta xét $n \geq 2$ vì với n=1 thì định lý hiển nhiên đúng). Rõ ràng $S(Q)$ là không gian vecto con của không gian vecto $F(a, b, c)$. Và do đó số chiều của $S(Q)$ không vượt quá số chiều của $S(F)$. $(*)$

Với các số nguyên không âm α, β, γ xét các đa thức đặc biệt sau đây
i) $F_{\alpha,\beta,\gamma}(a, b, c) = \sum a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}$ (tổng được lấy trên tất cả các hoán vị $(\alpha', \beta', \gamma')$ của (α, β, γ))
ii) $G_{\alpha,\beta,\gamma}(a, b, c) = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta$
iii) $Q_{\alpha,\beta,\gamma}(a, b, c) = G_{\alpha,\beta,\gamma}(a, b, c)(b-c)^2+G_{\alpha,\beta,\gamma}(b, c, a)(c-a)^2+G_{\alpha,\beta,\gamma}(c, a, b)(a-b)^2$
Ký hiệu f_n là tập hợp tất cả các bộ số (α, β, γ) thoả mãn các điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = n, \alpha \geq \beta \geq \gamma$. Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $F_{\alpha,\beta,\gamma}(a, b, c)$ với $(\alpha, \beta, \gamma) \in f_n$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $S(F)$ do đó số chiều của $S(F)$ bằng số phần tử của f_n (1)

Ký hiệu q_n là tập hợp tất cả các bộ số (α, β, γ) thoả mãn các điều kiện $\alpha + \beta + \gamma = n - 2, \alpha + 2 \geq \beta \geq \gamma$. Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $Q_{\alpha,\beta,\gamma}(a, b, c)$ với $(\alpha, \beta, \gamma) \in q_n$ là hệ vecto độc lập tuyến tính của $S(Q)$ do đó số chiều của $S(Q)$ không nhỏ hơn số phần tử của q_n (2)

Từ các kết quả $(1), (2)$ với chú ý là f_n và q_n có cùng số phần tử ta suy ra số chiều của $S(Q)$ không nhỏ hơn số chiều của $S(F)$ $(**)$

Vậy từ các kết quả $(*), (**)$ suy ra số chiều của hai không gian $S(Q), S(F)$ là bằng nhau, từ đó suy ra mọi phần tử của không gian $S(F)$ đều có thể biểu diễn qua các phần tử của không gian $S(Q)$. Đây là kết quả cần phải chứng minh.

Từ định lý này có thể nhận thấy một thuật toán tìm biểu diễn cơ sở, đó là tìm ma trận chuyển giữa hai không gian vecto $S(Q)$ và $S(F)$. Dưới đây là một thuật toán sơ cấp hơn

ii) Định lý 2: về thuật toán tìm biểu diễn cơ sở

Giả sử $M(a,b,c), N(a,b,c)$ là hai đa thưc nửa đối xứng ba biến, hơn nữa với mọi số thực dương x thì phân số $M(x,x,x)/N(x,x,x)$ là một hằng số t. Khi đó tồn tại hàm số nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng

$$F(a,b,c) = \frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)} + \frac{M(b,c,a)}{N(b,c,a)} + \frac{M(c,a,b)}{N(c,a,b)} - 3t$$
$$= G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2$$

Chứng minh định lý 2

Đối với hàm nửa đối xứng $G(a,b,c)$ chúng ta tiến hành ghép cặp các hạng tử nửa đối xứng $a^m b^n c^p + a^m b^p c^n$. Sau đó nhóm tất cả các hạng tử có cùng bậc vào một nhóm. Bộ số $(n_1, n_2, ..., n_k)$ với $n_1 > n_2 > ... > n_k$ gồm tất cả các giá trị bậc của đa thức đó sắp theo thứ tự giảm dần gọi là bộ chỉ thị cho đa thức đó. Lúc này ta có thể viết

$$G(a,b,c) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m+n+p=n_i, n\geq p} g_{m,n,p}.a^m(b^n c^p + b^p c^n)$$

Rõ ràng điều kiện $M(x,x,x)/N(x,x,x)$ là hằng số với mọi số thực dương x tương đương với sự kiện bộ chỉ thị của các đa thức $M(a,b,c), N(a,b,c)$ là giống hệt nhau. Và do đó ta xét hiệu

$$M(a,b,c)/n(a,b,c) - t = [\sum_{i=1}^{k} \sum_{m+n+p=n_i, n\geq p} \alpha_{m,n,p}.a^m(b^n c^p + b^p c^n)]/N(a,b,c)$$

trong đó $\alpha_{m,n,p} = m_{m,n,p} - t n_{m,n,p}$ và do đó

$$\sum_{m+n+p=n_i, n\geq p} \alpha_{m,n,p} = 0, \forall i = \overline{1,n}$$

Bây giờ đối với mỗi tổng bên trong ứng với mỗi giá trị n_i của tử số chúng ta tiến hành sắp xếp lại thứ tự các hạng tử trong tử số của phân số trên sau đó sẽ dùng một biến đổi nhỏ để làm xuất hiện các nhân tử $a-b, b-c, c-a$.

Trước hết ta chia các nghiệm nguyên không âm (m,n,p) thoả mãn *n gep* của phương trình $m+n+p = n_i$ thành n_i nhóm theo các giá trị của m. Sắp xếp lại thứ tự các nhóm đó theo độ giảm dần của m. Trong mỗi nhóm thì giá trị của m là cố định, ta sắp xếp lại các nghiệm nguyên không âm của phương trình $n+p = n_i - m$ theo độ giảm dần của n nếu $n_i - m$ lẻ và theo độ tăng dần của n nếu $n_i - m$ chẵn. Sau khi đã sắp thứ tụ xong, chúng ta có một thứ tự mới của tập các nghiệm ban đầu, mà ta sẽ ký hiệu là $\{(m_j, n_j, p_j) | j = \overline{1,l}\}$, ở đây l là một hàm số phụ thuộc n_i. Để đơn giản ta ký hiệu

$$a_j = a^{m_j}(b^{n_j} c^{p_j} + b^{p_j} c^{n_j}), b_j = \alpha_{m_j,n_j,p_j}$$

Khi đó mẫu số có thể viết lại một các đơn giản là $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_lb_l = (a_1 - a_2)b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + ... + (a_{l-1} - a_l)(b_1 + b_2 + ... + b_l)$. Sử dụng điều kiện $b_1 + b_2 + ...b_l = 0$ và chia các hiệu $a_1 - a_2, a_2 - a_3, ..., a_{l-1} - a_l$ vào ba loại sau

$$i)a^m(b^{n+1}c^p + b^nc^{p+1}) - a^m(b^nc^{p+1} + b^{n+1}c^p) = a^mb^nc^p.\frac{b^{n-p} - c^{n-p}}{b-c}.(b-c)^2$$

$ii)a^{m+1}(b^nc^n + b^nc^n) - a^m(b^{n+1}c^n + b^nc^{n+1}) = a^mb^nc^n[(a-b) - (c-a)]$
Xét biểu thức

$$\frac{a^mb^nc^n[(a-b)-(c-a)]}{N(a,b,c)} + \frac{b^mc^na^n[(b-c)-(a-b)]}{N(b,c,a)} + \frac{c^ma^nb^n[(c-a)-(b-c)]}{N(c,a,b)}$$

Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử $a-b, b-c, c-a$. Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a-b)a^nb^nc^n[\frac{a^{m-n}}{N(a,b,c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b,c,a)}] = (a-b)^2.G(c,a,b)$$

Trong đó

$$G(c,a,b) = \frac{c^na^nb^n}{N(a,b,c).N(b,c,a)}.\frac{a^{m-n}N(a,b,c) - b^{m-n}N(b,c,a)}{a-b}$$

ở đây ta đã sử dụng $N(b,c,a) = N(b,a,c)$. Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đã thức nửa đối xứng ba biến a,b,c và dối xứng hai biến a,b nên $G(c,a,b)$ là hàm nửa đối xứng ba biến.

$iii)a^{m+1}(b^{n+1}c^n + b^nc^{n+1}) - a^m(b^{n+1}c^{n+1} + b^{n+1}c^{n+1}) = a^mb^nc^n[c(a-b) - b(c-a)]$
Xét biểu thức $a^mb^nc^n[c(a-b) - b(c-a)]/N(a,b,c) + b^mc^na^n[a(b-c) - c(a-b)]/N(b,c,a) + c^ma^nb^n[b(c-a) - a(b-c)]/N(c,a,b)$. Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử $a-b, b-c, c-a$. Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a-b)a^nb^nc^{n+1}[\frac{a^{m-n}}{N(a,b,c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b,c,a)}] = (a-b)^2.G(c,a,b)$$

Trong đó

$$G(c,a,b) = \frac{c^{n+1}a^nb^n}{N(a,b,c).N(b,c,a)}.\frac{a^{m-n}N(a,b,c) - b^{m-n}N(b,c,a)}{a-b}$$

ở đây ta đã sử dụng $N(b,c,a) = N(b,a,c)$. Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đã thức nửa đối xứng ba biến a,b,c và dối xứng hai biến a,b nên $G(c,a,b)$ là hàm nửa đối xứng ba biến.

Vậy trong cả ba trường hợp ta đều đã chỉ ra cách biến đổi thích hợp để đưa biểu thức về dạng biểu diễn cần thiết. Điều này hoàn thành việc chứng minh định lý 2. Niềm tin về sự tồn tại biểu diễn cơ sở đã được khẳng định.