# Mục lục


**1 Sử dụng nguyên lý quy nạp. 3**

1.1 Lý thuyết. . . . . . . . . . 3

1.2 Một vài ví dụ minh họa. . . . . . . . . . 3

1.3 Bài tập áp dụng. . . . . . . . . . 10

**2 Ứng dụng bài toán dãy số vào giải phương trình hàm. 11**

2.1 Lý thuyết. . . . . . . . . . 11

2.2 Một vài ví dụ minh họa. . . . . . . . . . 11

2.3 Bài tập áp dụng. . . . . . . . . . 14

**3 Sử dụng đánh giá bất đẳng thức. 15**

3.1 Lý thuyết. . . . . . . . . . 15

3.2 Một vài ví dụ minh họa. . . . . . . . . . 15

3.3 Bài tập áp dụng. . . . . . . . . . 19

**4 Sử dụng nguyên lý cực hạn. 21**

4.1 Lý thuyết. . . . . . . . . . 21

4.2 Một vài ví dụ minh họa. . . . . . . . . . 21

4.3 Bài tập áp dụng. . . . . . . . . . 24

**5 Hàm số sử dụng tính chất số học. 25**

5.1 Lý thuyết. . . . . . . . . . 25

5.2 Một vài ví dụ minh họa. . . . . . . . . . 25

5.3 Bài tập áp dụng. . . . . . . . . . 35

**6 Hàm số và hệ đếm cơ số. 39**

6.1 Lý thuyết. . . . . . . . . . 39

6.2 Một vài ví dụ minh họa. . . . . . . . . . 39

6.3 Bài tập áp dụng. . . . . . . . . . 43

**7 Ý tưởng liên kết hàm số và các bài toán rời rạc. 46**

7.1 Lý thuyết. . . . . . . . . . 46

7.2 Một vài ví dụ minh họa. . . . . . . . . . 46

**8 Một số bài toán chưa có lời giải. 48**

# 1 Sử dụng nguyên lý quy nạp.

## 1.1 Lý thuyết.

Phương pháp quy nạp không hề xa lạ trong môn toán, nó là công cụ thực sự hiệu quả để giải các bài toán xác định trên tập số nguyên. ( Tất nhiên vẫn có quy nạp trên tập số thực, quy nạp hình học, nhưng ta chỉ xét đến những dạng quen thuộc của phương pháp quy nạp mà thôi ). Điều quan trọng là việc thiết lập giá trị hàm số tại các điểm lớn hơn về các điểm đã biết giá trị hàm số ( theo giả thiết quy nạp ), cụ thể ta cần để ý đến những đẳng thức truy hồi đã biết.

## 1.2 Một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** ( **Việt Nam TST 2005** ). *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *thỏa mãn:*

$$f(x^3 + y^3 + z^3) = f(x)^3 + f(y)^3 + f(z)^3$$

Giải: Kí hiệu $P(x, y, z)$ là cách cho bộ $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ vào phương trình.

$\star$ $P(0, 0, 0) \Rightarrow f(0) = 0$

$\star$ $P(x, -x, 0) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

$\star$ $P(1, 1, 0) \Rightarrow f(2) = 2f(1)$

$\star$ $P(1, 1, 1) \Rightarrow f(3) = 3f(1)$

Ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề sau $f(n) = nf(1), \forall n \in \mathbb{Z}$.

$\star$ Với $n = 1$ hiển nhiên đúng .

$\star$ Giả sử với $n = k \geq 0$ đúng, ta chứng minh với $n = k + 1$ cũng đúng. Với $k = 2t$, sử dụng đẳng thức:

$$(2t + 1)^3 + 5^3 + 1^3 = (2t - 1)^3 + (t + 4)^3 + (4 - t)^3$$

và khi $k = 2t - 1$ thì

$$(2t)^3 = (2^j)^3.(2i + 1)^3, 2i + 1 < 2t, j \in \mathbb{N}$$

Ta có:

$$f(2t + 1)^3 + f(5)^3 + f(1)^3 = f((2t + 1)^3 + 5^3 + 1^3)$$
$$= f(2t - 1)^3 + (t + 4)^3 + (4 - t)^3) = f(2t - 1)^3 + f(t + 4)^3 + f(4 - t)^3$$

( Do $f$ lẻ nên $f(4-t) = -f(t-4) = -(t-4)f(1)$ ).
Hay :

$$f(2t+1) = (2t+1)f(1).$$

Tương tự cho $f(2t) = 2tf(1)$. Vì thế ta có với mọi $n \in \mathbb{Z}$ thì $f(n) = nf(1)$. Thay vào phương trình ta nhận được 3 nghiệm: $f(x) = 0, f(x) = x, f(x) = -x$.

Sau đây là ví dụ tương tự nhưng cho 2 biến:

$\nabla$

**Ví dụ 2.** *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thoả mãn các điều kiện:*

*1, $f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.*

*2, $f(1) > 0$.*

GIẢI: Cho $m = n = 0$ vào phương trình hàm, ta được $f(0) = 2f^2(0)$. Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ đây suy ra $f(0) = \dfrac{1}{2}$, điều này mâu thuẫn vì $f$ nhận các giá trị trong $\mathbb{N}$. Vậy $f(0) = 0$ và điều này dẫn đến $f(m^2) = f^2(m)$. Ta có thể viết a) dưới dạng

$$f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n) = f(m^2) + f(n^2)$$

Ta cũng chú ý rằng $f(1) = f(1^2) = f^2(1)$. Vì $f(1) > 0$ nên $f(1) = 1$. Từ đây suy ra:

$$f(2) = f(1^2 + 1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2$$

$$f(4) = f(2^2) = f^2(2) = 4$$

$$f(5) = f(2^2 + 1^2) = f^2(2) + f^2(1) = 5$$

$$f(8) = f(2^2 + 2^2) = f^2(2) + f^2(2) = 8$$

Hơn nữa, ta thấy rằng

$$25 = f^2(5) = f(5^2) = f(3^2 + 4^2) = f^2(3) + f^2(4) = f^2(3) + 16$$

Từ đó suy ra $f(3) = 3$. Từ đây ta lại có:

$$f(9) = f(3^2) = f^2(3) = 9$$

$$f(10) = f(3^2 + 1^2) = f^2(3) + f^2(1) = 10$$

Sử dụng đẳng thức $7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$, và đã biết $f(5) = 5$, $f(1) = 1$, ta có thể tính được $f(7) = 7$. Cuối cùng, ta sử dụng đẳng thức $10^2 = 6^2 + 8^2$ để thu được $f(6) = 6$.

Như vậy ta có $f(n) = n$ với mọi $n \leq 10$. Ta sử dụng các hằng đẳng thức sau:

$$(5k+1)^2 + 2^2 = (4k+2)2 + (3k-1)^2$$
$$(5k+2)^2 + 1^2 = (4k+1)^2 + (3k+2)^2$$
$$(5k+3)^2 + 1^2 = (4k+3)^2 + (3k+1)^2$$
$$(5k+4)^2 + 2^2 = (4k+2)^2 + (3k+4)^2$$

Và :

$$(5k+5)^2 = (4k+4)^2 + (3k+3)^2.$$

Sử dụng quy nạp như ví dụ trên ta có ngay $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ngay sau đây là một bài toán với ý tưởng khác.

$\nabla$

**Ví dụ 3.** *Cho* $f(n) \in \mathbb{N}$ , $\forall x \in \mathbb{N}$ *và:*

*1,* $f(1) = 1, f(2) = 2$.

*2,*$f(n+2) = f(n+2-f(n+1)) + f(n+1-f(n))$ , $\forall x \in \mathbb{N}$.

*a, Chứng minh* $0 \leq f(n+1-f(n) \leq 1$ *và nếu* $n$ *lẻ thì* $f(n+1) = f(n)+1$.

*b, Tìm mọi* $n$ *sao cho* $f(n) = 2^{10}+1$.

Giải: Ta có với $\forall k = 2, 3, \ldots,$ và $i = 1, \ldots, k$ , $j = 1, \ldots, 2^{k-1} - k$ ta có $f(2^k - i) = 2^{k-1}$ và $f(2^k - k - j) = 2^{k-1} - f(j)$.

Chứng minh: Quy nạp theo $n$.

$\star$ Với $k = 2, 3$ ,$n \leq 7$ kiểm tra trực tiếp ta thấy thỏa mãn.

$\star$ Xét với $n > 7, k > 3$ , khi đó:

$$f(2^k - i) = f(2^k - i - f(2^k - i - 1)) + f(2^k - i - 1 - f(2^k - i - 2))$$

**Trường hợp 1:** Khi $i \leq k-2$ Theo giả thiết quy nạp :

$f(2^k - i) = f(2^k - i - 2^{k-1}) + f(2^k - i - 1 - 2^{k-1}) = f(2^{k-1} - i) + f(2^{k-1} - i - 1) = 2^{k-2} + 2^{k-2} = 2^{k-1}$

**Trường hợp 2:** Khi $i = k-1$, ta có :

$$f(2^k - i) = f(2^k - k + 1 - 2^{k-1}) + f(2^k - k - 2^{k-1} + 1) = 2^{k-1}$$

**Trường hợp 3:** Khi $i = k$, ta xác định

$$f(2^k - i) = f(2^k - k - 2^{k-1} + 1)) + f(2^k - k - 1 - 2^{k-1} + 2) = 2^{k-1}$$

Tương tự cho trường hợp tính $f(2^k - i - j)$.

Ta kết thúc lời giải cho câu *1,*.

Mặt khác với $k \geq 2$:

$$f(2^k) = f(2^{k+1} - (k+1) - (2^k - (k+1))) = 2^k - f(2^k - k - 1)$$
$$= 2^k - (2^{k-1} - f(1)) = 2^{k-1} + 1$$

Từ $f(2^k - 1) = 2^{k-1}$ là mọi nghiệm của phương trình $f(n) = 2^{10} + 1$ ta phải có $n \geq 2^{11}$ theo *a,*.

Và với $k \geq 3$ ta tính:

$$f(2^k + 1) = f(2^{k+1} - (k+1) - (2^k - (k+2))) = 2^k - f(2^k - (k+2)$$
$$= 2^k - (2^{k-1} - f(2)) = 2^{k-1} + 2$$

Do đó $n = 2^{11}$ là giá trị duy nhất thỏa mãn.

$\nabla$

**Ví dụ 4.** ( **IMO 1982, bài 1** ).*Cho* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thoả mãn với* $m, n \in \mathbb{N}$ *thì :*

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \textit{ hoặc } 1,\ f(2) = 0,\ f(3) > 0, \quad \textit{và } f(9999) = 3333.$$

*Tính* $f(1982)$.

Giải: Ta chứng minh bằng quy nạp rằng:

$$f(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \ \text{ với } \ n \leq 9999$$

Trước tiên dễ dàng chứng minh $f(3) = 1$. Quy nạp lên, ta có $f(3n) \geq n$. Với $f(3n+3) = f(3) + f(3n) + a$ (trong đó $a \in \{0, 1\}$) $= f(3n) + b$ (trong đó $b \in \{1, 2\}$). Mặt khác nếu $f(3n) > n$ thì ta cũng có $f(3m) > m, \ \forall m > n$. Nhưng $f(3.3333) = 3333$, do đó $f(3n) = n$ với mọi $n \leq 3333$.

Bây giờ ta có

$$f(3n+1) = f(3n) + f(1) + a = n + a$$

Nhưng

$$3n + 1 = f(9n+3)f(6n+2) + f(3n+1)3f(3n+1)$$

suy ra $f(3n+1) < n+1$. Hay $f(3n+1) = n$. Tương tự, $f(3n+2) = n$. Do đó $f(1982) = 660$.

$\nabla$

**Ví dụ 5.** ( **Iran 1995** ).*Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ *thoả mãn với* $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*:*

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Giải:Ta sẽ chứng minh rằng $f(x) = c$ với $x \in \mathbb{N}$. Đặt $f(1) = c$.

Cho $x = 1, y = 2$ ta có $f(2) = f(1) = c$.

Cho $x = y = 3$,khi đó $f(3) = f(2) = c$.

Bây giờ ta chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $x > 1$ thì $f(x) = c$.

Ta có $f(1) = f(2) = f(3) = c$. Giả sử rằng với mọi $1 \leq x \leq n$ (ở đây $n \geq 3$) ta có $f(x) = c$. Gọi $t$ là số tự nhiên thuộc đoạn $[1; n]$ sao cho $(n+1) + t$ là bội 3. Khi đó

$$f(\frac{n+1+t}{3}) = \frac{f(n+1)+f(t)}{2}$$

Vì $t \leq n$ và $\dfrac{n+1+t}{3} \leq n$ ta có $f(n+1) = c$ có nghĩa là:

$$f(x) = c$$

với mọi $x \geq 1$.

Xét $k$ là một số âm. Khi đó tồn tại $l > 0$ sao cho $l + k > 0$ và $l + k$ là bội của 3. Cho $x = l, y = k$ vào phương trình ban đầu, ta được $f(k) = c$.

Vậy ta có $f(x) = c$ với hằng số $c \in \mathbb{Q}$.

Để kết thúc ta xét một ví dụ kinh điển sau, trong đó phép quy nạp chứng minh trực tiếp giá trị hàm số tại từng điểm.

$\nabla$

**Ví dụ 6.** *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thoả mãn các điều kiện:*

$$f(f(n)) + f(n+1) = n+2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Giải. Cho $n = 1$ vào (1) ta có:

$$f(f(1)) + f(2) = 3$$

Từ đó $f(2) \leq 2$ và $f(f(1)) \leq 2$. Ta xét 2 trường hợp:

**Trường hợp 1**: $f(2) = 1$ và $f(f(1)) = 2$. Đặt $f(1) = k$, ta có $f(k) = 2$. Cho $n = 2$ vào (1), ta được:

$$f(f(2)) + f(3) = 4$$

Suy ra $f(3) = 4 - f(1) = 4 - k$. Từ $f(3) \geq 1$ nên $k \leq 3$.
Nếu $k = 1$ ta có :

$$2 = f(f(1)) = f(k) = f(1) = k = 1$$

Mâu thuẫn. Nếu $k = 2$, ta cũng có:

$$2 = f(f(1)) = f(k) = f(2) = 1$$

Mâu thuẫn. Cuối cùng xét $k = 3$. Hay :

$$2 = f(f(1)) = f(k) = f(3) = 4 - k = 1$$

Cũng là điều mâu thuẫn. Ta loại trường hợp này.

**Trường hợp 2**: $f(2) = 2$ và $f(f(1)) = 1$. Cho $n = 2$ vào (1), ta nhận được:

$$f(f(2)) + f(3) = 4$$

Từ đó dễ thấy $f(3) = 2$. Ta tính toán được rằng:

$$f(4) = 5 - f(f(3)) = 5 - f(2) = 3$$

$$f(5) = 6 - f(f(4)) = 6 - f(3) = 4$$

$$f(6) = 7 - f(f(5)) = 7 - f(4) = 4$$

Dự đoán rằng:

$$f(n) = \lfloor n\alpha \rfloor - n + 1$$

Ở đây $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Để chứng minh ta cần tới 2 bổ đề sau:

**Bổ đề 1**. Với mỗi số $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor = n \ \text{ hoặc } \ n + 1$$

Chứng minh: Ta có :

$$\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor < \alpha(n\alpha - n + 1)$$

$$n + \alpha < n + 2$$

Và:

$$\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor > \alpha(n\alpha - 1 - n + 1) - 1 = n - 1$$

Bổ đề chứng minh xong. ■

**Bổ đề 2**. Với mỗi số $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \begin{cases} \lfloor n\alpha \rfloor + 2, & \text{nếu } \lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor = n \\ \lfloor n\alpha \rfloor + 1, & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

CHỨNG MINH: Hiển nhiên $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor + 1$ hoặc $\lfloor n\alpha \rfloor + 2$. Giả sử $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor (n)\alpha \rfloor + 1$. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} \lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor &= \lfloor \alpha(\lfloor (n+1)\alpha \rfloor - n) \rfloor \\ &> \alpha((n+1)\alpha - 1 - n) - 1 = n \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor \qquad (\text{ Theo } \textbf{Bổ đề 1})$$

Mặt khác nếu $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor (n)\alpha \rfloor + 2$ thì:

$$\begin{aligned} \lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor &= \lfloor \alpha(\lfloor (n+1)\alpha \rfloor - n - 1) \rfloor \\ &< \alpha((n+1)\alpha - n - 1) = n + 1 \end{aligned}$$

Từ đó, quan sát **Bổ đề 1** ta nhận được : $\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor = n$. ■

Bây giờ ta chứng minh theo quy nạp kết quả dự đoán trên.

⋆ Với $n = 1$:

$$f(1) = 1 = \lfloor \alpha \rfloor = \lfloor \alpha \rfloor - 1 + 1$$

⋆ Với $n = 2$:

$$f(2) = 2 = 3 - 2 + 1 = \lfloor 2\alpha \rfloor - 2 + 1$$

⋆ Giả sử kết quả đúng với $1 \leq j \leq n$. Sử dụng (1) ta có :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= n + 2 - f(f(n)) \\ &= n + 2 - h(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \\ &= n + 2 - \lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor + \lfloor n\alpha \rfloor - n + 1 - 1 \end{aligned}$$

Từ $\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1 < 2n - n + 1 = n + 1$, nó dẫn đến:

$$f(n+1) = \lfloor n\alpha \rfloor + 2 - \lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor$$

Giả sử $n$ thỏa mãn $\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor = n$. Từ đó ta có $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor + 2$ và do đó:

$$f(n+1) = \lfloor (n+1)\alpha \rfloor - n$$

Nếu $n$ không thỏa mãn $\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor = n$ thì $\lfloor \alpha(\lfloor n\alpha \rfloor - n + 1) \rfloor = n + 1$ và $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor + 1$, từ đó ta có:

$$f(n+1) = \lfloor (n+1)\alpha \rfloor + 1 - (n+1)\lfloor (n+1)\alpha \rfloor - n$$

Ta kết thúc chứng minh.

## 1.3 Bài tập áp dụng.

1. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thoả mãn các điều kiện:*

$$f(x + y^2 + z^3) = f(x) + f^2(y) + f^3(z)$$

*với mọi* $x, y, z \in \mathbb{N}$.

2. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thoả mãn các điều kiện:*

$$f(x^4 + 5y^4 + 10z^4) = f(x)^4 + 5f(y)^4 + 10f(z)^4$$

*với mọi* $x, y, z \in \mathbb{N}$.

3. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thoả mãn các điều kiện:*

$$f(f(m)^2 + f(n)^2) = m^2 + n^2$$

*với mọi* $m, n \in \mathbb{N}$.

4. ( **Russia 2000** ) *Cho* $a_1, a_2, ...$ *là dãy số xác định bởi* $a_1 = 1$ *thỏa mãn điều kiện* $a_{n+1} = a_n - 2$ *nếu* $a_n - 2 \notin \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *và* $a_n - 2 > 0$ *và* $a_{n+1} = a_n + 3$ *trong trường hợp còn lại . Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương k thì tồn tại 1 số tự nhiên n sao cho* $a_n = k^2 = a_{n-1} + 3$.

5. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thoả mãn các điều kiện:*

*1,* $f(1) = 1$.

*2,* $f(m+n) + f(m-n) = \dfrac{1}{2}(f(2m) + f(2n)), \forall m, n \in \mathbb{N}$.

6. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *thoả mãn các điều kiện:*

*1,* $f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$

*2,* $f(1) = 2, f(2) = 4$.

7. *Tồn tại hay không hàm* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *thoả mãn các điều kiện:*

*1,* $f(1) = 2$.

*2,* $f(f(n)) = f(n) + n$.

*3,* $f(n) < f(n+1)$.



www.VNMATH.com

# 2 Ứng dụng bài toán dãy số vào giải phương trình hàm.

## 2.1 Lý thuyết.

Có thể nói dãy số là một phần kiến thức không hề nhỏ trong phần toán học sơ cấp, dãy số ứng dụng mạnh mẽ trong Toán rời rạc, ngoài ra chúng ta còn biết đến dãy số như một công cụ hữu hiệu dùng để xử lý các dạng bài xuất hiện biểu thức kiểu :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i f^{[i]} = g(n)$$

Ở bên vế phải là 1 đa thức của biến $n$ hệ số nguyên, vế bên trái là các hàm hợp của $f$ xác định bởi $f^{[i+1]}(n) = f(f^{[i]}(n))$. Vấn đề quy về là tìm công thức tổng quát của dãy $a_1 = t, a_i = f^{[i]}(n)$ với $t$ là số bất kì thuộc vào tập xác định hàm số.

Ở đây chú ý thêm ta có thể dùng thêm điều kiện miền xác định của hàm số $f$ để khống chế dãy số nhằm tạo ra một biểu thức có lợi khi ta buộc phải dùng tới số phức.

## 2.2 Một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện :*

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k \quad \textit{với mọi} \quad n \in \mathbb{N}$$

( *$k$ là số tự nhiên cho trước*).

Giải. Đặt $a_1 = x$ và với $n \geq 1$ đặt $a_{n+1} = f(a_n)$. Khi đó từ phương trình ta có :

$$2a_n + 3k = a_{n+1} + a_{n+2}$$

Và:

$$2a_{n+1} + 3k = a_{n+2} + a_{n+3}$$

Trừ vế theo vế 2 đẳng thức trên ta có :

$$a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

Suy ra :

$$a_n = \lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3(-2)^n$$

Nhưng nếu ta cho $n$ lẻ ta sẽ có $a_n < 0$ vô lý. Do đó $\lambda_3 = 0$. Hay:

$$a_n = \lambda_1 + n\lambda_2$$

Thay vào phương trình ta có :

$$2a_n + 3k = a_{n+1} + a_{n+2}$$

$$\Rightarrow 2\lambda_1 + 2n\lambda_2 + 3k = \lambda_1 + (n+2)\lambda_2 + \lambda_1 + (n+3)\lambda_2$$

Từ đó $\lambda_2 = k$. Bây giờ chú ý tới:

$$a_2 - a_1 = \lambda_1 + 2k - (\lambda_1 + k) = k$$

$$\Longleftrightarrow f(n) - n = k$$

Vậy hàm số cần tìm là $f(n) = n + k, \forall n \in \mathbb{N}$.

Nhận xét.

1, Ví dụ trên là ví dụ rất cơ bản cho phần kiến thức được đề cập trong chương này. Đường lối rất rõ ràng tuân theo hoàn toàn lý thuyết bên trên. Nhưng ở ví dụ ngay sau đây, việc xác định $a_n$ không còn dễ dàng như trên nữa, một chút kiến thức về số phức giúp ta có lời giải gọn gẽ khi gặp bài này.

2, Tuy nhiên đối với các dãy số có phương trình sai phân của nó có nghiệm phức, ta phải tách riêng các đại lượng chứa thành phần lượng giác và phần phức ra để dùng điều kiện tập xác định ép cho hệ số trước chúng bằng 0. Đến đây ta làm tương tự như ở **Ví dụ 2.** Một ví dụ tương tự .

$\nabla$

**Ví dụ 2.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$ :*

$$f(f(f(n))) + 6f(n) = 3f(f(n)) + 4n + 2007$$

GIẢI: Đặt $f(n) = g(n) + 669$. Ta có $g(g(g(n))) + 6g(n) = 3g(g(n)) + 4n$

Xét dãy số $a_k$ xác định bởi :$a_0 = n$ với $n$ là số tự nhiên bất kì và $a_{k+1} = g(a_k)$.

Ta có $a_{k+3} = 3a_{k+2} - 6a_{k+1} + 4a_k$.

Do đó :

$$a_k = (\frac{2n}{3} + \frac{g(g(n))}{3} - 2\frac{g(n)-n}{3\sqrt{3}}) + (\frac{n}{3} - \frac{g(g(n))}{3} + 2\frac{g(n)-n}{3\sqrt{3}})2^k\cos(\frac{k\pi}{3}) + \frac{g(n)-n}{\sqrt{3}}2^k\sin(\frac{k\pi}{3})$$

$$\Longleftrightarrow a_k = u(n) + 2^k(v(n)\cos(\frac{k\pi}{3}) + w(n)\sin(\frac{k\pi}{3}))$$

Từ $a_k$ và $v(n)\cos(\frac{k\pi}{3}) + w(n)\sin(\frac{k\pi}{3})$ không nguyên với mọi $k$ nên $v(n) = w(n) = 0$. Do đó $g(n) = n$.

Hay $f(n) = n + 669$.

$\nabla$

**Ví dụ 3.** ( **Balkan 2002** ) *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn với mọi* $n \in \mathbb{N}$ : $f(f(n)) + f(n) = 2n + 2001$ *hoặc* $2n + 2002$.

Giải: Ta xác định dãy các số tự nhiên $(a_n)_{n\geq 0}$ như sau: $a_0$ là 1 số tự nhiên bất kì và $a_{n+1} = f(a_n)$ với mọi $n$. Đặt thêm: $c_n = a_n - a_{n-1} - 667$, với mọi $n \geq 1$. Từ đó:

$$c_{n+1} + 2c_n = a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} - 2001,$$

Với mọi $n \geq 1, c_{n+1} + 2c_n$ là số nguyên thỏa mãn:

$$0 \leq c_{n+1} + 2c_n \leq 1.$$

Giả sử $c_1 > 0$; suy ra $c_1 \geq 1$ và $c_2 \leq -2c_1 + 1 \leq -1, c_3 \geq -2c_2 \geq 2$. Bằng quy nạp dễ thấy rằng: $c_{2k+1} \geq 2^k$

Mặt khác:

$$a_{2k+2} - a_{2k} - 1334 = c_{2k+2} + c_{2k+1} \leq -2^k + 1,$$

Do đó với $k \geq 11$, ta có: $a_{2k+2} < a_{2k}$ vô lý.

Nếu $c_1 < 0$, suy ra $c_2 \geq -2c_1 > 0$ tương tự trên ta có : $a_{2k+3} < a_{2k+1}$,với mọi $k \geq 11$, cũng vô lý.

Vậy $c_1 = 0$, nó tương đương với $a_1 = a_0 + 667$. Hay $f(n) = n + 667$,với mọi $n$.

Nhận xét: Ở bài này, không khó để dự đoán ra kết quả bài toán. Tuy nhiên, để xử lý điều kiện $f(f(n)) + f(n) = 2n + 2001$ hoặc $2n + 2002$, ta đã cụ thể hóa nó trong điều kiện đối với $c_n$ là $0 \leq c_{n+1} + 2c_n \leq 1$.

$\nabla$

**Ví dụ 4.** *Tồn tại hay không hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

$$f(f(n)) + 3n = 2f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giải: Giả sử tồn tại hàm số $f$. Với mỗi $i \in \mathbb{N}^*$ ta xây dựng dãy $(a_n)_{i=1}^{+\infty} : a_1 = i, a_{n+1} = f(a_n)$. Khi đó:

$$a_{n+1} = f(a_n) = f(f(a_{n-1})) = 2f(a_{n-1}) - 3a_{n-1} = 2a_n - 3a_{n-1}$$

Hay:

$$a_{n+4} + 4a_{n+1} + 3a_n = 0, \forall n \geq 1$$

Do $a_n > 0, \forall n \geq 1$ nên đẳng thức không thể xảy ra. Suy ra không tồn tại hàm số $f$ thỏa mãn.

### 2.3 Bài tập áp dụng.

8. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

   *i,$f(f(n)) = f(n) + n$*

   *ii, $f(1) = 2$*

   *iii,$f(n+1) > f(n)$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

9. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$

10. *Cho $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ là hàm số thỏa mãn điều kiện :*

$$f(0) = 1; f(f(x)) = x + 4f(x), \forall x \in \mathbb{Z}$$

*Tìm mọi số nguyên $n \geq 1$ sao cho $f_n(0)$ chia hết cho $20^{11}$ , ở đây $f_1(x) = f(x); f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$.*

# 3 Sử dụng đánh giá bất đẳng thức.

## 3.1 Lý thuyết.

Bất đẳng thức là một lĩnh vực rộng có nhiều ứng dụng. Trong phần này, ta không chú tâm quá nhiều vào bất đẳng thức mà là những ứng dụng thiết thực của nó trong việc xử lý các bài toán phương trình hàm. Cần chú ý đến vài điểm:

1, Tính đơn điệu của hàm và nếu cần thiết ta có thể kẹp hàm số trên một khoảng giá trị nào đó. Ví dụ, ta có $f$ là hàm đơn điệu khi đó nếu $f(a_n) = f(a_{n+1})$ với $a_n < a_{n+1}$ thì $f(x) = f(a_n) = f(a_{n+1})$ với mọi $x \in [a_n, a_{n+1}] \cap \mathbb{N}$. Hoặc có thể kẹp $a_n < f(m) < f(a_{n+1}$, rồi lý luận để loại các trường hợp không thỏa mãn bằng cách xét tuần tự các giá trị có thể trong khoảng $(a_n, a_{n+1}) \cap \mathbb{N}$.

2, Dùng các bất đẳng thức cơ bản, ví dụ $a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

## 3.2 Một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** *Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

$$f\left(n + f(n)\right) = 2f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Giải. Do $f$ tăng thực sự nên $f(n+1) \geq f(n) + 1$ hay $f(n+1) - n - 1 \geq f(n) - n$. Suy ra $f(n) - n$ là hàm số tăng. Mặt khác, đặt $a_0 = 1,\ a_{n+1} = a_n + f(a_n)$. Suy ra $a_0 < a_1 < \ldots$, và $f(a_{n+1}) = 2f(a_n)$, do đó:

$$f(a_{n+1}) - a_{n+1} = f(a_n) - a_n$$

Suy ra có vô hạn bộ $(m, n)$ sao cho $f(n) - n = f(m) - n$ suy ra $f(n) = n + k$ với $k \in \mathbb{N}$.

$\nabla$

**Ví dụ 2.** ( **Baltic MO** ) *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

1, $f(0) = 0, f(1) = 1$.

2, $f(0) \leq f(1) \leq f(2) \leq \cdots$.

3, $f(x^2 + y^2) = f(x)^2 + f(y)^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{N}^*$.

Giải: Ta có $f(2) = f(1+1) = 2, f(5) = f(1^2 + 2^2) = 5, \ldots f(x_n) = x_n$, ở đây $x_0 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + 1$. Hiển nhiên $lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$. Suy ra nếu $f(m) = f(m+1)$ thì :

$$f((m+1)^2 + 1 = 1 + f(m+1)^2 = 1 + f(m)^2 = f(m^2 + 1)$$

$$\Longrightarrow f(m^2+k) = f(m^2+1), k = 1, \dots 2m+2.$$

Quy nạp lên ta có tồn tại vô hạn số $m$ sao cho $f(m^2+k) = f(m^2+1), k = 1, \dots 2m+2$. Chọn $m$ đủ lớn sao cho tồn tại $n$ sao cho $a_n, a_{n+1} \in [m^2+1, m^2+2m+2]$. Khi đó $a_n = a_{n+1}$, đó là điều vô lý. Suy ra $f$ tăng thực sự. Hiển nhiên ta có $f(n) = n, n \in \mathbb{N}^*$ .

$\nabla$

**Ví dụ 3.** *Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:.*

$$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = f(f(n-1))$$

*Chứng minh tồn tại a và b thỏa mãn với mọi $n > a$ ta có $f(n) = b$.*

Giải: Ta có

$$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + f(f(n-1)) \geq f(n+1) - f(n)$$

Suy ra $f(n+1) - f(n)$ là một hàm số tăng. Suy ra tồn tại $n_0$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ thì $f(n+1) - f(n) \geq 0$. Giả sử tồn tại số $n_1$ sao cho $f(n_0+1) - f(n_0) \geq 1$. Suy ra $f(n)$ tăng thực sự với $n > n_1$. Suy ra tồn tại $n_2 > n_1 + 2$ sao cho $f(n_2 - 1) > n_1$. Từ đó :

$$f(n_2+2) - f(n_2+1) = f(n_2+1) - f(n_2) + f(f(n_2-1)) \geq f(n_2+1) - f(n_2) + 1 \geq 2$$

(do $f(f(n_2-1)) > f(n_1) \geq 0$ ).

Từ $f(n+1) - f(n)$ là hàm số tăng, nó có nghĩa là $f(n) \geq 2n - c$ với một $c$ nào đó. Suy ra, $f(n) \geq n + 4$ với $n$ đủ lớn. Vì thế, với $n$ đủ lớn thì

$$f(n+2) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) + f(f(n-1)) \geq f(f(n-1)) \geq f(n+3) > f(n+2)$$

vô lý. Suy ra $f(n+1) = f(n) = f(a) = b$ với mọi $n \geq a$. Điều cần phải chứng minh.

Ví dụ ngay sau đây cũng chính là **Ví dụ 2**, ở phần Hàm số sử dụng tính chất số học. Một lời giải bằng số học rất ngắn gọn đã được trình bày. Ở đây ta trình bày lời giải khác trên tư tưởng bất đẳng thức.

$\nabla$

**Ví dụ 4.** ( **Austrian 2002** ) *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

*a,* $f(x+22) = f(x)$

*b,* $f(x^2y) = f(x)^2 f(y)$

*với mọi* $x, y \in \mathbb{N}^{*2}$.

Giải : Từ điều kiện $a$, cho thấy $f$ có tối đa là 22 giá trị. Giả sử $\exists x_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(f(x_0)) > 1$. Nếu $x_0 = 1$, chọn $x_0 = 23$ (từ $f(23) = f(1)$ ). Suy ra ta chỉ cần xét khi $x_0 > 1$. Ta có $f(x_0^2 y) > f(y)$, và $f(x_0^4 y) > f(x_0^2 y) > f(y)$ dẫn đến có hơn 22 giá trị của $f(x)$,vô lý.

Vì vậy $f(f(x)) = 1, \forall x \in \mathbb{N}^*$ và $f(x^2 y) = f(y) \forall x, y \in \mathbb{N}^*$.

Chọn $x > y \in \mathbb{N}^*$ :

$$f(22^2 x) = f(x)$$
$$f(22^2 y) = f(y)$$
$$f(22^2 x) = f(22^2 y + 22k)$$

với $k = 22(x - y)$ và do đó $f(22^2 x) = f(22^2 y)$ hay $f(x) = f(y)$ suy ra $f(x) = 1$ ( từ $f(f(x)) = 1$ ).

Vậy $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

$$\nabla$$

**Ví dụ 5.** *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

$$f^{[19]}(n) + 97f(n) = 98n + 232$$

*với* $f^{[m]}(n) = \underbrace{f(f(...f(n)))}_{m\ \text{lần}}$.

Giải: Đặt $f(n) = n + 2 + t$. Từ giả thiết suy ra:

$$97f(n) < 98n + 232$$

$$\Longrightarrow f(n) < n + \frac{n + 232}{97} \quad (1)$$

Với $n \leq 156$ thì

$$f(n) < n + \frac{n + 232}{97} < n + 4$$

Suy ra với $n \leq 156$ thì $f(n) \leq n + 3$. Khi đó với $n \leq 102$ thì :

$$f(n) \leq n + 3 \leq 105 < 156$$

$$\Longrightarrow f(f(n) \leq f(n) + 3 < 156$$

Tiếp tục quá trình trên 18 lần ta có :

$$f^{[19]}(n) < n + 57$$

Suy ra với $n \leq 36$ thì

$$97f(n) < f^{[19]}(n) + 97f(n) < n + 57 + 97f(n)$$

Từ (1) ta có $97t + 251 \geq 232$ hay $t \geq 0$. Do đó :

$$0 \leq t \leq \frac{n+38}{97}, \quad \forall n \leq 36$$

Suy ra $f(n) = n + 2, \ \forall n \leq 36$. Bây giờ ta chứng minh bằng quy nạp rằng $f(n) = n + 2$.

$\star$ Với $n \leq 36$ thì hiển nhiên đúng theo chứng minh ở trên.

$\star$ Với $n > 36$, giả sử kết luận đúng với mọi $n < m$. Khi đó :

$$f^{[18]}(n-36) = f^{[17]}(n)(f(n-36)) = f^{[17]}(n)(n-34) = .... = f(n-2) = n$$

Vì thế :

$$f(n) = f(f^{[18]}(n-36)) = f^{[19]}(n-36) = 98(n-36) + 232 - 97f(n-36) = n + 2$$

Điều phải chứng minh.

Vậy có duy nhất 1 hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(n) = n + 2, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\nabla$

**Ví dụ 6.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

*1,* $f(2) = 2$

*2,* $f(mn) = f(m)f(n)$ *với mọi* $m, n \in \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn* $\gcd(m, n) = 1$

*3,* $f(m) < f(n)$ *với mọi* $m < n$.

Giải: Ta có

$$f(3)f(5) = f(15) < f(18) = f(2)f(9) < f(2)f(10) = f(2)f(2)f(5) = 4f(5)$$

Suy ra $f(3) < 4$, từ đó $f(3) = 3$. Suy ra $f(a_n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, trong đó $a_1 = 3, a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1)$. Dễ thấy $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Từ đó $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\nabla$

**Ví dụ 7.** *Cho hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

*1,* $f(xy) = f(x)f(y)$.

*2,* $f(x) \leq x$.

*3,* $f(f(1995)) = 95$.

*Tìm giá trị nhỏ nhất của* $f(135)$. Giải: Ta có

$$95 = f(f(3))f(f5))f(f(7))f(f(19))$$

Do $f(f(k)) \leq f(k) \leq k$ và $f(f(k))|95$ nên ta có

$$f(133) \geq 19$$

Ta có thể chỉ ra một hàm số như sau $f(19^m t) = 19^m, m \in \mathbb{N}^*$, trong đó $\gcd(19, t) = 1$. Dễ thấy hàm số này thỏa mãn.

**Ví dụ 8.** *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn với mọi* $x, y, z \in \mathbb{N}^*$*:*

$$f(xy) + f(xz) \geq f(x)f(yz) + 1$$

Giải: Kí hiệu $P(x, y, z)$ là phép thế biến vào điều kiện $f(xy) + f(xz) \geq f(x)f(yz) + 1$.

$\star$ $P(1, 1, 1)$, $2f(1) \geq f(1)^2 + 1$, suy ra $0 \geq f(1)^2 - 2f(1) + 1 = (f(1) - 1)^2$ hay $f(1) = 1$.

$\star$ $P(x, 1, 1)$, $2f(x) \geq f(x)f(1) + 1 = f(x) + 1$, suy ra $f(x) \geq 1\ \forall x \in \mathbb{N}$.

$\star$ $P(x, x, x)$, $2f(x^2) \geq f(x)f(x^2) + 1$ suy ra $f(x^2)(f(x) - 2) \leq -1$ hay $f(x) < 2\ \forall x \in \mathbb{N}$.

$\star$ Đặt $a = \sup(\{f(n), n \in \mathbb{N}\})$ ( ta có $a$ tồn tại là do $f(\mathbb{N}) \subseteq [1, 2)$ và $2 \geq a \geq 1$ ). Chọn $\epsilon$ sao cho $a > \epsilon > 0$ và tồn tại $p$ thỏa mãn $0 \leq a - f(p) < \epsilon$.

$\star$ $P(p, p, 1)$, $f(p^2) + f(p) \geq (f(p))^2 + 1$. Và do vế trái bé thua hoặc bằng $a + a$ nên $(f(p))^2 + 1 \leq 2a$ suy ra $(a - \epsilon)^2 + 1 \leq 2a$. Hay

$$(a - 1)^2 < 2\epsilon a - \epsilon^2 < 4\epsilon, \quad \forall \epsilon \in (0, 1) \Longleftrightarrow a = 1$$

Do đó $f(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{N}$.

### 3.3 Bài tập áp dụng.

11. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

$$f^{[1002]}(n) + 2003f(n) = 2004n + 3005$$

*với* $f^{[m]}(n) = \underbrace{f(f(...f(n)))}_{m \text{ lần}}$.

12. ( **Korea 1996** ) *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn:*

    *1, Với mọi* $m, n \in \mathbb{N}$ *thì*
    $$2f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

    *2, Với mọi* $m, n \in \mathbb{N}$ *và* $m \geq n$ *thì* $f(m^2) \geq f(n)^2$.

13. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$

    *1,* $f(n + 19) \leq f(n) + 19$.

    *2,* $f(n + 94) \geq f(n) + 94$.

14. *Cho hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *thỏa mãn với mọi a và b thuộc* $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f(ab) \geq f(a) + f(b)$. *Chứng minh với mọi* $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *ta có* $f(a^n) = nf(a)$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ *khi và chỉ khi* $f(a^2) = 2f(a)$.

15. ( **Cono Sur Olympiad 1995** ) *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn*

    *1, Nếu* $x < y$ *thì* $f(x) < f(y)$.

    *2,* $f(yf(x)) = x^2 f(xy)$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{N}^*$.

16. *Cho n là một số tự nhiên khác không và* $f(n) = 2n - 1995\lfloor \frac{n}{1000} \rfloor$.

    *1, Chứng minh rằng với một số số nguyên dương r sao cho* $f(f(f...f(n)...)) = 1995$, *có r lần f thì n là bội của* 1995.

    *2. Chứng minh nếu n là bội của* 1995 *thì tồn tại số nguyên dương r sao cho* $f(f(f...f(n)...)) = 1995$ *với r lần f*.

# 4 Sử dụng nguyên lý cực hạn.

## 4.1 Lý thuyết.

Một trong những tính chất quan trọng nhất của tập sỗ nguyên và tập số tự nhiên là tính sắp thứ tự tốt và số hạng lớn nhất và nhỏ nhất. Cụ thể rằng:

1, Một tập con $S$ bất kì của $\mathbb{N}$ đều có số hạng nhỏ nhất. Nếu $S$ không là tập vô hạn thì $S$ có số hạng lớn nhất nữa.

2, Một tập con $S$ của $\mathbb{N}$ đều có giá trị lớn hoặc nhỏ nhất, Nếu $S$ không là tập vô hạn thì $S$ có số lớn hoặc nhỏ nhất tương ứng.

## 4.2 Một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** ( **IMO 1997**) *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

$$f(f(n)) < f(n+1), \text{ với mọi số tự nhiên } n.$$

Giải.

Lời giải 1. Do hàm số $f$ có tập xác định cũng như tập giá trị là $\mathbb{N}^*$ nên đặt:

$$d = \min\{f(n) : n \in \mathbb{N}^*\}$$

Suy ra tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) = d$. Nếu $m > 1$ thì

$$d = f(m) > f(f(m-1)) \geq d$$

vô lý. Do đó $m = 1$. Bây giờ xác định tập hợp $\{f(n), n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Hiển nhiên $f(2) > f(1)$ do $f(2) > f(f(1)) \geq f(1)$. Từ đó ta có :

$$f(1) < f(2) < ... < f(n) < ....$$

Chú ý rằng $f(1) \geq 1$ nên $f(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.Giả sử $f(k) > k$ với một số $k$ nào đó, suy ra $f(k) \geq k+1$ hay $f(f(k)) \geq f(k+1) > f(f(k))$, vô lý. Do đó :

$$f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải 2.Ta có

$$f(1) = \min\{f(n), n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$f(2) = \min\{f(n), n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2\}(\star)$$

Nếu $f(1) \geq 2$ suy ra $f(f(1)) \geq f(2) > f(f(1))$ ( do $(\star)$ ). Suy ra $f(1) = 1$. Bây giờ đặt $g(n) = f(n+1) - 1$. Ta thấy:

$$g(g(n)) = f(f(n+1) - 1) = f(f(n+1) - 1 < f(n+2) - 1 = g(n+1)$$

Suy ra $g(n)$ cũng là một nghiệm của phương trình hàm. Theo trên ta có $g(1) = 1$ hay $f(2) = 2$. Theo quy nạp ta có:

$$f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\nabla$

Một bài toán áp dụng bài toán trên:

**Ví dụ 1'.** *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

*1,* $f(1) = 1$.

*2,* $f(f(n))f(n+2) + 1 = f(n+1)f(f(n+1))$.

GIẢI: Ta sẽ cm quy nạp rằng $f(n+1) > f(f(n))$.

$\star$ Với n=1. Hiển nhiên.

$\star$ Giả sử đúng đến $k$ . Ta cm cho $k+1$.

Ta có:

$$f(f(k))f(k+2) = f(k+1)f(f(k+1)) - 1$$

Do đó

$$f(k+2) = \frac{f(k+1)f(f(k+1)) - 1}{f(f(k))} \geq \frac{(f(f(k)) + 1)(f(f(k+1))}{f(f(k))} > f(f(k+1))$$

Vậy nhận xét được chứng minh . Theo **Ví dụ 1** thì $f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\nabla$

**Ví dụ 2.** *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

$$f(n + f(n)) = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

và tồn tại $x_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(x_0) = 1$.

GIẢI. Gọi :

$$x_1 = \min\{x, x \in \mathbb{N}, f(x) = 1\}$$

Suy ra :

$$f(x_1+1) = f(x_1+f(x_1)) = f(x_1) = 1$$

Hay

$$f(n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq x_1$$

Giả sử $x_1 > 1$. Suy ra:

$$f(x_1-1+f(x_1-1)) = f(x_1-1).$$

Nếu $x_1 - 1 + f(x_1-1) \geq x_1$ thì $f(x_1-1) = 1$, vô lý. Nếu $x_1 - 1 + f(x_1) - 1 < x_1$ thì $f(x_1-1) < 1$, cũng vô lý. Suy ra $x_1 = 1$. Từ đó $f(x) \equiv 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\nabla$

**Ví dụ 3.** *Tìm tất cả các hàm số :$f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

$$2\left(f(m^2+n^2)\right)^3 = f(m)^2.f(n) + f(m).f(n)^2$$

Giải Nếu $f(n) \equiv c,$ với $c$ là hằng số thì hiển nhiên thỏa mãn bài ra.

Nếu tồn tại $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(m) \neq f(n)$ thì ta gọi $a, b$ là 2 số thỏa mãn

$$\mid f(a) - f(b) \mid = \min \mid f(m) - f(n) \mid,\ m, n \in \mathbb{N}^*$$

Giả sử $f(a) > f(b)$. Ta có:

$$2f^3(b) < f(a)^2.f(b) + f(a).f(b)^2 < 2f(a)^3$$

Suy ra

$$f(b) < f(a^2+b^2) < f(a)$$

Hay:

$$f(a^2+b^2) - f(b) < f(a) - f(b)$$

Vô lý. Do đó $f(n) \equiv c,$ với $c$ là hằng số là mọi hàm số cần tìm.

**Ví dụ 4.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ :*

$$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

Giải. Cho $m = n = 0$, ta có $f(0) = 0$.

Cho $m = 0$, ta có $f(f(n)) = f(n)$. Gọi $k$ là điểm bất động bé nhất của hàm số.

$\star$ Nếu $k = 0$ thì $f(n) \equiv 0, \forall n$.

$\star$ Nếu $k \neq 0$, dễ thấy $f(nk) = nk, \forall n \in \mathbb{N}$. Bây giờ ta xét $a$ là điểm bất động bất kì của $f$. Biểu diễn $a = ks + r, 0 \leq r < k$. Theo giả thiết:

$$f(ks + r) = f(r + f(ks) = f(f(r)) + ks$$

Hay $f(r) = r$. Suy ra $r = 0$. Do đó một điểm bất động của $f$ khi và chỉ khi nó là bội của $k$. Từ đó ta xây dựng hàm $f_0(n)$ như sau: Chọn $k - 1$ số nguyên không âm tùy ý là $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ và $n_0 = 0$, nếu $n = qk + r, 0 \leq r < k$ thì $f_0(n) = qk + n_r k$. Dễ thấy hàm $f_0(n)$ chính là nghiệm tổng quát của hàm số đã cho.

### 4.3 Bài tập áp dụng.

17. ( **Canada 2002** ) *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:*

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{N}$.

18. *Xét hàm số $f(n) = \lfloor n + \sqrt{n} \rfloor$, $n = 1, 2, ....$ Cho $m \geq 1$ là số tự nhiên. Xét dãy các số $m, f(m), f(f(m), ....$ Chứng minh trong dãy có vô hạn số chính phương.*

19. *Cho $D = \{1, 2, 3, ..., 2004\}$. Hàm số $f : D \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn : với mọi $m, n \in D$ thì*

$$f(m) + f(n) \leq f(m + n) \leq f(m) + f(n) + 1$$

*Chứng minh tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(n) = \lfloor nx \rfloor$, với mọi $n \in D$.*

20. ( **Tổng quát Ví dụ 2** ) *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

$$f(n + f(n)) = f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

và tồn tại $x_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $f(x_0) = a$.

# 5 Hàm số sử dụng tính chất số học.

## 5.1 Lý thuyết.

Các bài toán sử dụng tính chất số học đều rất đẹp mắt từ phát biểu đến lời giải . Tuy nhiên , thực tế thì các bài toán dạng này đều khó trên một phương diện nào đó. Để xác định xem một bài toán hàm số có sử dụng tính chất số học hay không, chúng ta cần chú ý tới các điều kiện về điều kiện và câu hỏi được đặt ra.

a, Nếu xuất hiện các biểu thức tuyến tính chứa lũy thừa, có thể nghĩ tới các bài toán về bậc của phần tử, các loại phương trình đặc biệt ( phương trình *Pell*, phương trình *Pytago*,...), hay đưa về xử lý các bài toán giải phương trình vô định nghiệm nguyên.

b, Nếu hàm số đã cho nhân tính cần xét đến giá trị hàm số tại các điểm nguyên tố, các dãy số nguyên tố vô hạn.

c, Sử dụng các đẳng thức số học.

## 5.2 Một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.**. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn :* $x^2+f(y)|f(x)^2+y$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{N}^*$.

GIẢI: Kí hiệu $P(x, y)$ là cách cho bộ $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ vào điều kiện đã cho.

$\star$ $P(1, 1) \Rightarrow f(1) = 1$

$\star$ $P(1, y) \Rightarrow 1 + f(y)|f(1) + y \Rightarrow y \geq f(y)$ (1)

$\star$ $P(x, ) \Rightarrow x^2 + 1|f(x)^2 + 1 \Rightarrow f(x) \geq x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

$\nabla$

**Ví dụ 2.** ( **Austrian 2002** ) *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn:*

*a,* $f(x + 22) = f(x)$

*b,* $f(x^2y) = f(x)^2f(y)$

*với mọi* $x, y \in \mathbb{N}^{*2}$.

Giải: Cho $x = y = 1$ ta có $f(1) = 1$. Với mỗi $x$ ( $2 \leq x \leq 22$ ) thì tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $22 \mid x(kx-1)$. Khi đó $x + 22t = kx^2$.

Ta có
$$f(x) = f(x+22t) = f(x^2k) = f(x)^2.f(k) \Longleftrightarrow f(x) = 1$$
Vậy $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{N}^*$.

$$\nabla$$

**Ví dụ 3.** ( **Iran TST 2005**) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn tồn tại số $k \in N$ và 1 số nguyên tố $p$ sao cho $\forall n \geq k,\ f(n+p) = f(n)$ và nếu $m \mid n$ thì $f(m+1) \mid f(n)+1$.

Giải: Giả sử $n \geq k$ và $p \not| n-1$. Ta có, tồn tại $k$ sao cho $n-1 | n+kp$. Suy ra
$$f(n) | f(n+kp)+1$$
Nhưng $f(n) = f(n+kp)$, suy ra $f(n) \mid 1$ và $f(n) = 1$.Với một số $n \neq 1$ bất kì, ta có:
$$n - |(n-1)kp$$
$$\Rightarrow f(n) | f\big((n-1)kp\big) + 1 = 2$$
Vì thế với $n \neq 1,\ f(n) \in \{1, 2\}$. Bây giờ ta có 2 trường hợp:

TH 1. $f(n) = 2, \forall n \geq k$ và $p \mid n-1$.

Xác định $n \geq k$ sao cho $p \not| n-1$. Khi đó tồn tại $m$ sao cho $n-1|m$ và $p|m-1$. Vì vậy $f(n) \mid f(m)+1 = 3$ và $f(n) = 1$. Hay $f(n) = 1$ . Ta xác định được hàm $f$ như sau:

1, $f(n) = 2, \forall n \geq k$ và $p|n-1$.

2, $f(n) = 1$ với mọi $n > k$ và $p \not| n-1$

3, $f(i) = f(i+p)$ với mọi $i < k$

TH 2. $f(n) = 1, \forall n \geq k$ và $p \mid n-1$.

Trong trường hợp này, $f(n) = 1, \forall n \geq k$, và nếu ta giả sử $S = \{a \mid f(a) = 2\}$ thì sẽ không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $m-1 \mid n$.Ta xác định được hàm $f$ như sau:

1, $f(x) \in \{1, 2\}, \forall x \in \mathbb{N}$.

2, Với $S$ là một tập con vô hạn của $\mathbb{N}$ sao cho không tồn tại $m, n \in S$ thỏa mãn $m-1 \mid n$ và với $n > 1,\ f(n) = 2$ khi và chỉ khi $n \in S$, $f(x) = 1$ với các $x \neq 1$ còn lại và $f(1)$ là một số bất kì xác định bởi $f(2) \mid f(1)+1$.

$\nabla$

**Ví dụ 4.** ( **IMO Shortlists 2004** ) *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $f(m)^2 + f(n)|(m^2+n)^2$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$.*

Giải: Kí hiệu $P(m,n)$ là cách cho bộ $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ vào điều kiện đã cho.

$\star$ $P(1,1) \Rightarrow f(1) = 1$

$\star$ $P(1,n) \Rightarrow f(n) + 1|(n+1)^2$

$\star$ $P(m,1) \Rightarrow f(m)^2 + 1|(m^2+1)^2$

Gọi $p$ là một số nguyên tố bất kì, ta có $p^2|f(p-1)+1$. Giả sử $f(p-1)+1 = p^2$. Khi đó $(p^2-1)^2+1|((p-1)^2+1)^2$. Mà $(p^2-1)^2+1 > (p-1)^2.(p+1)^2 > p^2(p-1)^2 = (p^2-p)^2 > ((p-1)^2+1)^2$ vô lý. Do đó $f(p) = p$ với mọi $p$ là số nguyên tố hay tồn tại vô số $k$ sao cho $f(k) = k$. Với mỗi $k$ như thế và số tự nhiên $n \neq 0$ bất kì ta có :

$$k^2 + f(n)|(k^2+n)^2$$

$$\Longleftrightarrow k^2 + f(n)|((p-1)^2 + f(n))((p-1)^2 + 2n - f(n)) + (f(n)-n)^2$$

Khi chọn $k$ đủ lớn ta sẽ phải có $f(n) = n$. Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Nhận xét. Ở bài toán này, sau khi dự đoán được nghiệm hàm là $f(n) = n$, điều ta cần đạt được chính là kẹp biểu thức chứa $f(n) - n$ bởi 1 đại lượng lớn tùy ý và khi đó dùng tính chia hết ta phải có $f(n) = n$. Để có điều đó, ta cần xây dựng một dãy vô hạn các số điểm bất động của $f$. Ta cũng cần hạn chế tối đa các trường hợp ước phải xét và chú ý rằng số dạng $p^i$ chỉ có $i+1$ ước là $1, p, ..., p^i$.

$\nabla$

**Ví dụ 5.** ( **USA TST** ) *Cho $p$ là 1 số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời:*

*a, $f(m) = f(n)$ nếu $m \equiv n \mod p$.*

*b, $f(mn) = f(m).f(n)$.*

*Với $m, n$ là các số nguyên.*

Giải: Ta có : $f(p(k+1)) = f(pk) \Longleftrightarrow f(p)(f(k+1) - f(k)) = 0$.

Xét 2 trường hợp:

**Trường hợp 1**: $f(p) \neq 0$

Dễ thấy nếu $f(1) = 0$ thì $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, vô lý. Xét riêng khi $f(1) = 1$. Với mỗi $x \in \mathbb{Z}, p \not| x$ ta có $y \in \mathbb{Z}$ sao cho $xy \equiv 1 \bmod p$. Do đó:

$$f(x)f(y) = f(xy) = f(1) = 1$$

Suy ra $f(n) = \pm 1, p \not| n$.

Mặt khác: $f(n^2) = f(n)^2 = 1, p \not| n$ nên $f(m) = 1$ nếu $m$ là 1 số chính phương mod$p$, và $p \not| m$. Nếu $\nexists i, p \not| i$ sao cho $f(i) = -1$, ta có ngay $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}, p \not| n$. Xét $i$ là số không chính phương mod$p$ và $k$ là 1 số không chính phương mod$p, p \not| k$ bất kì, suy ra $ik$ chính phương mod$p$. Mặt khác:

$$f(k) = -f(i).f(k) = -f(hk) = -1$$

Hay ta có $f(x) = 1$ nếu $x$ là số chính phương mod$p, p \not| x$ $f(x) = -1$ nếu $x$ là không số chính phương mod$p$.

Xét $x_0$ sao cho $f(x_0) = -1$. Cho $m = x_0, n = p$ vào b, ta có $f(p) = f(px_0) = f(p)f(x_0)$ hay $f(p) = 1$. Suy ra $f(x) = 1$ nếu $x$ là số chính phương mod$p$ $f(x) = -1$ nếu $x$ là không số chính phương mod$p$.

**Trường hợp 2**. $f(p) = 0$. Suy ra $f(n) = 0, \forall p \mid n$. Nếu $f(1) = 0$ thì $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Nếu $f(1) \neq 0$.Giả sử tồn tại $x_0$ sao cho $f(x_0) = 0$ và $p \not| x_0$. Suy ra $f(nx_0) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Mà ta có dãy $x_0, 2x_0, ..., (p-1)x_0$ là dãy thặng dư đầy đủ mod$p$. Suy ra $f(1) = 0$ vô lý. Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow p \mid x$. Tương tự trên ta cũng có rằng, $f(x) = \pm 1, f(0) = 1$ vô lý. Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow p \mid x$ và $f(x) = 1$ với các $x$ còn lại.

Vậy có bốn hàm số thỏa mãn là:

1, $f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

2, $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

3,$f(x) = 0$ nếu $p|x$, $f(x) = 1$ trong trường hợp còn lại.

4, $f(x) = 1$ nếu $x$ là số chính phương mod$p$, $f(x) = -1$ trong trường hợp còn lại.

$\nabla$

**Ví dụ 6.** *Tìm tất cả các số nguyên không âm n nhỏ nhất sao cho tồn tại hàm số* $f : \mathbb{Z} \to [0, +\infty)$ *khác hằng số thỏa mãn:*

*2,* $f(xy) = f(x).f(y)$

*1,* $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, ..., n\}$.

*với mọi số nguyên* $x, y$. *Với số* $n$ *tìm được , tìm mọi hàm số thỏa mãn.*

Giải : Với $n = 1$ ta có thể chỉ ra ngay 1 hàm số thỏa mãn : Với $p$ là 1 số nguyên tố dạng $4k + 3$, hàm $f$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} f(x) &= 0 \quad \text{nếu } \ p|x \\ f(x) &= 1 \quad \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Hiển nhiên hàm số trên thỏa mãn. Bây giờ ta giả sử rằng với $n = 0$ thì cũng tồn tại hàm thỏa mãn. Từ đó:

$$2f(x^2 + y^2) = f(x) + f(y)(*)$$

$\star$ Cho $x = y = 0$ vào 1, ta có $f(0) = f(0)^2$

Có 2 khả năng sau:

KN 1. $f(0) = 1$

$\star$ Cho $y = 0$ vào $(*)$: $2f(x^2) = f(x) + 1$. Mà $f(x)^2 = f(x^2)$ nên $\left[\begin{array}{lcl} f(x) &=& 1 \\ f(x) &=& \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Giả sử tồn tại $x_0$ sao cho $f(x_0) = \dfrac{1}{2}$. Cho $x = y = x_0$ vào $(*)$ ta có $2f(x_0)^2 = 2f(x_0^2) = 2f(x_0)$ vô lý. Suy ra $f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Trái với giả thiết.

KN 2. $f(0) = 0$. Tương tự ta cũng có điều mâu thuẫn.

Vậy $n \geq 1$. Để trọn vẹn bài toán ta giải bài sau:

*" Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Z} \to [0, +\infty)$ *sao cho:*

*1,* $f(xy) = f(x).f(y)$.

*2,* $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1\}$ *."*

Giải : Dễ dàng chứng minh các nhận xét sau:$f(0) = 0$ và $f(1) = 1$. Kí hiệu $P_a(x, y), P_b(x, y)$ lần lượt là cách cho bộ $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ và điều kiện *1, 2* .

$\star$ $P_a(x, x) \Rightarrow f(x)^2 = f(x^2)$

$\star$ $P_b(x,0) \Rightarrow 2f(x)^2 - f(x) \in \{0,1\}$. Từ đó ta có $f(x) \in \{0,1\}$.

$\star$ $P_a(-1,-1) \Rightarrow f(-1) = 1$

$\star$ $P_a(-1,-x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

Do $f$ không là hằng số nên tồn tại $p$ nguyên tố sao cho $f(p) = 0$. Giả sử cũng tồn tại $q \neq p$, $q$ nguyên tố và $f(q) = 0$.

$\star$ $P_b(p,q) \Rightarrow f(p^2+q^2) = 0$. Với mỗi $a, b \in \mathbb{Z}$ ta luôn có :

$$2f(a^2+b^2).f(p^2+q^2) = 2f((qp+bq)^2 + (aq-bp)^2) = 0$$

Do $0 \leq f(x) + f(y) \leq 2f(x^2+y^2)$ nên $f(aq-bp) = 0$.

Do $(p,q) = 1$ nên $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $aq - bp = 1$ hay:

$$1 = f(1) = f(aq-bp) = 0$$

vô lý. Suy ra tồn tại duy nhất 1 số nguyên tố $p$ thỏa mãn $f(p) = 0(**)$ Nếu $p$ có dạng $4k+1$ thì tồn tại $a \in \mathbb{Z}$ sao cho $p|a^2+1$ hay $f(a^2+1) = 0$.

Mặt khác :

$\star$ $P_b(1,a) \Rightarrow f(a^2+1) = 1$ vô lý. Vậy $p$ có dạng $4k+3$. Từ đó dễ thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow p|x$ và $f(x) = 1$ với các $x$ còn lại. Hay ta có hàm số duy nhất thỏa mãn là :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{nếu } p|x \\ f(x) = 1 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases} \quad \text{với } p \text{ là số nguyên tố dạng } 4k+3.$$

Nhận xét: $(**)$ còn có thể chứng minh bằng nguyên lý cực hạn. Khi xuất hiện đại lượng $a^2+b^2$ ta thường nghĩ tới một bổ đề quen thuộc :

*Cho $p$ là một số nguyên tố dạng $4k+3$ và 2 số nguyên $a, b$ thỏa mãn $p|a^2+b^2$. Khi đó ta có $p|a$ và $p|b$.*

Cũng sẽ là khó khăn nếu ta chứng minh nếu $p$ là số nguyên tố sao cho $f(p) = 0$ thì $p$ là số nguyên tố dạng $4k+3$ nếu như không thông qua một đánh giá trung gian. Nhớ lại rằng $-1$ là số chính phương mod$p$ (do $(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{2k} = 1 \bmod (p)$) hay sẽ tồn tại $a$ sao cho $p|a^2+1$. Cho $P_b(x,1)$ cũng là một phản xạ thường gặp khi ta đã biết các giá trị hàm ở các điểm đặc biệt.

Ngay sau đây cũng là một ví dụ cũng mang sắc màu bậc của phần tử.

$\nabla$

**Ví dụ 7.** *Cho* $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *là 2 hàm số thỏa mãn :*

*i,* $g$ *là toàn ánh.*

*ii,* $2f(n)^2 = n^2 + g(n)^2$ *với mọi số nguyên dương* $n$*.*

*Nếu* $|f(n) - n| \leq 2004\sqrt{n}$ *với* $\forall n$ *thì* $f$ *có vô số điểm bất động.*

*( Chú thích* $a$ *được gọi là điểm bất động của hàm* $f$ *trên* $D$ *nếu* $a \in D$ *và* $f(a) = a$ *).*

Giải : Đầu tiên ta có theo **Định lý Dirichlet** về số nguyên tố thì dãy số $(p_i)$ với $p_i$ là các số nguyên tố dạng $8k + 3$ là 1 dãy vô hạn. Từ đó với mọi $n$ thì:

$$\left(\frac{2}{p_n}\right) = (-1)^{(p_n^2-1)/8} = -1$$

Ở đây, $\left(\dfrac{2}{p_n}\right)$ là ký hiệu **Legendre** .

Sử dụng điều kiện i, ta tìm được dãy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sao cho $g(x_n) = p_n$, $\forall n$. Ta có :

$$2f(x_n)^2 = x_n^2 + p_n^2$$

$$\Rightarrow 2f(x_n)^2 \equiv x_n^2 \pmod{p_n}$$

Vì $\left(\dfrac{2}{p_n}\right) = -1$ nên $\begin{cases} p_n | f(x_n) \\ p_n | x_n \end{cases}$ .

Suy ra tồn tại 2 dãy số nguyên dương $(a_n)$ và $(b_n)$ sao cho :

$$\begin{cases} x_n = a_n . p_n \\ f(x_n) = b_n . p_n \end{cases}$$

Từ ii, ta được $2b_n^2 = a_n^2 + 1$.

Cuối cùng, sử dụng giả thiết : $|f(n) - n| \leq 2004\sqrt{n}$, ta có :

$$\frac{2004}{\sqrt{x_n}} \geq |\frac{f(x_n)}{x_n} - 1| = |\frac{b_n}{a_n} - 1|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n^2+1}}{a_n} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Suy ra tồn tại $N_0$ sao cho

$$a_n = b_n = 1, \forall n \geq N_0$$

Vậy $f(p_n) = p_n, \forall n \geq N_0$ ( điều phải chứng minh ).

Nhận xét : Cũng như ở ví dụ trên, một câu hỏi được đặt ra là việc xây dựng dãy $(p_i)$ không hề tự nhiên. Tuy vậy bằng lối suy nghĩ tương tự trên, ta hình thành ý tưởng. Xuất phát với bài toán :
" Tìm tất cả các số nguyên tố $q$ sao cho phương trình $2x^2 - y^2 = q$ có nghiệm nguyên dương."
Phương trình trên dẫn đến:

$$2x^2 \equiv y^2 \bmod (q) \Longleftrightarrow 2^{(q-1)/2}.x^{p-1} \equiv y^{p-1} \bmod (q) \Longleftrightarrow 2^{(q-1)/2} \equiv 1 \bmod (q)$$

( Theo định lý Femart ). Từ đó ta dự đoán được dạng của $q$. Nhìn chung, khi gặp các bài dạng ví dụ 1, 2 thì đòi hỏi ta cần có một số kiến thức nền tảng về bậc của phần tử và điển hình là các bài toán về biểu diễn số nguyên tố.

Ví dụ ngay sau đây thực sự là 1 ví dụ đậm màu sắc số học từ đề bài cho đến lời giải.

$\nabla$

**Ví dụ 8.** *Tìm tất cả các toàn ánh $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho mới mọi $m, n \in \mathbb{N}$ thì:*

$$f(m)|f(n) \Leftrightarrow m|n$$

GIẢI : Kí hiệu $P \subset \mathbb{N}$ là tập tất cả các số nguyên tố. Xét đơn ánh $g : P \to P$. Nếu $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ thì $f(n) = \prod_{i=1}^{k} g(p_i)^{\alpha_i}$.

Kí hiệu $\tau(n)$ là số ước nguyên dương của $n$. Ta có nhận xét sau $\tau(n) = f(\tau(n))$ ( do $f$ là toàn ánh ).Với mỗi số nguyên tố $p$, $f(p)$ chỉ có đúng 2 ước nguyên tố nên nó cũng là số nguyên tố. Xác định $g$ như trên , từ đó ta có $f(p) = g(p)$. Ta sẽ chứng minh $g$ là song ánh. Thật vậy , do $f$ toàn ánh nên $g$ là toàn ánh. Vì vậy $g$ là song ánh. Tiếp theo ta chứng minh $f(p^k) = g(p)^k$ với $k$ là số nguyên dương bằng quy nạp.

$\star$ $k = 1$ hiển nhiên.

$\star$ Giả sử $k - 1$ đúng. Ta có $f(p^k)$ chia hết cho $1, g(p), g(p)^2, ..., g(p)^{k-1}$ và ngoài ra không chia hết cho số nguyên dương nào khác. Do đó $\tau(f(p^k)) = \tau(p^k) = k + 1$. Nếu $k > 1$ , khi $f(p^k)$ có thêm 1 ước nguyên tố nữa thì $\tau(f(p^k)) \geq 2k > k + 1$ vô lý. Từ đó $f(p^k)$ là lũy thừa của $g(p)$ và nó có $k + 1$ ước nên $f(p^k) = g(p)^k$.

Giả sử $n$ là 1 số nguyên dương , $p$ là 1 số nguyên tố không chia hết $n$. Ta sẽ đi chứng minh:

$$f(n).f(p^k) = f(np^k), \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Từ $\gcd(n, p^k) = 1$ ta có $\tau(n).\tau(p^k) = \tau(n.p^k)$. Mặt khác $g(p)^k | f(n.p^k)$ và $g(p)f(n)$. Do vậy mọi ước của $f(n)$ và $g(p)^k$ chia hết $f(np^k)$ và mọi ước của $g(p)^k$ và $f(n)$ là ước của $f(n.p^k)$. Lại có:

$$\tau(f(n).f(p^k)) = \tau(n.p^k) = \tau(f(n.p^k))$$

Nếu $f(np^k)$ có ước khác với các ước của $f(n)$ và $g(p)^k$ thì $\tau(f(n).f(p^k)) > \tau(f(n.p^k))$ vô lý. Vậy:

$$f(np^k) = f(n).g(p)^k = f(np^k)$$

Từ các nhận xét trên ta có hàm $f$ được xây dựng như trên là duy nhất .

$\nabla$

**Ví dụ 9:** . ( **Mathlinks contest** ) *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:*

*a, Nếu $a|b$ thì $f(a) \geq f(b)$.*

*b, $f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b)$*

*Với $a, b$ là các số tự nhiên.*

Giải .Nếu $f(x)$ là một nghiệm hàm , $f(x) + c$ cũng là một nghiệm hàm. Do đó ta có thể giả sử rằng $f(1) = 0$.Chú ý rằng từ $1|n$, $f(n) \leq 0$ $\forall n$.

1) Từ $f(1 \times 1) + f(1 + 1) = f(1) + f(1)$, suy ra $f(2) = f(1)$ hay $f(2) = 0$

2) Gọi $n$ là số nguyên sao cho $-1$ là số chính phương mod$n$. Do đó tồn tại $a$ thỏa mãn $a^2 = -1 + kn$.
Suy ra

$$f(a) + f(a^2 + 1) = f(a) + f(1)$$

$$\Longleftrightarrow f(a^2 + 1) = f(kn) = f(1) = 0$$

nhưng $f(n) \geq f(kn) = f(a^2 + 1)$ và $f(n) \leq f(1)$ nên $f(n) = f(1) = 0$
Do đó nếu tồn tại $u$ sao cho $u^2 = -1 \pmod n$ thì $f(n) = 0$

3) Từ (2) dễ thấy $f(p) = 0$ với mọi $p$ nguyên tố và $p = 1 \pmod 4$ .

4) Giả sử $f(a) = f(b) = 0$ và $f(ab) < f(a) = f(b) = 0$ thì $f(a^2 + b^2) > 0$, vô lý . Do đó nếu $f(a) = f(b) = 0$thì $f(ab) = 0$.

5) Gọi $a, b$ là 2 số nguyên thỏa mãn $\gcd(a, b) = 1$, khi đó, gọi $p$ là một số chia hết $a^2 + b^2$. Ta có $a^2 + b^2 = 0 \pmod p$. Ta có một bổ đề quen thuộc, nếu $p$ là số nguyên tố dạng $4k+3$ thì với mọi bộ $a, b$ thỏa mãn $p \mid a^2 + b^2$ ta sẽ có $p \mid a$ và $p \mid b$. Vì $\gcd(a, b) = 1$ nên nếu $p \mid a^2 + b^2$ thì $p$ chỉ có dạng $4k+1$ . Từ (4) ta có $a^2 + b^2$ là tích của các số nguyên tố $p_i$ thỏa mãn $f(p_i) = 0$ nên $f(a^2 + b^2) = 0$. Từ $f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b)$ ta có $\gcd(a, b) = 1 \Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$.

6) Cho $a = bc$ vào phương trình đã cho , ta có $f(b^2c) + f(b^2(c^2 + 1)) = f(bc) + f(b)$. Nhưng $f(b) \geq f(b^2(c^2 + 1))$ và $f(bc) \geq f(b^2c)$. Do đó $f(b^2c) = f(bc)$. Chọn $c = 1$, $f(b^2) = f(b)$. Tiếp theo chọn $c = b$), $f(b^3) = f(b^2)$. Bằng quy nạp ta có:

$$f(b^k) = f(b) \ \forall k \geq 1$$

7) Sử dụng (5) và (6) ta có $f(\prod p_i^{n_i}) = \sum f(p_i)$ ở đây $p_i$ là các số nguyên tố.

Xét hàm số $f(x)$ xác định bởi :

$\star$ $f(1) = 0$

$\star$ $f(2) = 0$

$\star$ $f(p) = 0$ với các số nguyên tố $p$ sao cho $p = 1 \pmod 4$ và $p = 2$.

$\star$ $f(p) = a_p \leq 0$ với mọi số nguyên tố $p$ còn lại ( ở đây $a_p$ là các số nguyên không dương.)

$\star$ $f(\prod p_i^{n_i}) = \sum f(p_i)$ ở đây $p_i$ là các số nguyên tố.
Ta có thể chứng minh $f(x)$ thỏa mãn điều kiện :
Hiển nhiên nếu $a|b$ thì $f(a) \geq f(b)$

$f(1 \times 1) + f(1^2 + 1^2) = f(1) + f(1) = 0$

$f(a \times 1) + f(a^2 + 1) = f(a) + f(1)$, ta có mọi ước nguyên tố $p$ của $a^2 + 1$ đều thỏa mãn $p = 1 \pmod 4$.
Với 2 số nguyên $a, b > 1$ bất kì, gọi :
- $p_i$ là các ước nguyên tố của $a$ không chia hết $b$.
- $q_i$ là các ước nguyên tố của $b$ không chia hết $a$.
- $r_i$ là các ước nguyên tố của $a$ và $b$.

$f(a) = \sum f(p_i) + \sum f(r_i)$.

$f(b) = \sum f(q_i) + \sum f(r_i)$.

$f(ab) = \sum f(p_i) + \sum f(q_i) + \sum f(r_i)$.

$f(a^2 + b^2) = \sum f(r_i) + \sum f(s_i)$.
Ở đây $s_i$ là các ước nguyên tố của $A = (\dfrac{a}{\gcd(a,b)})^2 + (\dfrac{b}{\gcd(a,b)})^2$. Nhưng tương tự (5) ta có các ước nguyên tố của $A$ là các số nguyên tố thỏa $s_i = 1 \pmod 4$và do đó $f(A) = 0$.
Suy ra $f(a^2 + b^2) = \sum f(r_i)$.

Hay $f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b)$.

Và ta có nghiệm của phương trình hàm là :

Cho $M$ là một số nguyên, hàm $f$ được xác định như sau:

$\star$ $f(1) = M$.

$\star$ $f(2) = M$.

$\star$ $f(p) = M$ với mọi số nguyên tố $p$ thỏa mãn $p = 1 \pmod 4$.

$\star$ $f(p) = M + a_p$ với mọi số nguyên tố $p$ còn lại (ở đây $a_p$ là các số nguyên không dương ).

$\star$ $f(\prod p_i^{n_i}) = M + \sum(f(p_i) - M)$ ở đây $p_i$ là các số nguyên tố.

### 5.3 Bài tập áp dụng.

21. *Cho $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ là 1 song ánh. Chứng minh 2 điều kiện sau là tương đương:*

    *1, $f(m.n) = f(m).f(n)$*

    *2, $f(m)|f(n) \Leftrightarrow m|n$.*

22. ( Một chút mở rộng cho **Ví dụ 2** ) *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn:*

    *a, $f(x + 22) = f(x)$*

    *b, $f(x^2y) = f(x)^2 f(y)$*

    *với mọi $x, y \in \mathbb{Z}^2$.*

23. ( **China 1996** ) *Cho $A = \{1; 2; ...; 17\}$ và hàm số $f : A \to A$. Xác định $f^{[1]}(x) = f(x)$ và $f^{[k+1]}(x) = f(f^{[k]}(x))$ với $k \in \mathbb{N}$. Tìm số tự nhiên lớn nhất $M$ sao cho tồn tại đơn ánh $f : A \to A$ thỏa mãn các điều kiện sau :*

    *1, Nếu $m < M$ và $1 \le i \le 16$ thì:*

    $$f^{[m]}(i + 1) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm 1 \bmod 17$$

    *2, Với $1 \le i \le 16$ thì :*

    $$f^{[M]}(i + 1) - f^{[M]}(i) \equiv \pm 1 \bmod 17$$

24. *Với mỗi số nguyên dương $k$ tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn :*

*1,* $f(1995) = 1996$

*2,* $f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\gcd(x, y))$ *với mọi* $x; y \in \mathbb{N}$ *?*

25. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn :*

*1,* $f(m) = 1$ *khi và chỉ khi* $m = 1$.

*2, Nếu* $d = \gcd(m, n)$, *thì* $f(mn) = \dfrac{f(m)f(n)}{d}$.

*3, Với mọi* $m \in \mathbb{N}$, *ta có* $f^{2000}(m) = m$.

26. *Cho hàm số $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ và thỏa mãn điều kiện.*

*1,* $f(0) = 0, f(1) = 1$

*2,* $f(n + 2) = 23 \cdot f(n + 1) + f(n), n = 0, 1, \ldots.$

*Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$,tồn tại số $d \in \mathbb{N}$ sao cho $m | f(f(n)) \Longleftrightarrow d | n$.*

27. *Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:*

1, $f(1) = a$

2, $f(n^2 f(m)) = mf(n)^2$

*Chứng minh rằng:*

*a,* $f(m).f(n) = af(mn)$

*b,* $a \mid f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

28. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn:*

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + 2y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

29. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:*

$$\gcd(f(m), f(n)) = 1 \Longleftrightarrow \gcd(m, n) = 1$$

30. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $f(f(n)) + f(n + 1) = 2n + 3$ và $f(n) \geq n - 1$.*

31. *Cho* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$*:*

    *1,* $f(p) = 1\forall$ *với mọi số nguyên tố* $p$

    *2,* $f(ab) = af(b) + bf(a)$

    *Chứng minh :*

    *a, Tồn tại duy nhất một hàm số* $f$ *.*

    *b, Tìm* $n$ *sao cho* $f(n) = n$*.*

32. *Cho* $f$ *là hàm số* $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$*, và thỏa mãn các điều kiện:*

    *1,* $f(0) = 0, f(1) = 1,$

    *2,* $f(n+2) = 23 \cdot f(n+1) + f(n), n = 0, 1, \ldots.$

    *Chứng minh với mỗi* $m \in \mathbb{N}$*, tồn tại số* $d \in \mathbb{N}$ *sao cho* $m|f(f(n)) \Leftrightarrow d|n$*.*

33. *Cho* $g(n)$ *là hàm số xác định bởi :*

    $$g(1) = 0, g(2) = 1$$

    *và*

    $$g(n+2) = g(n) + g(n+1) + 1, n \geq 1.$$

    *Chứng minh nếu* $n > 5$ *là số nguyên tố thì* $n$ *chia hết* $g(n) \cdot (g(n) + 1)$*.*

34. *Cho đa thức* $P(x) \in \mathbb{Z}[x], P(x) = a_0 + \cdots + a_{p-1}x^{p-1}$ *và số nguyên tố* $p > 2$ *thỏa mãn : Nếu* $p$ *không chia hết* $a - b$ *thì* $p$ *không chia hết* $P(a) - P(b)$*.Chứng minh* $p|a_{p-1}$*.*

35. *Cho hàm số* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *và* $f$ *không là một đa thức. Giả sử* $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$ *,* $a \equiv b \bmod m$ *thì ta có* $f(a) \equiv f(b) \bmod m$*. Chứng minh với mọi số nguyên dương* $k$ *ta có :*

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{n^k} = +\infty$$

36. ( **Việt Nam 1997** ) *Cho hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ *xác định bởi* $f(0) = 2; f(1) = 503; f(n+2) = 503f(n+1) - 1996f(n)$*. Với* $k \in \mathbb{N}$ *chọn các số nguyên* $s_1, s_2, ..., s_k$ *không bé hơn* $k$ *và cho* $p_i$ *là ước nguyên tố của* $f(2^{s_i})$*. Chứng minh rằng :*$\sum p_i \mid 2^t$ *khi và chỉ khi* $k \mid 2^t$*.*

37. ( **Balkan MO 2006, Bài số 4** ) *Cho số nguyên m và dãy số* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *xác định bởi* $a_0 = a \in \mathbb{N}$, *và*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \textit{nếu } a_n \equiv 0 \pmod 2, \\ a_n + m & \textit{trong trường hợp còn lại .} \end{cases}$$

*Tìm mọi giá trị của a sao cho* $a_n$ *là dãy tuần hoàn.*

38. *Cho p là số nguyên tố lẻ và q là một số nguyên không chia hết cho p. Giả sử* $f : \{1, 2, 3, ...\} \to \mathbb{R}$ *là một hàm thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

*1,* $\dfrac{f(k)}{p}$ *không phải là số nguyên với mỗi* $k = 1, 2, ..., p-1$.

*2,* $f(k) + f(p-k)$ *là số nguyên chia hết cho p với mỗi* $k = 1, 2, ..., p-1$.

*Khi đó*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \lfloor f(k) \cdot \frac{q}{p} \rfloor = \frac{q}{p} \sum_{k=1}^{p-1} f(k) - \frac{p-1}{2}$$

*Bài toán trên có thể dùng để chứng minh các bài toán.*

***Bài 1.*** *Cho p, q là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \lfloor \frac{kq}{p} \rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

***Bài 2.*** *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \lfloor \frac{k^3}{p} \rfloor = \frac{(p-2)(p-1)(p+1)}{4}$$

***Bài 3.*** *Cho p là nguyên tố lẻ và q là số nguyên không chia hết cho p. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \lfloor (-1)^k \frac{k^2 q}{p} \rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

***Bài 3.*** *Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} \equiv \frac{p+1}{2} \pmod p$$

## 6 Hàm số và hệ đếm cơ số.

### 6.1 Lý thuyết.

Hệ đếm cơ số là một phần quan trọng liên quan đến thuật toán trong tin học. Trong phân môn toán, hệ đếm cơ số có thể dùng để xây dựng nhiều dãy số có tính chất rất thú vị. Nhìn trên phương diện của một cơ số khác, có thể rất khó nhận ra quy luật, nhưng nếu chọn đúng cơ số thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản. Xin nhắc lại là với $b$ là một số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 thì mọi số nguyên dương $N$ đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$N = \overline{a_1a_2...a_k} \mid_{(b)} = a_1b^{k-1} + a_2b^{k-2}... + a_k$$

với $1 \leq a_1 \leq b-1, 0 \leq a_2, ..., a_k \leq b-1$.

Đó là định nghĩa hệ đếm cơ số dạng cơ bản nhất. Tuy nhiên, có thể lấy một dãy số nguyên bất kỳ (có trị tuyệt đối tăng nghiêm ngặt) làm hệ đếm cơ số ví dụ hệ đếm cơ số (-2), hệ đếm cơ số Fibonacci (3 = 4 - 2 + 1, 17 = 13 + 3 + 1 ...). Các hệ đếm thường sử dụng nhất là hệ đếm cơ số 2 và cơ số 3.

### 6.2 Một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện:*

1, $f(1) = 1$, $f(3) = 3$.

2, $f(2n) = f(n)$.

3, $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$.

4, $f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n)$.

Giải. Hiển nhiên nếu tồn tại hàm số thì nó là duy nhất. Ta chứng minh nếu trong biểu diễn nhị phân $n$ có dạng $\overline{a_1a_2...a_m} \mid_2$ thì $f(n) = \overline{a_ma_{m-1}...a_1} \mid_2$. Thật vậy:

⋆ Với $n = 1, 3$ thì kết luận hiển nhiên đúng.

⋆ Giả sử với mọi $k < n$ thì kết luận đúng. Ta xét 2 trường hợp sau:

**Trường hợp 1**. Nếu $n$ là số chẵn, đặt $n = 2k$. Giả sử $k = \overline{a_1a_2...a_m} \mid_2$ thì $n = \overline{a_1a_2...a_m0} \mid_2$. Khi đó kết luận hiển nhiên đúng.

**Trường hợp 2**. Nếu $n$ là số lẻ. Đến đây, ta tiếp tục khoanh vùng giá trị của $n$.

$\star$ $n$ có dạng $4k+1$. Giả sử $k = \overline{a_1a_2...a_m}\ |_2$ thì $n = \overline{a_1a_2...a_m01}\ |_2$. Mặt khác, ta có :

$$u_k = \overline{a_{k-2}...a_2a_1}\ |_2$$

$$u_{2k+1} = \overline{1a_{k-2}...a_2a_1}\ |_2$$

Suy ra:

$$u_n = u_{2k+1} + (u_{2k+1} - u_k) = \overline{10a_{k-2}...a_2a_1}\ |_2$$

Kết luận đúng trong trường hợp này.

$\star$ $n$ có dạng $4k+3$. Tương tự.

Vậy hàm số chỉ ra đầu bài là hàm duy nhất thỏa mãn bài ra.

$\nabla$

**Ví dụ 2.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện:*

1, $f(1) = 1$.

2, $f(2n) = f(n)$.

3, $f(2n+1) = 1 + f(2n)$.

Giải. Cũng như ở ví dụ trên, ta nhận thấy nếu tồn tại hàm số thì nó là duy nhất. Tiếp theo ta chứng minh bằng quy nạp mệnh đề $f(n)$ chính là số số 1 trong biểu diễn nhị phân của $n$. Thật vậy:

$\star$ Với $n = 1$, hiển nhiên đúng.

$\star$ Giả sử với mọi $k < n$ thì cũng đúng. Xét khi $n = k+1$. Ta xét 2 trường hợp sau:

**Trường hợp 1**. Nếu $k$ là số chẵn, đặt $k = 2m$. Khi đó :

$$f(k+1) = f(2m+1) = 1 + f(2m) = 1 + f(m)$$

Nếu $m = \overline{a_1a_2...a_n}\ |_2$ thì $2m+1 = \overline{a_1a_2...a_n1}\ |_2$ Suy ra số chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của $2m+1$ và $m$ hơn kém nhau 1. Kết luận đúng trong trường hợp này.

**Trường hợp 2**. Nếu $k$ là số lẻ, đặt $k = 2m+1$. Khi đó :

$$f(k+1) = f(2(m+1)) = f(m+1)$$

Tương tự trên thì số chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của $2m+2$ chính là bằng số chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của $m$.

Chứng minh kết thúc.

$\nabla$

**Ví dụ 3.** *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thoả mãn các điều kiện:*

1, $f(1) = 1$.

2, $f(2n+1) = f(2n) + 1$.

3, $f(2n) = 3f(n)$.

GIẢI. Theo tính duy nhất của hàm số, ta chứng minh quy nạp mệnh đề sau : Nếu khi viết $n$ trong hệ nhị phân được $\overline{a_k a_{k-1} ... a_0} \mid_2$ thì $f(n) = \sum_{i=0}^{k} 3^i a_i$.

$\star$ Với $n = 1$, hiển nhiên đúng.

$\star$ Giả sử $2n+1 = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 1} \mid_2$, suy ra $2n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 0} \mid_2$ và $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1} \mid_2$. Kiểm tra các giả thiết:

$$f(2n+1) = \sum_{i=1}^{k} 3^i a_i + 3^0.1$$

$$= \sum_{i=1}^{k} 3^i a_i + 3^0.0 + 3^0.1 = f(2n) + 1$$

Và:

$$f(2n) = \sum_{i=1}^{k} 3^i a_i = 3(\sum_{i=1}^{k-1} 3^i a_i) = 3f(n)$$

Bài toán giải hoàn chỉnh.

$\nabla$

**Ví dụ 4.** ( **Bài toán cổ Josephus** [1] ) *Giả sử Josephus có* $n-1$ *người bạn,* $n$ *người này đứng thành vong tròn đánh số từ* 1 *đến* $n$ *theo chiều kim đồng hồ tự sát theo nguyên tắc, người thứ nhất cầm dao đếm 1 rồi tự sát, người thứ 2 đếm 2 rồi tự sát. Quá trình dừng lại khi còn 1 người. Gọi* $f(n)$ *là hàm số biểu thị vị trí của người sống sót đó. Tìm* $f(n)$.

GIẢI:

⋆ Nếu $n = 2k$. Sau vòng 1, còn người ở vị trí lẻ. Số người này đánh lại thành $1, 2, ..., k$. Nếu lượt trước người đó có số $2i - 1$ thì sau đó mang số $i$. Người sống sót có số cũ là $f(2k)$, sau mang số mới là $f(k)$. Vậy ta có:

$$f(2k) = 2f(k) - 1$$

⋆ Nếu $n = 2k + 1$. Sau vòng 1 ( ta ngầm hiểu có $2k + 2$ người bằng cách tính trùng người thứ 1 thành $2k + 2$ ), còn lại những người số $3, 5, ..., 2k + 1$, đánh số lại là $1, 2, ..., k$. Nếu lượt trước người đó có số $2i + 1$ thì sau đó mang số $i$. Người sống sót có số cũ là $f(2k + 1)$, sau mang số mới là $f(k)$ .Vậy ta có:

$$f(2k + 1) = 2f(k) + 1$$

Như vậy thì $f(1) = 1, f(2k) = 2f(k) - 1, f(2k + 1) = 2f(k) + 1$. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng nếu trong biểu diễn cơ số 2 của $n$ là $\overline{a_k a_{k-1} ... a_1} \mid_2$ ,$a_k = 1$, với $i \neq k$ $a_i \in \{0, 1\}$ thì $f(n) = \overline{a_{k-1} ... a_1 a_k} \mid_2$. Thật vậy.

⋆ Với $n = 1$ hiển nhiên đúng.

⋆ Giả sử với mọi $k < n$ thì mệnh đề đúng. Ta có 2 trường hợp:

**Trường hợp 1**. Nếu $n$ là số chẵn, đặt $n = 2m$. Khi đó nếu như $m = \overline{b_k b_{k-1} ... b_1} \mid_2$ thì $2m = \overline{b_k b_{k-1} ... b_1 0} \mid_2$. Và

$$f(2m) = 2f(m) - 1 = 2.\left(b_{k-1}2^k + ... + b_1.2 + 1\right) - 1 = \overline{b_{k-1} ... b_1 01} \mid_2$$

Đúng.

**Trường hợp 2**. Nếu $n$ là số lẻ, đặt $n = 2m + 1$. Khi đó nếu như $m = \overline{b_k b_{k-1} ... b_1} \mid_2$ thì $2m + 1 = \overline{b_k b_{k-1} ... b_1 1} \mid_2$. Và

$$f(2m + 1) = 2f(m) + 1 = 2.\left(b_{k-1}2^k + ... + b_1.2 + 1\right) + 1 = \overline{b_{k-1} ... b_1 11} \mid_2$$

Đúng. Bài toán giải hoàn chỉnh.

[1] ***Câu chuyện truyền thuyết.***

*Vaspasien là Hoàng đế La Mã trong thế kỉ thứ nhất (từ năm 69 đến năm 79, theo Dương lịch). Thời ấy có Josephus là nhà viết sử bị Vaspasien truy lùng vì can tội chống lại triều đình. Tục truyền rằng Vaspasien tìm được chỗ ẩn náu của 100 người chống đối và kêu gọi họ ra hàng, nếu không sẽ tàn sát tất cả. Đa số muốn tự sát nhưng có một người nói với Josephus là vì hoàn cảnh riêng nên muốn đầu hàng. Josephus hiểu hoàn cảnh của người này và đặt ra quy tắc như trong bài toán trên. Hỏi Josephus phải xếp như thế nào để người kia sống ?*

$\nabla$

**Ví dụ 5.** *Tồn tại hay không hàm số* $f : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{N}$ *thỏa mãn:*

*1.* $f$ *là đơn ánh.*

*2.* $f(ab) = f(a) + f(b)$ *với mọi* $a, b \in \{1, 2, ..., n\}$ *và* $ab \leq n$.

GIẢI: Ta có thể chỉ ra hàm số $f$ như sau: Kí hiệu các số nguyên tố bé hơn hoặc bằng $n$ theo thứ tự tăng dần là $p_1, p_2, ..., p_k$. Khi đó, nếu $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, \alpha_i \in \mathbb{N}, \alpha_i < n+1$ thì $f(p_i) = (n+1)^i$, $f(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(n+1)$. Ta chứng minh hàm số này thỏa mãn điều kiện.

Thật vậy, với $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}, b = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$ ( có ít nhất một giá trị $\alpha_i$ và $\beta_j$ khác nhau ), thì $f(a) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(n+1)$ và $f(b) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i(n+1)$, hiển nhiên ta chỉ có thể biểu diễn $f(a), f(b)$ một cách duy nhất sang hệ cơ số $n+1$ và vì thế $f(a) \neq f(b)$.
Mặt khác:

$$f(ab) = f(\prod_{i=1}^{k}(p_i)^{\alpha_i+\beta_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i + \beta_i).f(p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i.f(p_i) + \sum_{i=1}^{k}\beta_i.f(p_i)$$

$$= f(a) + f(b),$$

Hay $f(ab) = f(a) + f(b)$.

### 6.3 Bài tập áp dụng.

39. ( **IMO 1988, bài số 3** ) *Hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên dương như sau*

*1,* $f(1) = 1, f(3) = 3$,

*2,* $f(2n) = f(n),\ f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),\ f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$

*Tìm số các giá trị n sao cho* $f(n) = n$, $1 \leq n \leq 1988$.

40. ( **IMO shortlist 2000** ) *Cho hàm số* $f:\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *thoả mãn các điều kiện:*

*1,* $f(4n)=f(2n)+f(n)$.

*2,* $f(4n+2)=f(4n)+1$

*3,* $f(2n+1)=f(2n)+1$.

*Chứng minh với mọi số nguyên dương* $m$, *số các số nguyên dương* $n$ *sao cho* $0\le n<2^m$ *và* $f(4n)=f(3n)$ *bằng* $f(2^{m+1})$.

41. *Hàm số* $f:\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ *xác định như sau*

*1,* $f(1)=2, f(2)=1$

*2,* $f(3n)=3f(n), f(3n+1)=3f(n)+2, f(3n+2)=3f(n)+1$.

*Tìm số các số* $n\le 2006$ *thỏa mãn* $f(n)=2n$.

42. *Hàm số* $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *xác định như sau*

*1,* $f(0,0)=0$.

*2,* $f(x,y)=\begin{cases} f(\lfloor\frac{x}{2}\rfloor,\lfloor\frac{y}{2}\rfloor) & \text{nếu } x+y\equiv 0 \pmod 2,\\ f(\lfloor\frac{x}{2}\rfloor,\lfloor\frac{y}{2}\rfloor)+1 & \text{nếu } x+y\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$

*ở đây* $x,y\in\mathbb{N}$. *Chứng minh:*

*a,* $f(x,y)=f(\lfloor\frac{x}{2},\lfloor\frac{y}{2}\rfloor)\Longleftrightarrow x$ *và* $y$ *cùng tính chẵn lẻ.*

*b,* $f(x,y)=f(\lfloor\frac{x}{2},\lfloor\frac{y}{2}\rfloor)+1\Longleftrightarrow x$ *và* $y$ *khác tính chẵn lẻ.*

*c,* $f(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$.

43. *Hàm số* $f:\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ *là số các số 1 trong khai triển nhị phân của* $n$. *Chứng minh rằng:*

*a,* $f(n^2)\le \frac{1}{2}f(n)(1+f(n))$ *và đẳng thức xảy ra tại vô số điểm.*

*b, Tồn tại dãy vô hạn* $(u_n)_{i=1}^{+\infty}$ *sao cho:*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(u_k^2)}{f(u_k)}=0$$

44. ( **China 1995** ) *Hàm số $f$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương như sau:*

*1,* $f(1) = 1$.

*2,* $3f(n)f(2n+1) = f(2n)\left(1 + 3f(n)\right)$.

*3,* $f(2n) < 6f(n)$.

*Tìm các số $k, m$ sao cho* $f(m) + f(k) = 293$.

45. *Hàm số $f$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương như sau:*

*1,* $f(3n) = 2f(n)$.

*2,* $f(3n+1) = f(3n) = 1$.

$f(3n+2) = f(3n) + 2$.

*Tìm tất các giá trị của* $n \in 0, 1, 2, ..., 2003$ *sao cho* $f(2n) = 2f(n)$.

46. ( **Balkan MO** ) *Hàm số $f$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương như sau:*

*1,* $f(2n+1)^2 - f(2n)^2 = 6f(n) + 1$.

*2,* $f(2n) \geq f(n)$.

*Hỏi có bao nhiêu giá trị $n$ mà* $f(n) \geq 2003$.

# 7 Ý tưởng liên kết hàm số và các bài toán rời rạc.

## 7.1 Lý thuyết.

Từ lâu ta đã biết việc sử dụng các đẳng thức truy hồi ( dãy số ) hay tính chất ánh xạ trong việc giải các bài toán rời rạc. Phương pháp này tỏ rõ lợi thế khi ta phải làm việc với những bài toán đòi hỏi tính xâu chuỗi các trường hợp nhỏ lẻ và bài toán tổng quát. Bằng những liên tưởng đó, ta chuyển về xử lý các bài toán đại số thuần thúy. Trong phần này, ta xét một cái nhìn theo hướng ngược lại, nơi đó, các bài toán hàm số được chuyển về các bài toán rời rạc. Ý tưởng này thực sự mới mẻ và tác giả mong muốn rằng sẽ có những trao đổi với các bạn các thầy cô sâu hơn về mảng bài tập này.

## 7.2 Một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** *Tồn tại hay không hàm số* $f : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *thỏa mãn với mọi số* $x, y, a \in \{1, 2, ..., n\}$.

*1,* $f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \in \mathcal{P}$.

*Và* $f(x, y)^2 = 1$ *trong trường hợp còn lại.*

*2,* $\sum_{i=1}^{n} f(a, i), \sum_{i=1}^{n} f(i, a) \in \{-1, 0, 1\}$.

*Với* $\mathcal{P}$ *là tập các số nguyên tố .*

Giải: Điều kiện 1 làm ta liên tưởng đến một tính chất số học quen thuộc :

*Một số nguyên tố dạng* $4k + 1$ *thì luôn viết được dưới dạng tổng 2 số chính phương.*

Tuy nhiên ta có thể thấy ngay đó là một mệnh đề *bẫy* vì việc kết nối 1 và 2 trở nên rất khó khăn. Hàm 2 biến giúp ta liên tưởng đến hệ trục tọa độ. Và bài toán sau xuất hiện: Ta cụ thể hóa 3 giá trị hàm số là 0, -1, 1 bằng 3 trạng thái của 1 điểm có thể có trên hệ trục tọa độ là không màu, màu trắng và màu đỏ, tương ứng. Suy ra trong 1 tập điểm nào đó, điều kiện 2 sẽ được đáp ứng, tức là số điểm đỏ và trắng hơn kém nhau không quá 1, để đơn giản chọn ngay đó là một đường thẳng.

Ta phát biểu lại bài toán:

*Cho một số hữu hạn điểm trong mặt phẳng, với mỗi điểm nguyên thì luôn có một các tô màu điểm đó với 2 màu đỏ và trắng sao cho mọi đường thẳng L chứa các điểm nói trên thì số điểm đỏ và trắng trên L hơn kém nhau không quá 1 điểm.*

Đây cũng chính là bài IMO 1986. Câu trả lời là có và dĩ nhiên, hàm số trong bài toán cũng tồn tại.

Một phát biểu khác của bài toán là ở dạng sau :

$$\nabla$$

**Ví dụ 1'.** *Tồn tại hay không hàm số* $f : \{1, 2, ..., n\} \times \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *thỏa mãn với mọi số* $x, y, a \in \{1, 2, ..., n\}$.

*1,* $f(x, y) \equiv x^2 - y^2 \bmod 3$.

*2,* $\mid \sum_{i=1}^{n} f(i, a) \mid \leq 3, \mid \sum_{j=1}^{n} f(a, j) \mid \leq 3$.

# 8 Một số bài toán chưa có lời giải.

Kết thúc chuyên đề này là một số bài toán chưa có lời giải ( theo nhiều nguồn sách vở và các website toán như mathlinks.ro hay nhiều trang web toán trong và ngoài nước khác ) . Đây thực sự là những bài toán hay và đương nhiên là rất khó.

**Bài số 1.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:*

$$f(f(n) - n) + f(f(n) + n) = 8n$$

$$\nabla$$

**Bài số 2.** *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ thỏa mãn:*

$$f(\sum_{k=1}^{n} x_k^m) = \sum_{k=1}^{n} f^m(x_k)$$

*Với $m, n$ là số tự nhiên.*

## Tài liệu


[1] Nguyễn Trọng Tuấn, Bài toán hàm số qua các kì thi Olimpic .

[2] Titu Andreescu - Contests Around the World 1996-1997, 1997-1998, 1999-2000 .

[3] Valentine Boju, Luis Funar - The Math Problems Notebook .

[4] Titu Andreescu , Razvan Gelca - Birkhauser Mathematical Olympiad Challenges .

[5] Edward Lozansky , Cecil Rousseau - Winning Solutions .

[6] Marko Radovanovi'c ( The IMO Compedium Group ) - Functional Equations .

[7] Christopher G. Small - Functional Equations and How To Solve Them .

[8] Trần Nam Dũng, Dương Bửu Lộc - Chuyên đề Phương trình hàm trên tập số nguyên .

[9] http://www.mathlinks.ro .

[10] http://www.mathsope.org .

[11] http://www.diendantoanhoc.net .