

PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

Nguyễn Anh Tuấn, THPT Chuyên Bắc Giang

1 Lời nói đầu

Toán học có một vẻ đẹp lôi cuốn và quyến rũ, ai đã đam mê thì mãi mãi đam mê. Trong vẻ đẹp đầy huyền bí đó thì các bài toán liên quan đến Phương trình vô tỷ (chứa căn thức) - có nét đẹp thật sự xao xuyến và quyến rũ.

Có lẽ vì lý do đó mà trong các kì thi học sinh giỏi các nước, thi học sinh giỏi Quốc gia (VMO) của chúng ta, bài toán liên quan đến Phương trình vô tỷ thường có mặt để thách thức các nhà Toán học tương lai với dung nhan muôn hình, muôn vẻ. Rồi thì còn trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thi học sinh giỏi cấp thành phố, thi Đại học, ...

Thật là điều thú vị !

Chuyên đề: "Một số dạng phương trình vô tỷ cho học sinh giỏi" tôi viết với mong muốn phần nào giúp các Thầy cô giáo dạy Toán, các em học sinh phổ thông trong các đội tuyển thi học sinh giỏi Toán có thể tìm thấy nhiều điều bổ ích và nhiều điều thú vị đối với dạng toán này. Trong Chuyên đề có cả những bài với cấp độ giải trí cho học sinh giỏi (rèn luyện phản xạ nhanh).

Đối với việc giải phương trình vô tỷ thì hầu hết các phương pháp giải, các phương pháp biến đổi hay đều có trong cuốn Chuyên đề này. Cách phân tích để nhận dạng một phương trình và chọn lựa phương pháp giải thích hợp là khó và đa dạng. Để có khả năng này chúng ta phải giải quyết nhiều phương trình và tự rút ra những nhận xét, kinh nghiệm và hay hơn nữa là một vài thuật giải toán, cũng như lưu ý rằng một bài toán có thể có nhiều cách giải khác nhau.

Tôi viết Chuyên đề này với một tinh thần trách nhiệm cao. Tôi hy vọng rằng Chuyên đề sẽ để lại trong lòng Thầy cô và các em học sinh một ấn tượng tốt đẹp.

Với mỗi ví dụ trong từng phương pháp giải, người đọc có thể tự sáng tác cho mình những bài toán với những con số mà mình yêu thích. Tuy nhiên Chuyên đề chắc chắn sẽ không thể tránh khỏi những điều không mong muốn. Tôi rất mong nhận được sự động viên và những ý kiến đóng góp chân thành của Quý Thầy cô và các em học sinh để Chuyên đề tiếp tục được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

2 Một số phương pháp giải phương trình vô tỷ

2.1 Một số quy ước khi đọc chuyên đề

1. Vt: Vế trái của phương trình. Vt: Bình phương của vế trái phương trình.
2. Vp: Vế phải của phương trình. Vp: Bình phương của vế phải phương trình.
3. Vt (1): Vế trái của phương trình (1).
4. Vp (1): Vế phải của phương trình (1).
5. Đk, đk: Điều kiện. .
6. VMO, VMO: Thi học sinh giỏi Việt Nam, CMO: Thi học sinh giỏi Canada.

2.2 Phương pháp đặt ẩn phụ

2.2.1 Một số lưu ý

Khi giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp đặt ẩn phụ ta có thể gặp các dạng như: Đặt ẩn phụ đưa phương trình ĐÓ cho về phương trình đại số không còn chứa căn thức với ẩn mới là ẩn phụ, hoặc đặt ẩn phụ mà vẫn còn ẩn chính, ta có thể tính ẩn này theo ẩn kia, hoặc đặt ẩn phụ để đưa phương trình về hệ hai phương trình với hai ẩn là hai ẩn phụ, cũng có thể hai ẩn gồm một ẩn chính và một ẩn phụ, thường khi đó ta được một hệ đối xứng, hoặc đặt ẩn phụ để được phương trình có hai ẩn phụ, ta biến đổi về phương trình tích với vế phải bằng 0. Thường giải phương trình ta hay biến đổi tương đương, nếu biến đổi hệ quả thì nhớ phải thử lại nghiệm.

2.2.2 Một số ví dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

$$1. 18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$2. x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

$$3. \sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$4. 2x^2 + \sqrt{1-x} + 2x\sqrt{1-x^2} = 1$$

Hướng dẫn (HD):

- Đặt $\sqrt{x} = y$, $y \geq 0$. Khi đó phương trình đó cho trở thành

$$(3y^2 - 4y - 2)(6y^2 + 2y + 1) = 0,$$

suy ra $3y^2 - 4y - 2 = 0$, ta được $y = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{9}$.

- Ta có $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$, $\forall x$. Mặt khác $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$.

Đặt $y = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$ (có thể viết điều kiện $y \geq 0$ hoặc chính xác hơn là $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \sqrt{3}$), ta được

$$2y^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y \Leftrightarrow 6y^2 + \sqrt{3}y - 3 = 0, \text{ ta được } y = \frac{\sqrt{3}}{3} (\text{loại } y = -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

- Ta thấy $x < 0$ không thỏa mãn.

Khi đó phương trình tương đương với hệ

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right) > 0 \\ \left(\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)^2 = \left(4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\right)^2 \end{cases}$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$, ta được

$$2 \leq y < 4 \quad (1)$$

$$4 - (y^2 - 2) + 2\sqrt{5 - 2(y^2 - 2)} = (4 - y)^2 \quad (2)$$

Xét

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{9 - 2y^2} = y^2 - 4y + 5 \Leftrightarrow y^4 - 8y^3 + 28y^2 - 40y + 16 = 0$$

(do hai vế không âm). Điều này tương đương với

$$\Leftrightarrow (y - 2)(y^3 - 6y^2 + 16y - 8) = 0 \Leftrightarrow (y - 2)[(y - 2)(y^2 - 4y + 8) + 8] = 0.$$

Dẫn đến $y = 2$ (do $(y - 2)(y^2 - 4y + 8) + 8 > 0$, $\forall y$ thỏa mãn (1)). Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Nhận xét 1. Bài toán này ta có thể giải bằng phương pháp đánh giá trong phần sau.

Ta có phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x} &= 1 - 2x^2 - 2x\sqrt{1 - x^2} \\ \Rightarrow 1 - x &= 1 + 4x^4 + 4x^2(1 - x^2) - 4x^2 - 4x\sqrt{1 - x^2} + 8x^3\sqrt{1 - x^2} \\ \Leftrightarrow x(1 - 4\sqrt{1 - x^2} + 8x^2\sqrt{1 - x^2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - 4\sqrt{1 - x^2} + 8x^2\sqrt{1 - x^2} = 0 \end{cases} &(1) \end{aligned}$$

Xét (1), đặt $y = \sqrt{1 - x^2}$, suy ra $y \geq 0$ và $x^2 = 1 - y^2$.

Ta được

$$\begin{aligned} 1 - 4y + 8y(1 - y^2) &= 0 \Leftrightarrow 8y^3 - 4y - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (2y + 1)(4y^2 - 2y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $x = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x = 0$ và $x = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

Bài toán này ta có thể giải bằng Phương pháp lượng giác trong phần sau.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$.

HD: Đặt $\sqrt{x^2 + 1} = y, y \geq 1$. Khi đó ta được $y^2 + 3x = (x + 3)y \Leftrightarrow (y - 3)(y - x) = 0$.
 Dẫn đến $y = 3$ và $y = x$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x = \pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\sqrt[4]{17 - x^8} - \sqrt[3]{2x^8 - 1} = 1$.

HD: Đặt $\sqrt[4]{17 - x^8} = y, y \geq 0$ và $\sqrt[3]{2x^8 - 1} = z$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ 2y^4 + z^3 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y - 1 \\ 2y^4 + (y - 1)^3 = 33 \end{cases}$$

Xét $2y^4 + (y - 1)^3 = 33 \Leftrightarrow (y - 2)(2y^3 + 5y^2 + 7y + 17) = 0$. Suy ra được $y = 2$. Từ đó nghiệm của phương trình là $x = \pm 1$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

1. $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + 3x\sqrt{4 - x^2}$
2. $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$

HD:

1. Đặt $\sqrt{4 - x^2} = y, 0 \leq y \leq 2$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} x + y = 2 + 3xy \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Thế hoặc lại đặt $x + y = S, xy = P$ rồi giải tiếp ta được nghiệm của phương trình là $x = 0, x = 2, x = \frac{-2 - \sqrt{14}}{3}$.

2. Đặt $\sqrt[3]{81x - 8} = 3y \Rightarrow 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y \\ 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x. \end{cases}$$

Xét hiệu hai phương trình dẫn đến $x = y$ (do $\frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^2 \frac{1}{2}(y - 2)^2 + \frac{1}{3} > 0$).

Thay vào hệ và giải phương trình ta được $x = 0, x = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$.

HD: Đk $x \geq 5$. Với điều kiện đó ta biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$\begin{aligned}\sqrt{5x^2 + 14x + 9} &= \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x + 1} \\ 5x^2 + 14x + 9 &= x^2 - x - 20 + 25(x + 1) + 10\sqrt{(x + 1)(x + 4)(x - 5)} \\ 2x^2 - 5x + 2 &= 5\sqrt{(x + 1)(x - 5)}\sqrt{x + 4} \\ 2(x + 1)(x - 5) + 3(x + 4) &= 5\sqrt{(x + 1)(x - 5)}\sqrt{x + 4}.\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{y} = \sqrt{(x + 1)(x - 5)}$, $z = \sqrt{x + 4}$, $y \geq 0$, $z \geq 3$. Ta được

$$2y^2 - 5yz + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow (y - z)(2y - 3z) = 0,$$

từ đó ta được

$$\begin{cases} y = z \\ y = \frac{3}{2}z. \end{cases}$$

Nếu $y = z$ thì ta được $x = \frac{5 + \sqrt{61}}{2}$ (do $x \geq 5$).

Nếu $y = \frac{3}{2}z$ thì ta được $x = 8$ và $x = -\frac{7}{4}$. Vậy phương trình có ba nghiệm trên.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x + 9}{28}}$, với $x > 0$.

Nhận xét 2. Dạng phương trình này ta thường đặt $\sqrt{\frac{4x + 9}{28}} = ay + b$, sau đó bình phương lên rồi ta "cố ý" biến đổi về hệ đối xứng với hai ẩn x, y . Từ đó ta sẽ biết được giá trị của a, b . Với bài toán này ta tìm được $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$. (Nếu $a = 1$ và $b = 0$ mà giải được thì đó là phương trình quá đơn giản, ta không xét ở đây).

HD: Đặt $\sqrt{\frac{4x + 9}{28}} = y + \frac{1}{2}$ do $x > 0$ nên $\sqrt{\frac{4x + 9}{28}} > \sqrt{\frac{9}{28}} > \frac{1}{2}$, từ đó $y > 0$. Ta được hệ

$$\begin{cases} 7x^2 + 7x = y + \frac{1}{2} \\ 7y^2 + 7y = x + \frac{1}{2} \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Giải hệ bình thường theo dạng ta được $x = -\frac{-6 + \sqrt{50}}{14}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt{2 - x^3}$

Nhận xét 3. Khi giải một phương trình không phải lúc nào cũng có nghiệm thực, có những phương trình vô nghiệm nhưng khi cho học sinh làm bài ta cũng kiểm tra được năng lực của học sinh khi trình bày lời giải bài toán đó. Chẳng hạn như bài toán trong ví dụ này.

HD: Đặt $\sqrt[3]{x^2 - 2} = \sqrt{2 - x^3} = y$, với $y \geq 0$. Khi đó ta được hệ

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + 2 \\ x^2 = 2 - y^3 \end{cases}$$

và từ phương trình ban đầu ta có $x \leq -\sqrt{2}$. Xét hiệu hai phương trình của hệ ta được phương trình $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - x + y) = 0$.

Với $x = -y$ thì $x = -\sqrt[3]{x^2 - 2}$, dẫn đến vô nghiệm.

với $x^2 - xy + y^2 - x + y = (y - x)(1 - x) + y^2 > 0$ với mọi $y \geq 0$ và $x \leq -\sqrt{2}$. Do đó hệ vô nghiệm hay phương trình đã cho vô nghiệm.

2.2.3 Một số bài tập tương tự

Bài toán 1. Giải các phương trình sau:

1. $x^2 + \sqrt{2 - x} = x^2 \sqrt{2 - x}$.

HD: Đặt $y = \sqrt{2 - x}$, $y \geq 0$ ta được $(y - 1)(y^2 + y - 1)(2y^2 - y - 4) = 0$.

Từ đó $y = 1$, $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{33} + 1}{8}$ và được nghiệm của phương trình là $x = 1$, $y = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{33} + 1}{8}$.

2. $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$.

HD: Từ phương trình suy ra $x \neq 1$. Đặt $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = y$, bình phương dẫn đến $y \geq \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}$. Phương trình trở thành $2y^2 - 7y + 3 = 0$, ta được $y = 3$. Từ đó $x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Bài toán 2. Giải phương trình: $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$.

HD: Đặt $\sqrt{x^2 + 1} = y$, $y \geq 1$. Từ đó ta được $y = \frac{1}{2}$ hoặc $y = 2x - 1$. Phương trình có nghiệm $x = \frac{4}{3}$.

Bài toán 3. Giải các phương trình sau:

1. $3(2 + \sqrt{x - 2}) = 2x + \sqrt{x + 6}$.

HD: Đặt $3\sqrt{x - 2} = y$, $\sqrt{x + 6} = z$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Ta được $x = 3$ hoặc $y + z = 4$.

Từ đó phương trình có 2 nghiệm $x = 3$, $x = \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}$

2. $\sqrt{2 - \sqrt{2}(x + 11)} + \sqrt[4]{2x} = 1$.

HD: Đk $0 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$. Đặt $\sqrt{2 - \sqrt{2}(x + 11)} = \sqrt[4]{2}y \Leftrightarrow y = \sqrt{\sqrt{2} - 1 - x}$ và $\sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{2}z \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{x}$ với $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2}(y + z) = 1 & (1) \\ y^2 + z^4 = \sqrt{2} - 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) thay $y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - z$ vào (2) ta được $(z^2 + 1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + z\right)^2 = 0$.

Xét hiệu hai bình phương suy ra $z = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}}}{2}$. Từ đó ta được nghiệm của

phương trình là $x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{\frac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}}}{2}\right)^4$.

Bài toán 4. Giải phương trình $x^2 - x - 1000\sqrt{1 + 8000x} = 1000$.

HD: Đặt $1 + \sqrt{1 + 8000x} = 2y$, ta được $\begin{cases} x^2 - x = 2000y \\ y^2 - y = 2000x \end{cases} \quad (*)$

Từ (*) suy ra $(x - y)(x + y + 1999) = 0$ và do $x + y + 1999 > 0$ suy ra $x = y$, ta được nghiệm $x = 2001$.

Bài toán 5. Giải các phương trình sau:

1. $\frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x^2 + 2} = \frac{2}{5}$

HD: Đặt $y = \sqrt{x + 1} \geq 0$, $z = \sqrt{x^2 - x + 1}$, ta được

$$5yz = 2(y^2 + z^2) \Leftrightarrow \frac{5y}{z} = 2\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow \frac{y}{z} = 2 \vee \frac{y}{z} = \frac{1}{2}.$$

Nếu $\frac{y}{z} = 2$ ta được $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Nếu $\frac{y}{z} = \frac{1}{2}$ ta được

$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

2. $2x^2 - 5x + 2 = 4\sqrt{2}(x^3 - 21x - 20)$

HD: Đk $\begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{cases}$ Đặt $\sqrt{2x^2 - 8x - 10} = y$ và $\sqrt{x+4} = z$, với $y \geq 0, z \geq$

0. Khi đó ta được $(y-z)(y-3z) = 0$. Từ đó phương trình có bốn nghiệm là $x = \frac{9 \pm \sqrt{193}}{4}$ và $x = \frac{17 \pm 3\sqrt{73}}{4}$.

Bài toán 6. Giải các phương trình sau:

1. $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$.

HD: Đặt $\sqrt{x+5} = y - 2$, ta được $x = -1, x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}$.

2. $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$, với $x \geq 1$.

HD: Đặt $\sqrt{\frac{x+3}{2}} = y + 1$, được $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} < 1$ (loại), nếu $x \geq -1$ thì $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.

3. $27x^2 + 18x = \sqrt{x + \frac{4}{3}}$, với $x > 0$.

HD: Tương tự, ta được $x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{18}$.

2.3 Phương pháp đánh giá

2.3.1 Một số lưu ý

Khi giải phương trình vô tỷ (chẳng hạn $f(x) = g(x)$) bằng phương pháp đánh giá, thường là để ta chỉ ra phương trình chỉ có một nghiệm (nghiệm duy nhất). Ta thường sử dụng các bất đẳng thức cổ điển Cô si, Bunhiacopxki, đưa về trái về tổng bình phương các biểu thức, đồng thời về phải bằng 0. Ta cũng có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số (có thể thấy ngay hoặc sử dụng đạo hàm xét sự biến thiên của hàm số) để đánh giá

một cách hợp lý.

Thường ta đánh giá như sau: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq C \ (\leq C) \\ g(x) \leq C \ (l\hbar C) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x) = C$, hoặc đánh giá $f(x) \geq g(x)$ hoặc $f(x) \leq g(x)$.

Ngoài ra đối với bài cụ thể nào đó ta sẽ có cách đánh giá khác.

Cũng có một số phương trình vô tỷ có nhiều hơn một ẩn mà ta giải bằng phương pháp đánh giá.

2.3.2 Một số ví dụ

Ví dụ 8. Giải phương trình: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$.

HD: Bài toán này có trong đề thi vào Đại học Bách Khoa và ĐHQG năm 2001. Bài này có nhiều cách giải, đáp án sử dụng đạo hàm.

Ta có thể làm đơn giản như sau: Ta thấy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì $VT > 1 = VP$.

Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì $VT < 1 = VP$.

Do đó phương trình không có nghiệm trong hai trường hợp này.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$.

HD: Bài này quá đơn giản, đánh giá $Vt \geq 5$ còn $Vp \leq 5$, do đó hai vế cùng bằng 5. Ta được phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Ví dụ 10. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2-x+19} + \sqrt{7x^2+8x+13} + \sqrt{13x^2+17x+7} = 3\sqrt{3}(x+2).$$

HD: Bài này cách giải có vẻ hơi mất tự nhiên bởi cách "cố ý" cho như vậy. Giáo viên và học sinh có thể sáng tác những bài kiểu đó.

Đk $x \geq -2$. Với điều kiện đó

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{75}{4}} + \sqrt{(2x - 1)^2 + 3(x + 2)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(2x - 1)^2 + \frac{3}{4}(4x + 3)^2} \\ &\geq \frac{75}{4} + \sqrt{3} |x + 2| + \frac{\sqrt{3}}{2} |4x + 3| \\ &\geq \frac{5}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}(x + 2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(4x + 3) \\ &\geq 3\sqrt{3}(x + 2) = VP \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 11. Giải phương trình: $2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}$.

HD: Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$2\sqrt[4]{\frac{(9x + 4)^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x + 4)}{2}}.$$

Đk: $x \geq -\frac{4}{9}$. Đặt $9x + 4 = y$, suy ra $y \geq 0$. Khi đó ta được:

$$2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 4\sqrt[4]{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \frac{3y}{2} + \sqrt{6y} \text{ (bình phương hai vế)}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta được $\sqrt{6y} \leq \frac{y + 6}{2}$, do đó

$$\begin{aligned} 4\sqrt[4]{\frac{y^2}{3} + 4} &\leq 2y + 4 \\ \Leftrightarrow 4y^2 + 48 &\leq 3y^2 + 12y + 12 \\ \Leftrightarrow (y - 6)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Từ đó ta được $y = 6$, suy ra $x = \frac{2}{9}$ thỏa mãn đk.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2}{9}$.

Ví dụ 12. Giải phương trình: $\frac{x - 3x^2}{2} + \sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3} = 2$.

HD: Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(2x^2 - x + 1)(x^2 + 3)} = \frac{3x^2 - x + 4}{2} = \frac{(2x^2 - x + 1) + (x^2 + 3)}{2} \quad (1)$$

Phương trình xác định với mọi x là số thực. Theo Bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta được $Vt(1) \leq Vp(1)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Ví dụ 13. Giải phương trình: $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - (x + \frac{1}{x})$

$$\text{HD: Đk} \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + (x + \frac{1}{x}) = 4.$$

Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$\begin{cases} (\sqrt{2-x^2} + x)^2 = (\sqrt{2-x^2} \cdot 1 + x \cdot 1)^2 \leq 4 \\ (\sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x})^2 = (\sqrt{2-\frac{1}{x^2}} \cdot 1 + \frac{1}{x} \cdot 1)^2 \leq 4 \end{cases}$$

Suy ra $Vt(1) \leq 4 = Vp(1)$. Do đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x^2} + x = 2 \\ \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 2 \end{cases}$, nghĩa là dấu bằng trong hệ xảy ra. Từ đó phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Ví dụ 14. Giải phương trình: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$.

HD: Đk $x \geq 0$. Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$VT^2 = (2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}})^2 \leq (x+9)(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}) = VP^2.$$

Phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra hay $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{7}$.

Ví dụ 15. Giải phương trình: $13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} = 16$.

HD: Đk $-1 \leq x \leq 1$.

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$$|x| (13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2}) = 16 \Leftrightarrow x^2(13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4})^2 = 256 \quad (1).$$

Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$\begin{aligned} (13\sqrt{1-x^2} + 9\sqrt{1+x^2})^2 &= (\sqrt{13}\sqrt{13}\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{1+x^2})^2 \\ &\leq (13+27)(13(1-x^2) + 3(1+x^2)) \\ &= 40(16-10x^2) \end{aligned}$$

Theo Bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương ta được

$$10x^2(16-10x^2) \leq \left(\frac{10x^2 + (16-10x^2)}{2}\right)^2 = 64.$$

Do đó $Vt(1) \leq 4.64 = 256$, ta được

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3} \\ 10x^2 = 16-10x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-9x^2 = 1+x^2 \\ 20x^2 = 16 \end{cases}$$

. Từ đó dẫn đến $x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 16. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2-2} = \sqrt{2-x^3}$.

Nhận xét 4. Trong phần giải phương trình vô tỷ bằng Phương pháp đặt ẩn phụ ta đã giải bài toán này, ta cũng có thể giải nó bằng phương pháp đánh giá như sau.

HD: Đk $2-x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{2}$.

Giả sử x là nghiệm của phương trình. Khi đó $x^2-2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$, ta được $x \leq -\sqrt{2}$. Mũ 6 hai vế suy ra $x^9-6x^6+x^4+12x^3-4x^2-4=0(*)$.

Cách thứ nhất ta biến đổi Vt thành $x^9-5x^6+x^2(x^4-x^2+1)+12x^3-3x^2-4$ là một biểu thức âm khi $x \leq -\sqrt{2}$.

Cách thứ hai ta biến đổi Vt thành $x^9-x^4(6x^2-1)+12x^3-4x^2-4$ cũng là một biểu

thức âm khi $x \leq -\sqrt{2}$.

Ta có thể biến đổi tiếp phương trình (*) sau khi chia hai vế cho $x - 1 \neq 0$, ta được

$$\begin{aligned} x^8 + x^7 + x^6 - 5x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^6(x^2 + x + 1) - 5x^4(x + 1) - 4x(x^2 - 1) + 4(2x^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

vô nghiệm vì Vt luôn dương khi $x \leq -\sqrt{2}$. Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 17. Giải phương trình:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

HD: Biến đổi phương trình thành $(\sqrt{x+6} + \sqrt{x+2})(\sqrt{2x-1} - 3) = 0$, suy ra $x \geq 5$.
Vt là hàm số đồng biến trên đoạn $[5; +\infty)$. Từ đó dẫn đến $x = 7$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 18. Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 21 - \sqrt[3]{4x-4} = 0$.

HD: Phương trình tương đương với

$$(x-3)(2x-5) = \frac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2} + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4}.$$

Ta thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $x \neq 3$ thì phương trình tương đương với

$$2x - 5 = \frac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2} + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4}. \quad (1)$$

Nếu $x > 3$ thì $Vt(1) > 1 > Vp(1)$.

Nếu $x < 3$ thì $Vt(1) < 1 < Vp(1)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Ví dụ 19. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+6}$.

Nhận xét 5. Với bài toán này ta sử dụng một đánh giá ít gặp sau đây:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x) + a.h(x)} + \sqrt{g(x) + b.h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, & g(x) \geq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

với a, b là hai số thực dương.

HD: Biến đổi phương trình

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x+2} &= \sqrt{2x^2-1+2(x+2)} + \sqrt{x^2-3x+2+2(x+2)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-1 \geq 0, & x^2-3x+2 \geq 0 \\ x+2 = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $x = -2$.

Ví dụ 20. Giải phương trình:

$$\frac{16}{\sqrt{x-1996}} + \frac{1}{\sqrt{x-2008}} = 10 - \sqrt{x-1996} + \sqrt{y-2008}$$

Nhận xét 6. Với bài toán này, ta thấy đây là một phương trình gồm hai ẩn. Do đó ta nghĩ đến biến đổi phương trình thành phương trình mới có Vt là tổng các bình phương, còn Vp bằng 0.

HD: Biến đổi phương trình thành

$$\left(\sqrt[4]{x-1996} - \frac{4}{\sqrt[4]{x-1996}}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{y-2008} - \frac{4}{\sqrt[4]{y-2008}}\right)^2 = 0$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2012; 2009)$.

Ví dụ 21. Giải phương trình: $x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} = \frac{3}{2}$.

HD: Đk $x \geq 1, y \geq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}x\sqrt{y-1} + 2y\sqrt{x-1} &= -y(x-2\sqrt{x-1}) - \frac{1}{2}x(y-2\sqrt{y-1}) + \frac{3}{2}xy \\ &= -y(\sqrt{x-1}-1)^2 - \frac{1}{2}x(\sqrt{y-1}-1)^2 + \frac{3}{2}xy\end{aligned}$$

Khi đó phương trình đó cho tương đương với

$$\begin{cases} x \geq 1, & y \geq 1 \\ y(\sqrt{x-1}-1)^2 + \frac{1}{2}x(\sqrt{y-1}-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; 2)$.

2.3.3 Một số bài tập tương tự

Chú ý: Chuyên đề còn tiếp tục hoàn thiện.

2.4 Phương pháp lượng giác

2.4.1 Một số lưu ý

Khi giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp lượng giác ta có thể đặt $f(x) = \sin \alpha$ nếu $f(x) \in [-1; 1]$ với điều kiện $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $f(x) = \cos \alpha$ với điều kiện $\alpha \in [0; \pi]$. Cũng có khi đặt $f(x) = \tan \alpha$, $f(x) = \cot \alpha$ để đưa phương trình đó về phương trình lượng giác. Giải phương trình lượng giác rồi từ đó tìm nghiệm của phương trình đã cho.

2.4.2 Một số ví dụ

Ví dụ 22. Giải phương trình: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$.

Nhận xét 7. Bài toán này (đã xét ở trên) cũng có thể giải bằng phương pháp lượng giác, tuy nhiên với bài này cách giải bằng lượng giác chỉ mang tính chất tham khảo.

HD: Đặt

$$\begin{cases} \sqrt[4]{4x-1} = \cos y \\ \sqrt[4]{4x^2-1} = \sin y \end{cases}, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Khi đó ta được phương trình

$$\begin{aligned} \cos^8 y - 2\cos^4 y + 8\cos^2 - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos y - 1)(\dots) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos y &= 1 \end{aligned}$$

Do vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 23. Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$.

HD: Đặt $x = \cos y$, $y \in (0; \pi)$, $y \neq \frac{\pi}{2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\sqrt{\sin y}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin y + \cos y = \sqrt{2} \sin 2y.$$

Đặt $\sin y + \cos y = z$, $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$ suy ra $\sin 2y = z^2 - 1$, ta được $z = \sqrt{2}$ và $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Với $z = \sqrt{2}$ thì $y = \frac{\pi}{4}$, do đó $x = \frac{2}{2}$.

Với $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y = \frac{11\pi}{12}$, do đó $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{2}{2}$

và $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Ví dụ 24. Giải phương trình: $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

HD: Đk $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ suy ra $\cos y \geq 0$.

Khi đó phương trình trở thành $\sin^3 y + \cos^3 y = \sqrt{2} \sin y \cos y$. Đặt $\sin y + \cos y = z$, $z \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ (chính xác là $z \in [-1; \sqrt{2}]$), biến đổi phương trình ta được

$$\begin{aligned} z^3 + \sqrt{2}z^2 - 3z - \sqrt{2} &= 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{2})(z + \sqrt{2} - 1)(z + \sqrt{2} + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \vee z = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Nếu $z = \sqrt{2}$ thì $y = \frac{\pi}{4}$, do đó $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nếu $z = 1 - \sqrt{2}$ thì $\sin y + \cos y = 1 - z = 1 - \sqrt{2}$, do đó

$$x + \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trên.

2.4.3 Một số bài tập tương tự

Bài toán 7. Giải phương trình: $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$.

(HD: Đặt $x = \cos y$, phương trình có tập nghiệm là

$$S = \left\{ \cos \frac{\pi}{8}; \cos \frac{5\pi}{8}; \cos \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Bài toán 8. Giải phương trình: $5 + 3\sqrt{1-x^2} = 8(x^6 + (1-x^2)^3)$.

Bài toán 9. Giải phương trình: $x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$.

Bài toán 10. Giải phương trình: $(\sqrt{3} - 2x)\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}x - 2x^2$.

Bài toán 11. Giải phương trình: $\frac{x(1 + x^2)}{1 - x^2} = 3\sqrt{1 - x^2}$.

Bài toán 12. Giải phương trình: $\frac{(1 + x^2)^3}{6x^5 - 20x^3 + 6x} = \sqrt{1 + x^2}$.

Bài toán 13. Giải phương trình: $2x^2 + \sqrt{1 - x} + 2x\sqrt{1 - x^2} = 1$

2.5 Một số phương pháp khác

2.5.1 Một số lưu ý

Ngoài những phương pháp thường gặp ở trên, đôi khi ta cũng có những lời giải khác lạ đối với một số phương trình vô tỷ. Cũng có thể ta sử dụng kết hợp các phương pháp ở trên để giải một phương trình.

2.5.2 Một số ví dụ

Ví dụ 25. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3\sqrt{2}x + 9}\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}x + 16} = 5$.

HD: Nếu $x \leq 0$ thì $Vt \geq 3 + 4 = 7 > 5 = Vp$ (phương trình không có nghiệm).

Nếu $x > 0$ thì ta xét tam giác vuông ABC với $A = 90^\circ$, $AB = 4$; $AC = 3$.

Gọi AD là phân giác của góc A , lấy M thuộc tia AD . Đặt $AM = x$, xét $\triangle ACM$ có $x^2 - 3\sqrt{2}x + 9$ và xét $\triangle ABM$ có $BM^2 = x^2 - 4\sqrt{2}x + 16$.

Từ đó suy ra $Vt = CM + BM \geq BC = 5$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $M \equiv D$, hay

$$\begin{aligned} \frac{CM}{BM} &= \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16CM^2 = 9BM^2 \\ \Leftrightarrow 16(x^2 - 3\sqrt{2}x + 9) &= 9(x^2 - 4\sqrt{2}x + 16) \Leftrightarrow 7x - 12\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{2}}{7}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.

Ví dụ 26. Giải phương trình:

$$\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2y - 3} = 5 - y + \sqrt[4]{x^4 - 16}.$$

Nhận xét 8. Bài toán này không khó, chỉ kiểm tra tính cẩn thận của học sinh mà thôi vì sau khi đặt điều kiện đã tìm được giá trị của x . Tuy nhiên nếu học sinh học hời hợt sẽ ngồi nhìn mà không làm được bài.

HD: Đặt điều kiện cho phương trình xác định ta sẽ được $|x = 2|$. Khi đó phương trình trở thành $|y - 1| = 2 - y$, suy ra $y = \frac{3}{2}$. Vậy phương trình có một nghiệm là $(x; y) = (2; \frac{3}{2})$.

Ví dụ 27. Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x+1} = 2$.

HD: Đặt $y = \sqrt[3]{7x+1}$; $-z = \sqrt[3]{x^2-x-8}$; $t = \sqrt[3]{x^2-8x+1}$, suy ra

$$\begin{cases} y + z + t = 2 \\ y^3 + z^3 + t^3 = 8 \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác $(y + z + t)^3 = 8(2)$.

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} (y + z + t)^3 - (y^3 + z^3 + t^3) &= 3(x + y)(y + z)(z + t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ t + y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z(3) \\ z = -t(4) \\ t = -y(5) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét (3) ta được $x = -1 \vee x = 9$, xét (4) được $x = 1$ và (5) được $x = 0 \vee x = 1$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-1; 0; 1; 9\}$.

Ví dụ 28. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-4x+20} + \sqrt{x^2+4x+29} = \sqrt{97}$.

HD: Trong mặt phẳng tọa độ xét hai véc tơ $\vec{a} = (x-2; 4)$, $\vec{b} = (-x-2; 5)$. Khi đó ta được $\vec{a} + \vec{b} = (-4; 5)$, suy ra $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{97}$ và ta cũng có $|\vec{a}| = \sqrt{x^2-4x+20}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x^2+4x+29}$. Phương trình trở thành $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, đẳng thức đó xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{-x-2}{5}$. Từ đó ta được phương trình có một nghiệm là $x = \frac{2}{9}$.

Ví dụ 29. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = 2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$

HD: Đặt $y = \sqrt{2x - x^2} \sqrt{1 - (x - 1)^2}$, suy ra $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ (x - 1)^2 = 1 - y^2 \end{cases}$.
 Ta được $\sqrt{1 + y} + \sqrt{1 - y} = 2(1 - y^2)^2(1 - 2y^2)$ (1).
 Mặt khác $\sqrt{1 + y} + \sqrt{1 - y} \geq 1 + \sqrt{1 - y^2} \geq 2 - y^2$ (2).
 Từ (1) và (2), suy ra $2(1 - y^2)^2(1 - 2y^2) \geq 2 - y^2$. Đặt $z = y^2$, ta được $0 \leq z \leq 1$ và $2(1 - z)^2(1 - 2z) \geq 2 - z \Leftrightarrow z(4z^2 - 10z + 7) \leq 0 \Leftrightarrow z \leq 0$ (do $4z^2 - 10z + 7 > 0$).
 Do đó $z = 0$, suy ra $y = 0$ hay $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ và $x = 2$.

3 Một số bài toán thi lập đội tuyển học sinh giỏi tỉnh Bắc Giang

Chọn đội tuyển của tỉnh Bắc Giang thi học sinh giỏi quốc gia cũng có những bài toán giải phương trình vô tỷ. Sau đây là một số bài.

4 Một số bài toán thi học sinh giỏi của một số quốc gia

Thực tế bài toán giải phương trình vô tỷ trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia là không khó. Tuy nhiên để làm được việc lớn thì trước hết phải làm tốt việc nhỏ, do đó học sinh muốn đoạt giải từ khuyến khích trở lên phải làm tốt bài toán này. Dù biết vậy nhưng không phải học sinh xuất sắc nào cũng vượt qua được.

Bài toán 14 (Lập đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Bắc Giang năm học 2004 - 2005). Giải phương trình: $x\sqrt[3]{x - 2} - 11\sqrt[3]{-x^2 + 4x - 4} + 14 = 5x + 13\sqrt[3]{x - 2}$.

Bài toán 15 (Kiểm tra đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Bắc Giang năm học 2004 - 2005). Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2 + 2} - \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 2x^3 - x^2 - 3x - 1$.

Bài toán 16 (Lập tiền đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Bắc Giang năm học 2006 - 2007). Giải phương trình: $\sqrt[4]{x + 8} + \sqrt{x + 4} = \sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x}$.

Bài toán 17 (Dự tuyển toán QG gửi Bộ GD-ĐT của Bắc Giang năm học 2006 - 2007). Giải phương trình: $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2}$.

Bài toán 18 (Kiểm tra đội tuyển HSG quốc gia tỉnh Bắc Giang năm học 2007 - 2008).

Giải phương trình: $\sqrt{\frac{2007 - 2008x}{x}} = \frac{x^2 + 2009x}{x^2 + 2007}$.

Bài toán 19 (Giáo sư dạy đội tuyển toán tỉnh Bắc Giang năm học 2004 - 2005). Giải phương trình:

$$1. x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1-x^2}.$$

$$2. \sqrt{x} + \sqrt[3]{x+7} = \sqrt[4]{x+80}.$$

$$3. \sqrt[3]{x} + 1 = 2(2x - 1)^3.$$

$$4. 8x^2 + \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}.$$

$$5. \sqrt[4]{x} = \frac{3}{8} + 2x.$$

$$6. x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}.$$

5 Một số bài toán thi học sinh giỏi của một số quốc gia

Thực tế bài toán giải phương trình vô tỷ trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia là không khó. Tuy nhiên để làm được việc lớn thì trước hết phải làm tốt việc nhỏ, do đó học sinh muốn đoạt giải từ khuyến khích trở lên phải làm tốt bài toán này. Dù biết vậy nhưng không phải học sinh xuất sắc nào cũng vượt qua được.

Bài toán 20 (1995 - Bảng A.VMO). Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x+4} = 0$.

HD: Đk $x \geq -1$.

Khi đó xét $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 40$ và $g(x) = 8\sqrt[4]{4x+4}$ trên đoạn $[-1; +\infty)$.

Ta được $f(x) = g(x)$, áp dụng Bất đẳng thức AM-GM cho bốn số không âm, ta được

$$g(x) = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot (4x+4)} \leq \frac{1}{4}(2^4 + 2^4 + 2^4 + (4x+4)) = x + 13 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2^4 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = 3$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 8x + 40 &\geq x + 13 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 9) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2(x + 3) \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Từ (1) và (2), ta được $g(x) \leq x + 13 \leq f(x)$. Cả hai đẳng thức đều xảy ra khi $x = 3$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Nhận xét 9. Ta có thể sử dụng đạo hàm để xét sự biến thiên của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên đoạn $[-1; +\infty)$, ta được $\min_{[-1; +\infty)} f(x) = f(3) = 13$ và $\max_{[-1; +\infty)} g(x) = g(3) = 13$. Hoặc ta có thể đặt $\sqrt[4]{4x + 4} = y$, với $y \geq 0$ sau đó dùng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(y) = y^{12} - 24y^8 + 16y^4 - 512y + 2816$ ($f'(y) = 2(y - 2)h(y)$ với $h(y) > 0$).

Bài toán 21 (1995 - Bảng B.VMO). Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x - 4} = 0$.

HD: Đặt $\sqrt[3]{4x - 4} = y$.

Khi đó $x = \frac{y^3 + 4}{4}$ và suy ra $x^2 = \frac{y^6 + 8y^3 + 16}{16}$. Từ đó ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(y^6 + 8y^3 + 16) - \frac{11}{4}(y^3 + 4) - 3y - 21 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^6 - 14y^3 - 24y + 96 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)^2(y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 18y + 14) = 0. \quad (2)$$

Do $y \leq 0$ thì Vt(1) dương, do đó ta xét $y > 0$, khi đó $y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 18y + 14 > 0$.

Nên từ (2) ta thấy $y = 2$ hay $\sqrt[3]{4x - 4} = 2$, ta được $x = 3$. Thử lại đúng.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Bài toán 22 (2002 - Bảng A.VMO). Giải phương trình: $\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2$.

HD: Cách 1 (Đáp án)

Đk $\frac{74}{27} \leq x \leq \frac{10}{3}$. Với điều kiện đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\begin{aligned} 4 - 3\sqrt{10 - 3x} = x^2 - 4x + 4 &\Leftrightarrow 9(10 - 3x) = x^2(4 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 29 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2)(x^2 - 7x + 15) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ (do điều kiện và } x^2 - 7x + 15 > 0). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$. Cách 2: Đặt $\sqrt{10 - 3x} = y$, suy ra $0 \leq y \leq \frac{4}{3}$ (1) và $x = \frac{10 - y^2}{3} \Rightarrow x - 2 = \frac{4 - y^2}{3} > 0$ với mọi y thỏa mãn (1). Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - 3y} = \frac{4 - y^2}{3} &\Leftrightarrow 4 - 3y = \frac{y^4 - 8y^2 + 16}{9} \\ &\Leftrightarrow y^4 - 8y^3 + 27y - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 1)(y + 4)(y^2 - 3y + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 1. \end{aligned}$$

Hay ta được $\sqrt{10 - 3x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Bài toán 23 (1998 - CMO). Giải phương trình: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

Nhận xét 10. Đây là bài toán thi học sinh giỏi của Canada, có thể nói là đơn giản, nhẹ nhàng với học sinh tinh ý nhưng cũng đầy cạm bẫy với mọi học sinh.

Thật vậy, từ điều kiện xác định của phương trình ta phải dẫn đến được $x > 1$. Với điều kiện đó, phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} &= \sqrt{x - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x - \frac{1}{x}}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1) - 2\sqrt{x(x^2 - 1)} + x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x} = 0. \text{ Từ đó suy ra } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Cũng có thể từ $(x^2 - 1) - 2\sqrt{x(x^2 - 1)} + x = 0$, chuyển $\sqrt{x(x^2 - 1)}$ sang vế phải rồi bình phương hai vế, sau đó đặt $x - \frac{1}{2} = y$ ta được phương trình trùng phương ẩn $y > \frac{1}{2}$,

giải phương trình này tìm được $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Từ đó suy ra $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ nhưng cách này hơi dài.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Chú ý: Chuyên đề còn tiếp tục hoàn thiện.

6 Một số bài tập áp dụng

Sau đây là một số bài tập áp dụng trực tiếp mà chúng ta có thể sử dụng các phương pháp ở trên.

Bài toán 24. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$;
2. $\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + \sqrt{1 - x^2})$;
3. $\sqrt{\frac{1 - x}{x}} = \frac{2x + x^2}{1 + x^2}$;
4. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = 2x^2 - 5x - 1$;
5. $\sqrt[3]{3x^2 - x + 2001} - \sqrt[3]{3x^2 - 7x + 2002} - \sqrt[3]{6x - 2003} = \sqrt[3]{2002}$.

Bài toán 25. Giải các phương trình sau:

1. $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2}$;
2. $\sqrt{\frac{42}{5 - x}} + \sqrt{\frac{60}{7 - x}} = 6$;
3. $(x - 2)\sqrt{x - 1} - \sqrt{2x} + 2 = 0$;
4. $\sqrt[3]{3x + 1} + \sqrt[3]{5 - x} + \sqrt[3]{2x - 9} - \sqrt[3]{4x - 3} = 0$;
5. $4x^2 - 4x - 10 = \sqrt{8x^2 - 6x - 10}$.

Bài toán 26. Giải các phương trình sau:

1. $x = (2004 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})$;

2. $\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x};$
3. $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - 5}}}} = 5;$
4. $16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x};$
5. $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0.$

Bài toán 27. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1;$
2. $2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6};$
3. $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x;$
4. $\sqrt[3]{x+86} - \sqrt[3]{x-5} = 1;$
5. $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 = 0.$

Bài toán 28. Giải các phương trình sau:

1. $\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} + \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{x}}} = \sqrt{2};$
2. $2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2 + 16};$
3. $2x^2 - 5x + 2 = 4\sqrt{2(x^3 - 21x - 20)};$
4. $x^3 - 3x = \sqrt{x+2};$
5. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^3 + x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

Bài toán 29. Giải các phương trình sau:

1. $x^3 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} = 6;$
2. $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}};$
3. $\sqrt{2x^2 + 4x + 7} = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 7;$

$$4. \sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{x^2+x-1} + \sqrt[6]{1-x} = 1;$$

$$5. \sqrt{1-x^2} = \left(\frac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2$$

Bài toán 30. Giải phương trình

$$1. 3(\sqrt{2x^2+1} - 1) = x(1 + 3x + 8\sqrt{2x^2+1});$$

$$2. 2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1};$$

$$3. 64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2 + \sqrt{1-x^2};$$

$$4. \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}) = 2 + \sqrt{1-x^2};$$

$$5. \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-x^3}{3}}.$$

Bài toán 31. Giải các phương trình sau:

$$1. x^3 - 6\sqrt[3]{6x+4} - 4 = 0;$$

$$2. 2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8};$$

$$3. \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1};$$

$$4. \sqrt{x^2+15} = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2+8} - 2;$$

$$5. \sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2(1-x)}.$$

Bài toán 32. Giải các phương trình sau:

$$1. x^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3x-1};$$

$$2. x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12};$$

$$3. 2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 0;$$

$$4. x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + \sqrt{x^2+2x+10} = 2;$$

Bài toán 33. Giải các phương trình sau:

1. $x + \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} = 1;$
2. $(x-1)\sqrt{x-1} + 5\sqrt{x-1} + 4x - 4 = 0;$
3. $10x^4 - 14x^2 + 19 = (5x^2 - 38)\sqrt{x^2 - 2};$
4. $(x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1;$
5. $\sqrt{\frac{1}{2} - x\sqrt{1-x^2}} = 1 - 2x^2.$

Bài toán 34. Giải phương trình

1. $\frac{1+3\sqrt{x}}{4x+\sqrt{2+x}} - 1 = 0;$
2. $x^3 - 3x - \sqrt{x+2} = 0;$
3. $8x^3 - 4x - \sqrt[3]{6x+1} - 1 = 0;$
4. $x^2 + (3 - \sqrt{x+2})x - 2\sqrt{x^2+2} - 1 = 0;$
5. $3x + \sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+12} - 5 = 0.$

Bài toán 35. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{2}(x^2+8) = 5\sqrt{x^3+8};$
2. $4x - x^2 = 3\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}};$
3. $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)} = 28-x;$
4. $2\sqrt{x+1} + 6\sqrt{9-x^2} + 6\sqrt{(x+1)(9-x^2)} = 38 + 10x - 2x^2 - x^3;$

Bài toán 36. Giải phương trình

1. $\sqrt{-4x^4y^2 + 16x^2y + 9} - \sqrt{x^2y^2 - 2y^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right);$
2. $2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}}}}} = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

Trong đó biểu thức vế trái có tất cả 2008 dấu căn thức bậc hai.

Tài liệu

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 1993, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, 2002, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo Dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Ngọc, 2009, *Đa thức đối xứng và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến, 2009, *Một số chuyên đề đại số bồi dưỡng học sinh giỏi phổ thông* NXB Giáo Dục.