

Chương 2 :

Các phương pháp chứng minh

Chứng minh bất đẳng thức đòi hỏi kỹ năng và kinh nghiệm. Không thể khơi khơi mà ta đâm đầu vào chứng minh khi gặp một bài bất đẳng thức. Ta sẽ xem xét nó thuộc dạng bài nào, nên dùng phương pháp nào để chứng minh. Lúc đó việc chứng minh bất đẳng thức mới thành công được.

Như vậy, để có thể đương đầu với các bất đẳng thức lượng giác, bạn đọc cần nắm vững các phương pháp chứng minh. Đó sẽ là kim chỉ nam cho các bài bất đẳng thức. Những phương pháp đó cũng rất phong phú và đa dạng : tổng hợp, phân tích, quy ước đúng, ước lượng non già, đổi biến, chọn phần tử cực trị ... Nhưng theo ý kiến chủ quan của mình, những phương pháp thật sự cần thiết và thông dụng sẽ được tác giả giới thiệu trong chương 2 : **“Các phương pháp chứng minh”**.

Mục lục :

2.1.	Biến đổi lượng giác tương đương	32
2.2.	Sử dụng các bước đầu cơ sở	38
2.3.	Đưa về vector và tích vô hướng	46
2.4.	Kết hợp các bất đẳng thức cổ điển	48
2.5.	Tận dụng tính đơn điệu của hàm số	57
2.6.	Bài tập	64

2.1. Biến đổi lượng giác tương đương :

Có thể nói phương pháp này là một phương pháp “xưa như Trái Đất”. Nó sử dụng các công thức lượng giác và sự biến đổi qua lại giữa các bất đẳng thức. Để có thể sử dụng tốt phương pháp này bạn đọc cần trang bị cho mình những kiến thức cần thiết về biến đổi lượng giác (bạn đọc có thể tham khảo thêm phần 1.2. Các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác).

Thông thường thì với phương pháp này, ta sẽ đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng bất đẳng thức đúng hay quen thuộc. Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng hai kết quả quen thuộc $|\sin x| \leq 1$; $|\cos x| \leq 1$.

Ví dụ 2.1.1.

$$CMR : \frac{1 - \sin \frac{\pi}{14}}{2 \sin \frac{\pi}{14}} > \sqrt{3 \cos \frac{\pi}{7}}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} 1 - \sin \frac{\pi}{14} &= \sin \frac{3\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{14} + \sin \frac{5\pi}{14} - \sin \frac{3\pi}{14} + \sin \frac{7\pi}{14} - \sin \frac{5\pi}{14} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) \\ \Rightarrow \frac{1 - \sin \frac{\pi}{14}}{2 \sin \frac{\pi}{14}} &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác ta có :

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \cos \frac{\pi}{7} ; y = \cos \frac{2\pi}{7} ; z = \cos \frac{3\pi}{7}$$

Khi đó từ (1), (2) ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$x + y + z > \sqrt{3(xy + yz + zx)} \quad (3)$$

mà $x, y, z > 0$ nên :

$$(3) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 > 0 \quad (4)$$

Vì x, y, z đôi một khác nhau nên (4) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Như vậy, với các bất đẳng thức như trên thì việc biến đổi lượng giác là quyết định sống còn với việc chứng minh bất đẳng thức. Sau khi sử dụng các biến đổi thì việc giải quyết bất đẳng thức trở nên dễ dàng thậm chí là hiển nhiên (!).

Ví dụ 2.1.2.

$$CMR : \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab \sin 3x + ca \cos 2x - bc \sin x)$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} a^2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) + b^2(\sin^2 x + \cos^2 x) + c^2 &\geq 2ab(\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x) + \\ &\quad + 2ca \cos 2x - 2bc \sin x \\ \Leftrightarrow (a^2 \cos^2 2x + b^2 \sin^2 x + c^2 - 2ab \cos 2x \sin x - 2ca \cos 2x + 2bc \sin x) \\ &\quad + (a^2 \sin^2 2x - 2ab \sin 2x \cos x + b^2 \cos^2 x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a \cos 2x - b \sin x - c)^2 + (a \sin 2x - b \cos x)^2 &\geq 0 \\ \text{Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.3.

CMR với ΔABC bất kỳ ta có :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 A + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} &\leq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow \cos^2 A + \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) + \frac{1}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 A - \cos A \cos(B - C) + \frac{1}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\cos A - \frac{\cos(B - C)}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2(B - C) &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Ví dụ 2.1.4.

Cho $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) là ba góc thỏa $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$. CMR :

$$\left(\frac{\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha}{3} \right)^2 \leq 1 - 2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma$$

Lời giải :

Ta có :

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} + \frac{1}{1 + \tan^2 \gamma} = 2$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha \tan^2 \beta + \tan^2 \beta \tan^2 \gamma + \tan^2 \gamma \tan^2 \alpha = 1 - 2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha}{3} \right)^2 \leq \tan^2 \alpha \tan^2 \beta + \tan^2 \beta \tan^2 \gamma + \tan^2 \gamma \tan^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma)^2 + (\tan \beta \tan \gamma - \tan \gamma \tan \alpha)^2 + (\tan \gamma \tan \alpha - \tan \alpha \tan \beta)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha \tan \beta = \tan \beta \tan \gamma \\ \tan \beta \tan \gamma = \tan \gamma \tan \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = \tan \beta = \tan \gamma \\ \tan \gamma \tan \alpha = \tan \alpha \tan \beta \end{cases}$$

Ví dụ 2.1.5.

CMR trong ΔABC bất kỳ ta có :

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)$$

Lời giải :

Ta có :

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

$$\text{Đặt } x = \cot \frac{A}{2}; y = \cot \frac{B}{2}; z = \cot \frac{C}{2} \text{ thì } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned}x + y + z &\geq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ \Leftrightarrow (x + y + z) &\geq \frac{3(xy + yz + zx)}{xyz} \\ \Leftrightarrow (x + y + z)^2 &\geq 3(xy + yz + zx) \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow \text{đpcm.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Đẳng thức xảy ra} &\Leftrightarrow \cot A = \cot B = \cot C \\ &\Leftrightarrow A = B = C \\ &\Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều.}\end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.6.

$$CMR : \quad \frac{1}{3 + \sin x} + \frac{1}{3 - \sin x} \leq \frac{2}{2 + \cos x}$$

Lời giải :

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ và $\cos x \geq -1$ nên :

$$3 + \sin x > 0 ; 3 - \sin x > 0 \quad \text{và} \quad 2 + \cos x > 0$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned}6(2 + \cos x) &\leq 2(9 - \sin^2 x) \\ \Leftrightarrow 12 + 6\cos x &\leq 18 - 2(1 - \cos^2 x) \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 6\cos x + 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\cos x - 1)(\cos x - 2) &\geq 0\end{aligned}$$

do $\cos x \leq 1$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.1.7.

$$CMR \quad \forall \frac{\pi}{3} \leq \alpha; \beta < \frac{\pi}{2} \text{ ta có :}$$

$$\frac{2}{\cos \alpha + \cos \beta} - 1 \leq \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right) \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1\right)$$

Lời giải :

$$\text{Từ } \forall \frac{\pi}{3} \leq \alpha; \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos \alpha; \cos \beta \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{do đó } \begin{cases} 0 < \cos \alpha + \cos \beta \leq 1 \\ 0 < \cos \alpha \cos \beta \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đặt $a = \cos \alpha + \cos \beta$; $b = \cos \alpha \cos \beta$

Bất đẳng thức đã cho trở thành :

$$\begin{aligned} \frac{2-a}{a} &\leq \sqrt{\frac{1-a+b}{b}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2-a}{a}\right)^2 &\leq \frac{1-a+b}{b} \\ \Leftrightarrow (2-a)^2 b &\leq a^2(1-a+b) \\ \Leftrightarrow a^3 - a^2 - 4ab + 4b &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a^2 - 4b) &\leq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $a \leq 1$ và $a^2 - 4b = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Ví dụ 2.1.8.

Cho các góc nhọn a và b thỏa $\sin^2 a + \sin^2 b < 1$. CMR :

$$\sin^2 a + \sin^2 b < \sin^2(a+b)$$

Lời giải :

$$\text{Ta có : } \sin^2 a + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 1$$

nên từ điều kiện $\sin^2 a + \sin^2 b < 1$ suy ra :

$$b < \frac{\pi}{2} - a ; 0 < a+b < \frac{\pi}{2}$$

Mặt khác ta có :

$$\sin^2(a+b) = \sin^2 a \cos^2 b + \sin^2 b \cos^2 a + 2 \sin a \sin b \cos a \cos b$$

nên thay $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ vào thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2 \sin^2 a \sin^2 b < 2 \sin a \sin b \cos a \cos b$$

$$\Leftrightarrow \sin a \sin b < \cos a \cos b$$

$$\Leftrightarrow 0 < \cos(a+b)$$

(để ý $2 \sin a \sin b > 0$ nên có thể chia hai vế cho $2 \sin a \sin b$)

Bất đẳng thức sau cùng hiển nhiên đúng do $0 < a+b < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{đpcm.}$

Ví dụ 2.1.9.

Cho ΔABC không vuông. CMR :

$$3 \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C - 5(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) \leq 9 + \tan^2 A \tan^2 B + \tan^2 B \tan^2 C + \tan^2 C \tan^2 A$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} & 4 \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C - 4(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) - 8 \leq (1 + \tan^2 A)(1 + \tan^2 B)(1 + \tan^2 C) \\ \Leftrightarrow & 4 \left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos^2 B} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos^2 C} - 1 \right) - 4 \left(\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} - 3 \right) - 8 \leq \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \\ \Leftrightarrow & \frac{4}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} - \left(\frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 B \cos^2 C} + \frac{1}{\cos^2 C \cos^2 A} \right) \leq \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \\ \Leftrightarrow & \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & 2(\cos 2A + \cos 2B) + 4 \cos^2 C + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 4 \cos^2 C + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 4 \cos^2 C - 4 \cos C \cos(A-B) + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (2 \cos C - \cos(A-B))^2 + \sin^2(A-B) \geq 0 \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ sau đây, theo ý kiến chủ quan của tác giả, thì lời giải của nó xứng đáng là bậc thầy về biến đổi lượng giác. Những biến đổi thật sự lắt léo kết hợp cùng bất đẳng thức một cách hợp lý đúng chỗ đã mang đến cho chúng ta một bài toán thật sự đặc sắc !!!

Ví dụ 2.1.10.

Cho nửa đường tròn bán kính R , C là một điểm tùy ý trên nửa đường tròn. Trong hai hình quạt nội tiếp hai đường tròn, gọi M và N là hai tiếp điểm của hai đường tròn với đường kính của nửa đường tròn đã cho. CMR : $MN \geq 2R(\sqrt{2} - 1)$

Lời giải :

Gọi O_1, O_2 là tâm của hai đường tròn. Đặt $\angle CON = 2\alpha$ (như vậy $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

và $OO_1 = R_1$; $OO_2 = R_2$

Ta có :

$$\angle O_2 ON = \alpha$$

$$\angle O_1 OM = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Vậy :

$$MN = MO + ON = R_1 \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + R_2 \cot \alpha = R_1 \tan \alpha + R_2 \cot \alpha$$

Trong Δ vuông O_1MO có :

$$R_1 = O_1O \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (R - R_1) \cos \alpha$$

$$R_1(1 + \cos \alpha) = R \cos \alpha \Rightarrow R_1 = \frac{R \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Tương tự :

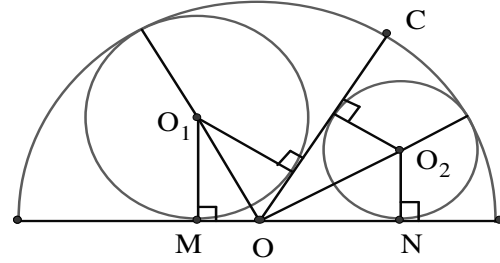
$$R_2 = OO_2 \sin \alpha = (R - R_2) \sin \alpha \Rightarrow R_2 = \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

Do đó :

$$\begin{aligned} MN &= \frac{R \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{R \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{R \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \\ &= R \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}{(1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)} \\ &= R \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= R \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{2R}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} \end{aligned}$$

$$\text{mà } \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \Rightarrow MN \geq \frac{2R}{\sqrt{2} + 1} = 2R(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow OC \perp MN.$$



2.2. Sử dụng các bước đầu cơ sở :

Các bước đầu cơ sở mà tác giả muốn nhắc đến ở đây là phần 1.2. **Các đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.** Ta sẽ đưa các bất đẳng thức cần chứng minh về các bất đẳng thức cơ bản bằng cách biến đổi và sử dụng các đẳng thức cơ bản. Ngoài ra, khi tham gia các kỳ thi, tác giả khuyên bạn đọc nên chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức cơ bản sử dụng như một bổ đề cho bài toán.

Ví dụ 2.2.1.

Cho ΔABC . Đường phân giác trong các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . CMR :

$$S_{ABC} \leq S_{A_1B_1C_1}$$

Lời giải :

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì nó cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2R^2 \sin A \sin B \sin C \leq 2R^2 \sin A_1 \sin B_1 \sin C_1 \quad (1)$$

$$\text{Do } A_1 = \frac{B+C}{2}; B_1 = \frac{C+A}{2}; C_1 = \frac{A+B}{2} \text{ nên :}$$

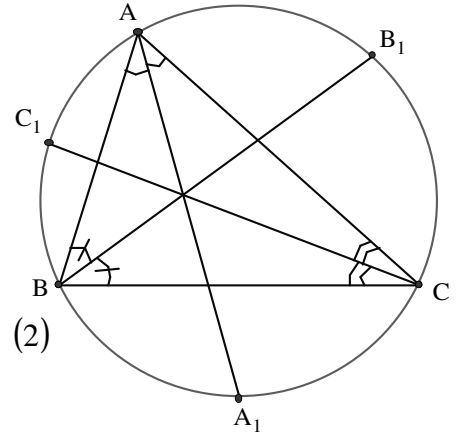
$$(1) \Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C \leq \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{A+B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad (2)$$

$$\text{Vì } \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} > 0 \text{ nên :}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.



Ví dụ 2.2.2.

CMR trong mọi tam giác ta đều có :

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq \frac{7}{4} + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Lời giải :

$$\text{Ta có : } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \leq \frac{3}{4} + \cos A + \cos B + \cos C \quad (1)$$

mà :

$$\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C$$

$$\cos B = \sin C \sin A - \cos C \cos A$$

$$\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

nên :

$$(1) \Leftrightarrow \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{3}{4} \quad (2)$$

Thật vậy hiển nhiên ta có :

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác ta có : } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 2.2.3.

Cho $\triangle ABC$ bất kỳ. CMR :

$$\frac{1}{1 + 2\cos A + 4\cos A \cos B} + \frac{1}{1 + 2\cos B + 4\cos B \cos C} + \frac{1}{1 + 2\cos C + 4\cos C \cos A} \geq 1$$

Lời giải :

Đặt về trái bất đẳng thức cần chứng minh là T.

Theo **AM – GM** ta có :

$$T[3 + 2(\cos A + \cos B + \cos C) + 4(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)] \geq 9 \quad (1)$$

$$\text{mà : } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{và hiển nhiên : } \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \leq \frac{(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{3} \leq \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 3 + 2(\cos A + \cos B + \cos C) + 4(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \leq 9 \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra $T \geq 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Ví dụ 2.2.4.

CMR với mọi $\triangle ABC$ bất kỳ, ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$2(ab + bc + ca) \geq 4\sqrt{3}S + a^2 + b^2 + c^2 \quad (1)$$

Ta có :

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

$$\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$

$$\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow 4S \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \right) \geq 4\sqrt{3}S + 4S(\cot A + \cot B + \cot C)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \cot A \right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \cot B \right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \cot C \right) \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 2.2.5.

CMR trong mọi tam giác, ta có :

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{r}{4R}$$

Lời giải :

Áp dụng công thức : $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, ta đưa bất đẳng thức đã cho về dạng tương đương sau :

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{5}{8} \quad (1)$$

$$\text{Ta có : } \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Do đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{4}(\cos A + \cos B + \cos C - 1) \leq \frac{5}{8} \quad (2)$$

Theo **AM – GM**, ta có :

$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \geq 2 \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \left(\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \right) \geq 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\sin A \tan \frac{B}{2} + \sin B \tan \frac{A}{2} \right)$$

Tương tự ta có :

$$2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\sin B \tan \frac{C}{2} + \sin C \tan \frac{B}{2} \right)$$

$$2 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\sin C \tan \frac{A}{2} + \sin A \tan \frac{C}{2} \right)$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} 2 \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \right) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\tan \frac{A}{2} (\sin B + \sin C) + \tan \frac{B}{2} (\sin C + \sin A) + \tan \frac{C}{2} (\sin A + \sin B) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \geq 2 \left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \right)$$

Khi đó :

$$\begin{aligned} &\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{4} (\cos A + \cos B + \cos C - 1) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (\cos A + \cos B + \cos C) - \frac{1}{4} (\cos A + \cos B + \cos C - 1) = \frac{1}{4} (\cos A + \cos B + \cos C) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{mà } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} - \frac{1}{4} (\cos A + \cos B + \cos C - 1) \leq \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.2.6.

Cho $\triangle ABC$ bất kỳ. CMR :

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} \right)^3 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} = 4S$$

nên bất đẳng thức đã cho tương đương với :

$$64S^3 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 \geq 2bc - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 \geq 4bc \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\tan \frac{A}{2}} \geq \frac{4bc \sin^2 \frac{A}{2}}{\tan \frac{A}{2}} = 2bc \sin A = 4S$$

Tương tự ta cũng có :

$$\frac{b^2}{\tan \frac{B}{2}} \geq 4S \quad ; \quad \frac{c^2}{\tan \frac{C}{2}} \geq 4S$$

$$\Rightarrow (1) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.2.7.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$(1+b+c-bc)\cos A + (1+c+a-ca)\cos B + (1+a+b-ab)\cos C \leq 3$$

Lời giải :

Ta có vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh bằng :

$$(\cos A + \cos B + \cos C) + [(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C] - (ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B)$$

Đặt :

$$P = \cos A + \cos B + \cos C$$

$$Q = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$$

$$R = ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B$$

$$\text{Dễ thấy } P \leq \frac{3}{2}$$

Mặt khác ta có :

$$b\cos C + c\cos B = 2R(\sin B\cos C + \sin C\cos B) = 2R\sin(B+C) = 2R\sin A = a$$

Tương tự :

$$c\cos A + a\cos C = b$$

$$a\cos B + b\cos A = c$$

$$\Rightarrow Q = a + b + c$$

Và ta lại có :

$$ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$\Rightarrow P + Q + R \leq \frac{3}{2} + (a + b + c) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 3 - \frac{(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2}{3} \leq 3$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2.2.8.

Cho $\triangle ABC$ bất kỳ. CMR :

$$R + r \geq \sqrt[4]{3}\sqrt{S}$$

Lời giải :

Ta có :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{2R^3 \sin A \sin B \sin C}{8} = \sqrt{\frac{S}{2 \sin A \sin B \sin C}}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{S}{R(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{2 \sin A \sin B \sin C}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Vậy :

$$R + r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2 \sin A \sin B \sin C}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2 \sin A \sin B \sin C}} + \frac{\sqrt{8}\sqrt{2 \sin A \sin B \sin C}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{R + r}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{S\sqrt{S}\sqrt{\sin A \sin B \sin C}}{8 \sin A \sin B \sin C (\sin A + \sin B + \sin C)}}$$

mà :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow R + r \geq \sqrt[3]{\frac{4S\sqrt{S}}{4\sqrt[4]{27} \cdot 3\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{S} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.2.9.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$\frac{8}{3} \left(\frac{S}{2r} \right)^2 \geq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \geq \frac{8}{3} \left(\frac{S}{R} \right)^2$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \leq \frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\text{Do } S = pr \Rightarrow \frac{8}{3} \left(\frac{S}{2r} \right)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{6}$$

Lại có :

$$\begin{aligned} \frac{ab+bc+ca}{2} &\leq \frac{(a+b+c)^2}{6} \\ \Rightarrow \frac{8}{3} \left(\frac{S}{2r} \right)^2 &\geq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \Rightarrow \text{vế trái được chứng minh xong.} \end{aligned}$$

Ta có :

$$a+b+c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow a+b+c \leq 3R\sqrt{3}$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$\begin{aligned} S^2 &= p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)} \leq p \frac{abc}{8} \\ \Rightarrow \frac{8}{3} \left(\frac{S}{R} \right)^2 &\leq \frac{8}{3} \cdot \frac{p \frac{abc}{8}}{\left(\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{abc}{a+b+c} = \frac{9abc}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} \end{aligned}$$

Một lần nữa theo **AM – GM** ta có :

$$\begin{aligned} \frac{9abc}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} &\leq \frac{9abc}{3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \leq \frac{ab\sqrt{ab}}{a+b} + \frac{bc\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{ca\sqrt{ca}}{c+a} \\ \Rightarrow \text{vế phải chứng minh xong} &\Rightarrow \text{Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.2.10.

Cho $\triangle ABC$ bất kỳ. CMR :

$$\frac{a^8}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{b^8}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{c^8}{\cos^2 \frac{C}{2}} \geq \left(\frac{abc\sqrt{6}}{3R} \right)^4$$

Lời giải :

Áp dụng **BCS** ta có :

$$\frac{a^8}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{b^8}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{c^8}{\cos^2 \frac{C}{2}} \geq \frac{(a^4 + b^4 + c^4)^2}{\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}}$$

mà :

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

$$\left(\frac{abc}{R} \right)^4 = (16S^2)^2$$

Vì thế ta chỉ cần chứng minh : $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

Trước hết ra có : $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ (1)

Thật vậy : (1) $\Leftrightarrow a^2(a^2 - bc) + b^2(b^2 - ca) + c^2(c^2 - ab) \geq 0$

$$\Leftrightarrow [a^2 + (b+c)^2][b-c]^2 + [b^2 + (c+a)^2][c-a]^2 + [c^2 + (a+b)^2][a-b]^2 \geq 0 \text{ (đúng!)}$$

Mặt khác ta cũng có :

$$16S^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c) = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \quad (2)$$

Từ (1),(2) thì suy ra ta phải chứng minh : $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ (3)

Đặt :

$$x = a + b - c$$

$$y = b + c - a$$

$$z = c + a - b$$

vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $x, y, z > 0$

Khi đó theo **AM – GM** thì :

$$abc = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \geq \frac{(2\sqrt{xy})(2\sqrt{yz})(2\sqrt{zx})}{8} = xyz = (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

$$\Rightarrow (3) \text{ đúng} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2.3 Đưa về vector và tích vô hướng :

Phương pháp này luôn đưa ra cho bạn đọc những lời giải bất ngờ và thú vị. Nó đặc trưng cho sự kết hợp hoàn hảo giữa đại số và hình học. Những tính chất của vector lại mang đến lời giải thật sáng sủa và đẹp mắt. Nhưng số lượng các bài toán của phương pháp này không nhiều.

Ví dụ 2.3.1.

CMR trong mọi tam giác ta có :

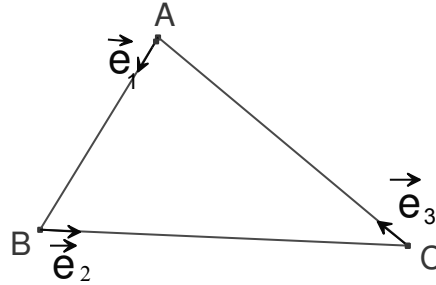
$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải :

Lấy các vector đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lần lượt trên các cạnh AB, BC, CA .

Hiển nhiên ta có :

$$\begin{aligned} & (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 + 2\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2\cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + 2\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$



Ví dụ 2.3.2.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$$

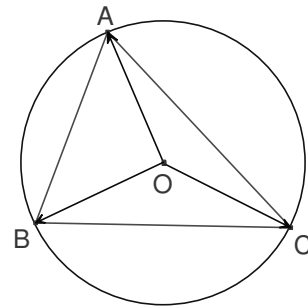
Lời giải :

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm ΔABC .

Ta có : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$

Hiển nhiên :

$$\begin{aligned} & (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3R^2 + 2R^2[\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) + \cos(\vec{OB}, \vec{OC}) + \cos(\vec{OC}, \vec{OA})] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3R^2 + 2R^2(\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2} \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$



Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0 \Leftrightarrow \vec{OG} = 0 \Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2.3.3.

Cho ΔABC nhọn. CMR $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ta có :

$$yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Lời giải :

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Ta có :

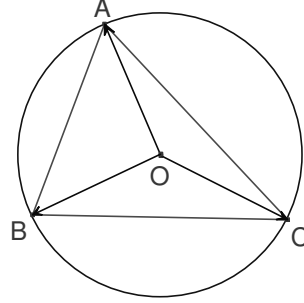
$$(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2yz\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2zx\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos 2C + 2yz \cos 2A + 2zx \cos 2B \geq 0$$

$$\Leftrightarrow yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C \geq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$\Rightarrow$ đpcm.



2.4. Kết hợp các bất đẳng thức cổ điển :

Về nội dung cũng như cách thức sử dụng các bất đẳng thức chúng ta đã bàn ở chương 1: “**Các bước đầu cơ sở**”. Vì thế ở phần này, ta sẽ không nhắc lại mà xét thêm một số ví dụ phức tạp hơn, thú vị hơn.

Ví dụ 2.4.1.

CMR $\forall \Delta ABC$ ta có :

$$\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

Mặt khác :

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{4}(\sin A + \sin B + \sin C)}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\
 &\geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}
 \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\begin{aligned}
 &\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \geq \\
 &\geq \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\
 &= \frac{9}{2} \sqrt[3]{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

mà ta cũng có : $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} \geq \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2} \\
 &\Rightarrow \text{đpcm.}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2.4.2.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$(\cos A + \cos B + \cos C)(\tan A + \tan B + \tan C) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải :

Vì ΔABC nhọn nên $\cos A, \cos B, \cos C, \tan A, \tan B, \tan C$ đều dương.

Theo **AM – GM** ta có : $\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \geq \sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C}$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C = \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C}{2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$\geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sin A \cos A \sin B \cos B \sin C \cos C}}{2 \cos A \cos B \cos C}$$

Suy ra :

$$(\cos A + \cos B + \cos C)(\tan A + \tan B + \tan C) \geq \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C \sin A \cos A \sin B \cos B \sin C \cos C}}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{9}{2} \sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \quad (1)$$

Mặt khác : $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \geq \frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$(\cos A + \cos B + \cos C)(\tan A + \tan B + \tan C) \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.4.3.

Cho ΔABC tùy ý. CMR :

$$\left(\tan \frac{A}{2} + \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} \right) + \left(\tan \frac{B}{2} + \frac{1}{\tan \frac{B}{2}} \right) + \left(\tan \frac{C}{2} + \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \right) \geq 4\sqrt{3}$$

Lời giải :

$$\text{Xét } f(x) = \tan x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Khi đó : } f''(x) =$$

$$\text{Theo Jensen thì : } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \quad (1)$$

$$\text{Xét } g(x) = \cot x \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Và } g''(x) = 2(1 + \cot^2 x) \cot x > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{Theo Jensen thì : } \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\text{Vậy } (1) + (2) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.4.4.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải :

Ta sử dụng bổ đề sau :

Bổ đề : Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leq S$ thì :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{S}\right)^3 \quad (1)$$

Chứng minh bổ đề :

Ta có :

$$VT(1) = 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{1}{xyz} \quad (2)$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z} \geq \frac{9}{S} \quad (3)$$

Dấu bằng xảy ra trong (3) $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{S}{3}$

Tiếp tục theo **AM – GM** thì :

$$\begin{aligned} S &\geq x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \\ \Rightarrow \frac{S^3}{27} &\geq xyz \Rightarrow \frac{1}{xyz} \geq \frac{27}{S^3} \end{aligned} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{S}{3}$

Vẫn theo **AM – GM** ta lại có :

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{xyz}\right)^2} \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{S}{3}$

Từ (4)(5) suy ra :

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{27}{S^2} \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (4)(5) $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{S}{3}$

Từ (2)(3)(4)(6) ta có :

$$VT(1) \geq 1 + \frac{9}{S} + \frac{27}{S^2} + \frac{27}{S^3} = \left(1 + \frac{3}{S}\right)^3$$

Bổ đề được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3)(4)(6)

$$\Leftrightarrow x = y = z = \frac{S}{3}$$

Áp dụng với $x = \sin A > 0, y = \sin B > 0, z = \sin C > 0$

mà ta có $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ vậy ở đây $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Theo bổ đề suy ra ngay :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Ví dụ 2.4.5.

CMR trong mọi tam giác ta có :

$$l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3}$$

Lời giải :

$$\text{Ta có : } l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2bc}{b+c} \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)} \quad (1)$$

Theo **AM – GM** ta có $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \leq 1$ nên từ (1) suy ra :

$$l_a \leq \sqrt{p(p-a)} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow b = c$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$$l_b \leq \sqrt{p(p-b)} \quad (3)$$

$$l_c \leq \sqrt{p(p-c)} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (3)(4) tương ứng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Từ (2)(3)(4) suy ra :

$$l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{p}(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}) \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2)(3)(4) $\Leftrightarrow a = b = c$

Áp dụng **BCS** ta có :

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \right)^2 \leq 3(3p-a-b-c) \\ & \Rightarrow \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p} \quad (6) \end{aligned}$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Từ (5)(6) ta có : $l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3} \quad (7)$

Đẳng thức trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (5)(6) $\Leftrightarrow a = b = c$
 $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 2.4.6.

Cho ΔABC bất kỳ. CMR :

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq 4 - \frac{2r}{R}$$

Lời giải :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } S &= \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ \Rightarrow \frac{2r}{R} &= \frac{8S^2}{pabc} = \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{abc} \\ &= \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 - a^3 - b^3 - c^3 - 2abc}{abc} \\ &\Rightarrow 4 - \frac{2r}{R} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + 6 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \\ &\Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.4.7.

Cho ΔABC nhọn. CMR :

$$\left(\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} - c \right) \left(\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} - a \right) \left(\frac{c}{\cos C} + \frac{a}{\cos A} - b \right) \geq 27abc$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} - \sin C \right) \left(\frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} - \sin A \right) \left(\frac{\sin C}{\cos C} + \frac{\sin A}{\cos A} - \sin B \right) \geq 27 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin C}{\cos A \cos B} - \sin C \right) \left(\frac{\sin A}{\cos B \cos C} - \sin A \right) \left(\frac{\sin B}{\cos C \cos A} - \sin B \right) \geq 27 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} \cdot \frac{1 - \cos B \cos C}{\cos B \cos C} \cdot \frac{1 - \cos C \cos A}{\cos C \cos A} \geq 27$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \tan \frac{A}{2} \\ y = \tan \frac{B}{2} \\ z = \tan \frac{C}{2} \\ 0 < x, y, z < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \cos B = \frac{1-y^2}{1+y^2} \\ \cos C = \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \tan A = \frac{2x}{1-x^2} \\ \tan B = \frac{2y}{1-y^2} \\ \tan C = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \frac{1 - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = \frac{1 - \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}}{\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}$$

Mặt khác ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} \geq \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} = \tan A \tan B \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \frac{1 - \cos B \cos C}{\cos B \cos C} \geq \tan B \tan C \quad (2)$$

$$\frac{1 - \cos C \cos A}{\cos C \cos A} \geq \tan C \tan A \quad (3)$$

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức (1)(2)(3) ta được :

$$\frac{1 - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} \cdot \frac{1 - \cos B \cos C}{\cos B \cos C} \cdot \frac{1 - \cos C \cos A}{\cos C \cos A} \geq \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C$$

Ta đã biết : $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C \geq 27$

Suy ra :

$$\frac{1 - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} \cdot \frac{1 - \cos B \cos C}{\cos B \cos C} \cdot \frac{1 - \cos C \cos A}{\cos C \cos A} \geq 27$$

$\Rightarrow \text{đpcm.}$

Ví dụ 2.4.8.

CMR $\forall \Delta ABC$ ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35} \left(p^2 + \frac{abc}{p} \right)$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35} \left(\frac{(a+b+c)^2}{4} + \frac{2abc}{a+b+c} \right)$$

$$\Leftrightarrow 35(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9(a+b+c)^2 + \frac{72abc}{a+b+c}$$

Theo **BCS** thì : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\Rightarrow 9(a+b+c)^2 \leq 27(a^2 + b^2 + c^2)$ (1)

Lại có :

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \\ \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 72abc$$

$$\Leftrightarrow 8(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{72abc}{a+b+c} \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) ta được :

$$27(a^2 + b^2 + c^2) + 8(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9(a+b+c)^2 + \frac{72abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 35(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9(a+b+c)^2 + \frac{72abc}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.4.9.

CMR trong ΔABC ta có :

$$\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6$$

Lời giải :

Theo **AM – GM** ta có :

$$\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}} \quad (1)$$

mà :

$$\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{C+A}{2} \cos \frac{C-A}{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{C}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B)}{\sin A \sin B \sin C}$$

Lại theo **AM – GM** ta có :

$$\begin{cases} \sin A + \sin B \geq 2\sqrt{\sin A \sin B} \\ \sin B + \sin C \geq 2\sqrt{\sin B \sin C} \\ \sin C + \sin A \geq 2\sqrt{\sin C \sin A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B) \geq 8 \sin A \sin B \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)(\sin A + \sin B)}{\sin A \sin B \sin C} \geq 8 \quad (2)$$

Từ (1)(2) suy ra :

$$\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \geq 3\sqrt[3]{8} = 6$$

$\Rightarrow \text{đpcm.}$

Ví dụ 2.4.10.

CMR trong mọi $\triangle ABC$ ta có :

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \geq 9 \left(\frac{r}{R} \right)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$R \sin A \sin B + R \sin B \sin C + R \sin C \sin A \geq 9r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} \geq 9r^2$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 36r^2$$

Theo công thức hình chiếu :

$$a = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right); b = r \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right); c = r \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right)$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = r^2 \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) + r^2 \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) + r^2 \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

Theo **AM – GM** ta có :

$$\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \geq \left(2\sqrt{\cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} \right) \left(2\sqrt{\cot \frac{C}{2} \cot \frac{A}{2}} \right) = 4\sqrt{\cot^2 C \cot A \cot B} \quad (1)$$

Tương tự :

$$\left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \geq 4\sqrt{\cot^2 A \cot B \cot C} \quad (2)$$

$$\left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \geq 4\sqrt{\cot^2 B \cot C \cot A} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) suy ra :

$$\begin{aligned} & \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) + \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) + \\ & + \left(\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \right) \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \geq 12\sqrt{\cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2}} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác ta có : } \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow \cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2} \geq 27 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4)(5) suy ra : } 12\sqrt{\cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2}} \geq 12.3 = 36 \quad (6)$$

Từ (4)(6) suy ra đpcm.

2.5. Tập dụng tính đơn điệu của hàm số :

Chương này khi đọc thì bạn đọc cần có kiến thức cơ bản về đạo hàm, khảo sát hàm số của chương trình 12 THPT. Phương pháp này thực sự có hiệu quả trong các bài bất đẳng thức lượng giác. Để có thể sử dụng tốt phương pháp này thì bạn đọc cần đến những kinh nghiệm giải toán ở các phương pháp đã nêu ở các phân trước.

Ví dụ 2.5.1.

$$\text{CMR : } \sin x > \frac{2x}{\pi} \quad \text{với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

Lời giải :

$$\begin{aligned} \text{Xét } f(x) &= \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} \text{ với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } g(x) &= x \cos x - \sin x \text{ với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow g'(x) &= -x \sin x < 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng đó.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.2.

$$\text{CMR : } \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \quad \text{với } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &> (\cos x)^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow \sin x (\cos x)^{-\frac{1}{3}} - x &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } f(x) = \sin x (\cos x)^{-\frac{1}{3}} - x \quad \text{với } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Ta có : } f'(x) = (\cos x)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \sin^2 x (\cos x)^{-\frac{4}{3}} - 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} (\cos x)^{-\frac{1}{3}} (1 - \sin x) + \frac{4}{9} \sin^3 x (\cos x)^{-\frac{7}{4}} > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ đồng biến trong khoảng đó} \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ cũng đồng biến trong khoảng đó} \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.3.

CMR nếu a là góc nhọn hay $a = 0$ thì ta có :

$$2^{\sin a} + 2^{\tan a} \geq 2^{a+1}$$

Lời giải :

Áp dụng **AM – GM** cho hai số dương $2^{\sin a}$ và $2^{\tan a}$ ta có :

$$2^{\sin a} + 2^{\tan a} \geq 2\sqrt{2^{\sin a} 2^{\tan a}} = 2\sqrt{2^{\sin a + \tan a}}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh : $\sin a + \tan a > 2a$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$

Xét $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có :

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(1 - \cos x)[1 + \cos x(1 - \cos x)]}{\cos^2 x} > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó $\Rightarrow f(a) > f(0)$ với $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin a + \tan a > 2a$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2^{\sin a + \tan a}} \geq 2\sqrt{2^{2a}} = 2^{a+1}$$

$$\Rightarrow 2^{\sin a} + 2^{\tan a} \geq 2^{a+1} \quad (\text{khi } a = 0 \text{ ta có dấu đẳng thức xảy ra}).$$

Ví dụ 2.5.4.

CMR trong mọi tam giác ta đều có :

$$1 + \cos A \cos B + \cos A \cos B + \cos A \cos B \leq \frac{13}{12}(\cos A + \cos B + \cos C) + \cos A \cos B \cos C$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$1 - 2\cos A \cos B \cos C + 2(\cos A \cos B + \cos A \cos B + \cos A \cos B) + 1 \geq \frac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2(\cos A \cos B + \cos A \cos B + \cos A \cos B) + 1 \geq \frac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B + \cos C)^2 + 1 \leq \frac{13}{6}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C + \frac{1}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{13}{6}$$

$$\text{Đặt } t = \cos A + \cos B + \cos C \Rightarrow 1 < t \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Xét hàm đặc trưng : } f(t) = t + \frac{1}{t} \quad \text{với } t \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$$

Ta có : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall t \in \left(1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

$$\Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{6} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.5.

Cho ΔABC có chu vi bằng 3. CMR :

$$3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 8R \sin A \sin B \sin C \geq \frac{13}{4R^2}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$3.4R^2 \sin^2 A + 3.4R^2 \sin^2 B + 3.4R^2 \sin^2 C + 4(2R \sin A)(2R \sin B)(2R \sin C) \geq 13$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$$

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$

$$\text{Theo giả thiết : } a + b + c = 3 \Rightarrow a + b > c \Rightarrow 3 - c > c \Rightarrow 1 \leq c < \frac{3}{2}$$

Ta biến đổi :

$$\begin{aligned} T &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \\ &= 3(a^2 + b^2) + 3c^2 + 4abc \\ &= 3[(a+b)^2 - 2ab] + 3c^2 + 4abc \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 + 4abc - 6ab \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2ab(2c-3) \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2ab(3-2c) \end{aligned}$$

$$\text{vì } c < \frac{3}{2} \Rightarrow 2c - 3 < 0 \Rightarrow 3 - 2c > 0$$

$$\text{và } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2 \Rightarrow -2ab \geq -2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2$$

$$\text{Do đó : } T \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2(3-2c)$$

$$= c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = f(c)$$

$$\text{Xét } f(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} \text{ với } 1 \leq c < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 3c \geq 0 \quad \forall c \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow f(c) \text{ đồng biến trên khoảng đó.}$$

$$\Rightarrow f(c) \geq f(1) = 13 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.6.

$$\text{Cho } \Delta ABC \text{ bất kỳ. CMR : } \frac{r^2}{S} + \frac{p}{r} \geq \frac{28}{3\sqrt{3}}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{cases} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p-a}{p} \cdot \frac{p-b}{p} \cdot \frac{p-c}{p}} \\ \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{cases}$$

và $\frac{r^2}{S} = \frac{S}{p^2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2} = \sqrt{\frac{p-a}{p} \cdot \frac{p-b}{p} \cdot \frac{p-c}{p}}$

Do đó : $\frac{r^2}{S} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= \frac{a+b+c}{2(p-a)\tan \frac{A}{2}} = \frac{a+b+c}{(b+c-a)\tan \frac{A}{2}} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{2R(\sin B + \sin C - \sin A)\tan \frac{A}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} &\geq \frac{28}{3\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} + \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} &\geq \frac{28}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Đặt $t = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \Rightarrow t \geq 3\sqrt{3}$

Xét $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $t \geq 3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0 \quad \forall t \geq 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \min f(t) = f(3\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{28}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.7.

CMR với mọi ΔABC ta có :

$$(2R+a)(2R+b)(2R+c) < 8R^3 e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} \frac{2R+a}{2R} \cdot \frac{2R+b}{2R} \cdot \frac{2R+c}{R} &< e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{a}{2R}\right) \left(1 + \frac{b}{2R}\right) \left(1 + \frac{c}{2R}\right) &< e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \\ \Leftrightarrow (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) &< e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

Xét $f(x) = \ln(1+x) - x$ với $0 < x < 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0 \quad \forall x \in (0;1)$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó $\Rightarrow f(x) < f(0) = 0$

$$\Rightarrow \ln(1+x) < x$$

Lần lượt thay $x = \{\sin A, \sin B, \sin C\}$ vào bất đẳng thức trên rồi cộng lại ta được :

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin A) + \ln(1 + \sin B) + \ln(1 + \sin C) &< \sin A + \sin B + \sin C \\ \Leftrightarrow \ln[(1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C)] &< \sin A + \sin B + \sin C \\ \Leftrightarrow (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) &< e^{\sin A + \sin B + \sin C} \end{aligned}$$

$$\text{mà } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) < e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.8.

Cho ΔABC . CMR :

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{16}$$

Lời giải :

Không mất tổng quát giả sử $C = \min\{A, B, C\}$. Ta có :

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B) = \left(1 + \frac{1 + \cos 2A}{2}\right) \left(1 + \frac{1 + \cos 2B}{2}\right)$$

$$\text{Xét } P = 4(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B) = (3 + \cos 2A)(3 + \cos 2B)$$

$$\Rightarrow P = 9 + 3(\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2A \cos 2B$$

$$= 9 + 6 \cos(A+B) \cos(A-B) + \frac{1}{2} [\cos(2A+2B) + \cos(2A-2B)]$$

$$\begin{aligned}
 &= 9 - 6 \cos C \cos(A - B) + \frac{1}{2} [2 \cos^2(A + B) + 2 \cos^2(A + B) - 2] \\
 &= 9 - 6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C + \cos^2(A + B) - 1 \\
 &\text{do } |\cos(A - B)| \leq 1 \\
 &\Rightarrow P \geq 9 - 6 \cos C + \cos^2 C = (3 - \cos C)^2 \\
 &\text{mà } \cos C > 0 \\
 &\Rightarrow P(1 + \cos^2 C) \geq (3 - \cos C)^2 (1 + \cos^2 C) \\
 &\text{Mặt khác ta có : } 0 < C \leq 60^\circ \Rightarrow \cos C \geq \frac{1}{2} \\
 &\text{Xét } f(x) = (3 - x)^2 (1 + x^2) \text{ với } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \\
 &\Rightarrow f'(x) = 2(x - 3)(x - 1)(2x - 1) \geq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \\
 &\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên khoảng đó.} \\
 &\Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{125}{16} \Rightarrow (1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{16} \Rightarrow \text{đpcm.}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2.5.9.

Cho $\triangle ABC$ bất kỳ. CMR :

$$2\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) - (\cot B + \cot C) \leq 2\sqrt{3}$$

Lời giải :

$$\begin{aligned}
 &\text{Xét } f(x) = \frac{2}{\sin x} - \cot x \text{ với } x \in (0; \pi) \\
 &\Rightarrow f'(x) = -\frac{2 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2 \cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \\
 &\Rightarrow \max f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{\sin x} - \cot x \leq \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Thay x bởi B, C trong bất đẳng thức trên ta được :

$$\begin{cases} \frac{2}{\sin B} - \cot B \leq \sqrt{3} \\ \frac{2}{\sin C} - \cot C \leq \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2.5.10.

$$CMR : \quad \frac{1}{3} < \sin 20^\circ < \frac{7}{20}$$

Lời giải :

$$\text{Đặt } a = \sin 20^\circ \Rightarrow 0 < a < \sin 30^\circ \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có : } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ = \sin 3 \cdot 20^\circ = 3 \sin 20^\circ - 4 \sin^3 20^\circ \Rightarrow 3a - 4a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 4a^3 - 3a + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow a \text{ là nghiệm của phương trình : } 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\text{Xét đa thức : } f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có : } f(-1) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} < 0$$

$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow f(-1)f(0) < 0$ Bởi vì $f(x)$ liên tục trên toàn trục số .Do đó đa thức $f(x)$ có một nghiệm thực trên khoảng $(-1; 0)$

$$\text{Lại có : } \begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{27\sqrt{3} - 46}{54} > 0 \\ f\left(\frac{7}{20}\right) = \frac{1000\sqrt{3} - 1757}{2000} < 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{7}{20}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \text{đa thức } f(x) \text{ có một nghiệm thực trên khoảng } \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{20}\right)$$

$$\text{Lại có : } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} < 0 \text{ và } f(1) = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$$

$$\Rightarrow \text{đa thức } f(x) \text{ có một nghiệm thực trên khoảng } \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\text{Bởi vì } a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a \text{ là nghiệm thực trên khoảng } \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{20}\right) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2.6. Bài tập :

Cho $\triangle ABC$. CMR :

- 2.6.1.** $\sqrt{3}(\cos 2A - \cos 2C) + \cos B \leq \frac{5}{2}$
- 2.6.2.** $\sqrt{3} \cos 2A + 2 \cos 2B + 2\sqrt{3} \cos 2C \geq -4$
- 2.6.3.** $(\sqrt{5} + 1)(\cos 2A + \cos 2B) - (3 + \sqrt{5})\cos 2C \leq 4 + \sqrt{5}$
- 2.6.4.** $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}$ với $\triangle ABC$ có một góc $\geq \frac{2\pi}{3}$
- 2.6.5.** $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$
- 2.6.6.** $\frac{abc}{r} \geq \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}$
- 2.6.7.** $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 2$
- 2.6.8.** $\frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan A \tan B \tan C$
- 2.6.9.** $a \tan \frac{A}{2} + b \tan \frac{B}{2} + c \tan \frac{C}{2} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$
- 2.6.10.** $\frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$
- 2.6.11.** $1 + \cos A \cos B \cos C \geq 9 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- 2.6.12.** $m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$
- 2.6.13.** $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq p^2$
- 2.6.14.** $a^2(p-b)(p-c) + b^2(p-c)(p-a) + c^2(p-a)(p-b) \leq p^2 R^2$
- 2.6.15.** $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C$