I- **LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI.**

1. **Lí do khách quan**:

Như ta đã biết Toán học là cơ sở của ngành khoa học và công nghệ. Trong bối cảnh của cuộc cách mạng công nghệ thông tin, trong xu thế tiến tới một xã hội thông tin thì vốn hiểu biết định lượng và văn hóa tính toán do giáo dục toán học đem lại sẽ cần cho mọi lực lượng lao động trong khoa học công nghệ và quản lý " Dù khó khăn đến đâu cũng phải tiếp tục thi đua dạy tốt và học tốt. Trên nền tảng giáo dục chính trị và lãnh đạo tư tưởng tốt phải nâng cao chất lượng văn hóa và chuyên môn nhằm thiết thực giải quyết các vấn đề do cách mạng nước ta đề ra và trong thời gian không xa đạt đỉnh cao của khoa học và kỹ thuật".

Thực tế nước ta và trên thế giới cho thấy. Nhiều học sinh giỏi Toán đã trở thành chuyên gia giỏi trong nhiều lĩnh vực của khoa học kỹ thuật, kinh tế quản lý và cả chính trị nữa. Xét về khía cạnh đào tạo con người, việc học tập môn Toán là một phương cách tốt để rèn luyện tư duy logic, tư duy sáng tạo, óc phê phán, để phát triển khả năng phân tích tìm kiếm. Toán học là một môn ngôn ngữ phổ quát mà mọi dân tộc trên thế giới đều có thể chia sẻ với nhau. Là một công cụ đầy sức mạnh cho khoa học và đời sống, toán học là một môn thể thao trí tuệ có sức hấp dẫn, thách thức tuổi trẻ không thua kém các trò chơi thể thao khác.

2. **Lí do chủ quan**:

Học toán mà đặc biệt là môn hình học, mỗi học sinh đều cảm thấy có những khó khăn riêng của mình. Nguyên nhân đó là nhiều học sinh chưa nắm vững các khái niệm cơ bản; các định lý; các tính chất của hình học. Chính vì vậy tôi đã chọn cho mình một sáng kiến kinh nghiệm mà ở đó chỉ gói gọn trong một đề tài nhỏ (bàn về định lý Mê-nê-la-uyt) nhằm giúp các em hiểu sâu hơn về định lý Mê-nê-la-uyt, một công cụ hỗ trợ đắc lực khi giải các bài toán về hình học.

Khi nhắc đến định lý Mê-nê-la-uyt, học sinh (ngay cả giáo viên Toán) thường nghĩ đây là một định lý khó, không phổ biến, ít áp dụng được nhiều cho hình học thuần túy. Có lần tôi hỏi học sinh giỏi ở trường rằng: Em có biết định lý Mê-nê-la-uyt không? Có vận dụng định lý đó để giải các bài toán hình học không? Đa phần nói không hoặc nếu có biết thì cũng không biết cách nào để vận dụng giải các bài toán hình học. Đôi khi có ý kiến duy ý chí cho rằng đã giải được bằng hình học thuần túy rồi thì giải chi bằng Mê-nê-la-uyt cho mệt ?

Đúng là Mê-nê-la-uyt khó thật, nó phức tạp và khó nhớ hơn các định lý khác. Theo tôi sở dĩ nó phức tạp và khó nhớ hơn các định lý khác là vì nó không được học trong chương trình phổ thông THCS mà chỉ dành cho bồi dưỡng học sinh giỏi, khó nhớ bởi chúng ta ít vận dụng về nó, cũng như trước đây ta thấy khó vì chưa thân thuộc với Talet, với Pi-Ta-Go. Qua bài viết này, tôi mong muốn các em học sinh và các bạn yêu toán hãy đổi cách nhìn về nó, xem nó là một người bạn thân thiết, song hành cùng với định lý Ta-Let, định lý Pitago.... mà ta đã được biết từ lâu.

II/ **MỤC ĐÍCH:**

Trong quá trình dạy toán của mình, tôi thấy đa số học sinh hay thỏa mãn trong học tập, bằng lòng và kết thúc công việc giải một bài toán hình học khi đã tìm được một cách giải nào đó, chưa chú ý tìm tòi cách giải khác. Học thuộc bài một cách cứng nhắc, không chịu suy nghĩ để các kiến thức thu được trở thành kiến thức sống, linh hoạt, sẵn sàng vận dụng trong bất cứ trường hợp nào - Đây là một điều rất nguy hiểm trong việc học toán (cũng như học các môn học khác).

Ta trong lớp được gọi là "Tuổi trẻ ", mà tuổi trẻ nói chung thì có nhiều sáng tạo. Học toán cũng vậy, chúng ta không phải chỉ học y như trong sách, hoặc chỉ làm những bài tập các thầy cô ra, như thế chưa đủ. Khi học đến một vấn đề nào đó, các em hãy suy nghĩ, tìm tòi, phát hiện thêm cách giải mới hoặc suy rộng ra xem vấn đề này có liên quan gì đến các vấn đề khác và trên cơ sở đó rút ra được những điều bổ ích gì. Phải luôn luôn luyện tập quan sát, mò mẫm, dự đoán... tức là tập dượt làm những việc mà một người nghiên cứu toán học phải làm, mà cụ thể là nghiên cứu Định lý Mê-nê-la-uyt để áp dụng giải các bài toán hình học thông thường và ngược lại. Đây chính là mục đích mà tôi muốn gửi đến các em học sinh cấp THCS trong sáng kiến kinh nghiệm của mình.

III/ CƠ SỞ VÀ THỜI GIAN TIẾN HÀNH:

Một thực trạng ở trường THCS Nhơn Lộc trước đây và hiện nay là:

1/ Về phía giáo viên:

+ Thiên về cung cấp bài giải cho học sinh một cách thụ động, chưa chú trọng dạy học sinh giải toán hình học.

+ Ít chú ý hướng dẫn học sinh suy nghĩ tìm tòi cách giải khác, hay hơn hoặc khai thác thêm ở bài toán vừa giải để phát huy tư duy sáng tạo trong học sinh.

+ Thường chú ý số lượng hơn chất lượng bài giải.

2/ Về phía học sinh:

+ Rất lúng túng trước đề bài toán hình học: Không biết làm gì, bắt đầu từ đâu, không phân biệt những cái đã cho với cái cần tìm.

+ Suy luận hình học còn kém, chưa hiểu thế nào là chứng minh, lập luận thiếu căn cứ, không chính xác lấy điều cần chứng minh làm giả thiết, suy nghĩ rất hời hợt máy móc.

+ Trình bày bài giải hình học không tốt: Hình vẽ không rõ ràng, chính xác, ngôn ngữ và kí hiệu tùy tiện, câu văn lủng củng không gọn, thiếu lo-gic.

Nhằm khắc phục phần nào những khuyết điểm trên đây tôi mạnh dạn nêu ra sáng kiến này, từ đó thống nhất ý kiến với nhau: Khi làm toán cần phải suy nghĩ sáng tạo, sáng tạo để khám phá ra những điều mà chưa ai bảo cho ta. Kinh nghiệm thể hiện trong sáng kiến được đúc kết qua 5 năm giảng dạy môn Toán tại trường THCS Nhơn Lộc, đặc biệt là năm học 2007 - 2008.

IV/ ĐỊNH LÝ MÊ-NÊ-LA-UYT VÀ CÁC BÀI TOÁN

Dưới đây là nội dung Định lý và các bài toán được giải theo hai cách nhằm giúp ta thấy được cái ưu khi sử dụng định lý. Đây cũng là biện pháp chính của sáng kiến - phương pháp suy nghĩ sâu sắc và sáng tạo (được giới thiệu theo cấp độ từ dễ đến khó để bạn đọc tiện theo dõi), luyện tập thói quen tò mò, thích khám phá ra những cái mới, cái đó cần thiết để chúng ta chẳng những trở thành một học sinh giỏi toán mà còn giỏi ở bất kì một môn học nào khác.

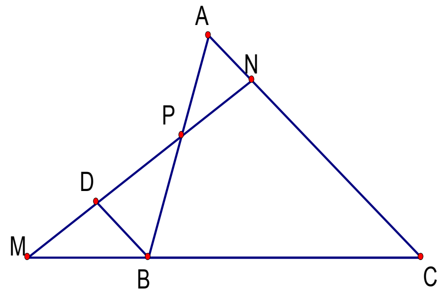
1/ Định lí Mê-nê-la-uyt:

Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB sao cho: hoặc cả ba điểm nằm trên phần kéo dài của ba cạnh; hoặc một điểm nằm trên phần kéo dài của một cạnh, còn hai điểm kia nằm trên hai cạnh của tam giác. Điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là: $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1$ (1)

Chứng minh:

Trường hợp 1: Trong ba điểm M, N, P có đúng hai điểm thuộc cạnh của tam giác, giả sử N và P.

Phần thuận: Giả sử M, N, P thẳng hàng. Ta chứng minh (1).



Kẽ BD // AC (D ∈ MN). Ta có: $\frac{PA}{PB}=\frac{AN}{BD};\frac{MB}{MC}=\frac{BD}{NC}$

Suy ra: $\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=\frac{BD}{NC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{AN}{BD}=1$ (đpcm).

Phần đảo: Ngược lại, giả sử N, P nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác ABC; M nằm trên phần kéo dài của BC. Gọi M' là giao điểm của NP và BC, suy ra M' nằm trên phần kéo dài của BC. (1)

Vì M' , N, P thẳng hàng nên ta có:

$\frac{M'B}{M'C}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1=\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}\Rightarrow\frac{M'B}{M'C}=\frac{MB}{MC}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M'\equiv M$. Hay ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Trường hợp 2: Cả ba điểm M, N, P đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh chứng minh tương tự.

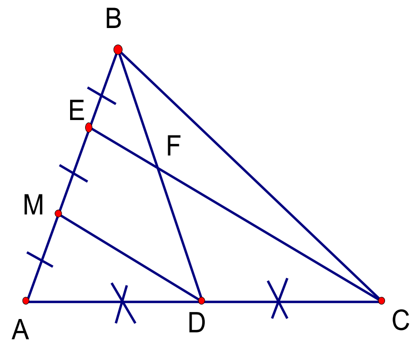
2/ Bài tập vận dụng:

<u>Bài toán 1</u>: Cho tam giác ABC, vẽ trung tuyến BD (D ∈ AC). Trên tia AB lấy một điểm E sao cho AE = 2BE; CE cắt BD tại F. Chứng minh $EF=\frac{1}{4}CE$.

Lời giải:

Cách 1: (không dùng Mê-nê-la-uyt).

Gọi M là trung điểm của AE, suy ra DM là đường trung bình của tam giác AEC $\Rightarrow DM\,//\,EC$ và $DM=\frac{EC}{2}$ ⇒ EF // MD ⇒ F là trung điểm của BD ⇒ EF là đường trung bình của tam giác BMD $\Rightarrow EF=\frac{MD}{2}=\frac{CE}{4}$. (đpcm)



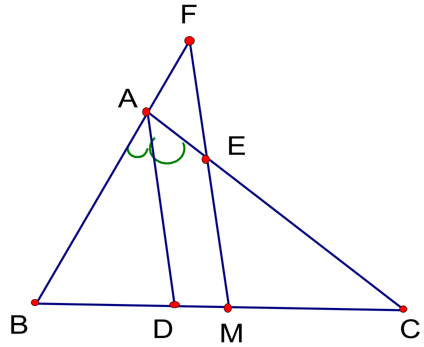
Cách 2: (dùng Mê-nê-la-uyt).

Xét tam giác EAC với ba điểm B, F, D thẳng hàng.

Ta có: $\frac{FE}{FC}\cdot\frac{DC}{DA}\cdot\frac{BA}{BE}=1\Rightarrow\frac{FE}{FC}=\frac{BE}{BA}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{FE}{EC}=\frac{1}{4}$ (đpcm).

<u>Bài toán 2</u>: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua M và song song với phân giác của góc BAC cắt AC, AB lần lượt ở E và F. Chứng minh rằng CE = BF.

<u>Lời giải:</u>



Cách 1: (không dùng Mê-nê-la-uyt). Ta giải vắn tắt như sau:

Từ AD // FM và ME // AD

$\Rightarrow \dfrac{BA}{BD} = \dfrac{BF}{BM}$ (1); $\dfrac{CE}{CM} = \dfrac{CA}{CD}$ (2)

Mặt khác theo tính chất đường phân giác có:

$\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{CA}{CD}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BF}{BM} = \dfrac{CE}{CM} \Rightarrow BF = CE$

(do BM = CM).

Cách 2: (dùng Mê-nê-la-uyt)

Xét tam giác ABC với ba điểm F, E, M thẳng hàng ta có:

$\dfrac{EA}{EC} \cdot \dfrac{MC}{MB} \cdot \dfrac{FB}{FA} = 1$ (1)

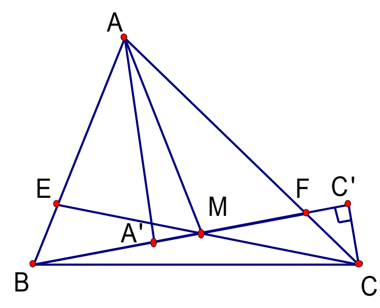
Do $\hat{A} = \hat{F} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ nên Δ AEF cân ở A. Suy ra AE = AF (2)

Từ (1) và (2) suy ra FB = EC. (đpcm)

<u>Bài toán 3</u>: Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB , AC lần lượt lấy các điểm E và F sao cho $BE = \frac{1}{4}BA; AF = \frac{4}{5}AC$. Gọi M là giao điểm của BF và CE, cho biết $S_{AMB} = 2$ (đơn vị diện tích). Tính S_{ABC} ? (Kí hiệu S_{XYZ} là diện tích của tam giác XYZ).

<u>Lời giải:</u>

Cách 1: (không dùng Mê-nê-la-uyt).



Gọi A', C' là chân đường vuông góc hạ từ A, C xuống BF.

Ta có:

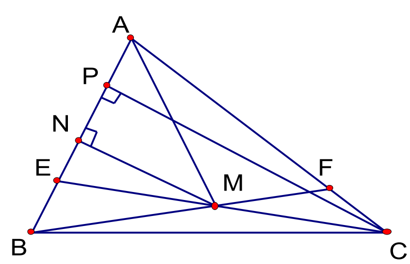
$\dfrac{S_{EMB}}{S_{AMB}} = \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{EMB} = \dfrac{1}{2}$ (đvdt)

$\dfrac{S_{BMC}}{S_{AMB}} = \dfrac{CC'}{AA'} = \dfrac{CF}{FA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{BMC} = \dfrac{1}{2}$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{BEC} = S_{EMB} + S_{BMC} = 1$ (đvdt)

$\Rightarrow S_{ABC} = 4S_{BEC} = 4$ (đvdt)

Cách 2: (dùng Mê-nê-la-uyt).



Gọi N, P là chân đường vuông góc hạ từ M, C xuống AB.

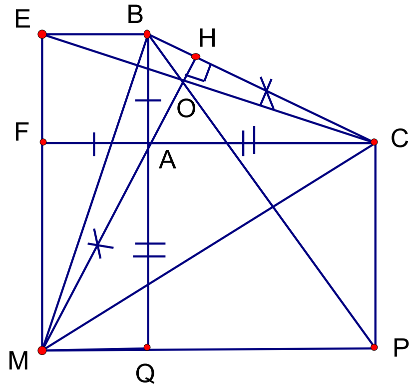
Áp dụng Định lí Mê-nê-la-uyt vào tam giác AEC với cát tuyến BMF ta có:

$$\frac{BE}{BA}.\frac{FA}{FC}.\frac{MC}{ME}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}.4.\frac{MC}{ME}=1 \Rightarrow MC = ME$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \frac{MN}{CP} = \frac{EM}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 2S_{AMB} = 4 \quad \text{(đvdt).}$$

<u>Bài toán 4:</u> Cho tam giác ABC vuông tại A. Dựng về phía ngoài các hình vuông ABEF; ACPQ. Đường thẳng BP cắt đường cao AH của tam giác ABC tại O. Chứng minh rằng ba điểm C, O, E thẳng hàng.

<u>Lời giải:</u>



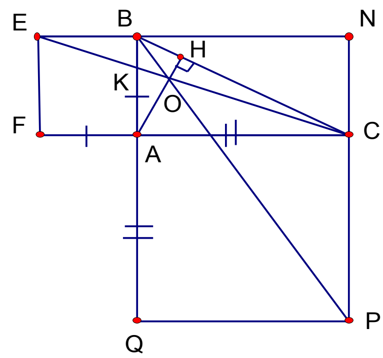
<u>Cách 1</u>: (không dùng Mê-nê-la-uyt)
Dựng hình chữ nhật AFMQ. Khi đó Δ ABC = Δ FAM (c-g-c) [illegible]. Suy ra 3 điểm M, A, H thẳng hàng. (1)

Ta có: Δ EBC = Δ BAM (c-g-c)

[illegible] (2).

Tương tự ta cũng có $BP \perp MC$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra EC, MH, BP là ba đường cao của tam giác BMC nên chúng đồng quy tại trực tâm của tam giác BMC. Nhưng BP cắt AH tại O hay O là trực tâm của tam giác BMC. Suy ra C, E, O thẳng hàng. (đpcm)



<u>Cách 2:</u> (dùng Mê-nê-la-uyt) Dựng hình chữ nhật ABNC.

Gọi K là giao điểm của EC và AB, lúc đó có:
$\frac{EB}{EN} = \frac{BK}{NC}; \frac{PO}{OB} = \frac{PC}{BK} \Rightarrow \frac{EB}{EN}.\frac{CN}{CP}.\frac{OP}{OB} = \frac{BK}{NC}.\frac{CN}{CP}.\frac{PC}{BK} = 1.$

Hay ba điểm C, O, E thẳng hàng (đpcm)

* Lời bàn:

1/ Để vận dụng Định lý Mê-nê-la-uyt, ta cần phải tìm ra một tam giác sao cho 2 trong 3 điểm E, O, C nằm trên hai cạnh, 1 điểm còn lại nằm trên phần kéo dài. Nhờ đó ta nghĩ đến việc dựng hình chữ nhật ABNC.

2/ Nếu hay suy xét bài toán bằng con mắt nhạy bén, nhìn bài toán ở nhiều góc độ khác nhau ta có hai cách phát biểu khác cho bài toán trên như sau:

Bài toán 1: Cho tam giác ABC, về phía ngoài dựng các tam giác vuông cân ABE (tại E); ACF (tại F). Chứng minh rằng CE, BF và đường cao AH của tam giác ABC đồng quy tại một điểm.

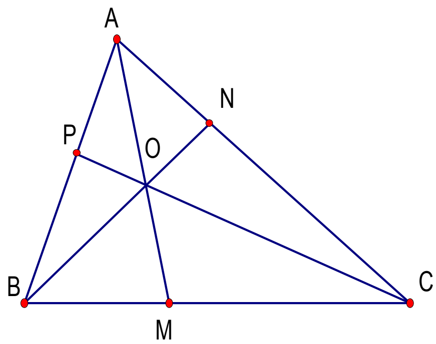
Bài toán 2: Cho hình vuông ABCD. I là điểm bất kỳ trên đường chéo AC. Qua I kẽ các đường thẳng song song với các cạnh của hình vuông cắt AB, BC, CD và DA lần lượt ở M, N, P, Q . Chứng minh rằng AN, CM và ID đồng quy tại một điểm.

Điều này đơn giản bạn đọc tự kiểm tra.

* Tuy trong 4 ví dụ trên chưa có cái gì là sáng tạo cho lắm, có thể chưa làm bạn thuyết phục với cách giải bằng Mê-nê-la-uyt. Nhưng nếu bạn rèn luyện như vậy thì chắc chắn bạn sẽ trở nên thân thuộc, biết quan sát, có cái nhìn nhạy bén hơn Định lý Mê-nê-la-uyt khi giải các bài toán hình học. Hãy tiếp tục vận dụng để giải các bài toán sau:

Bài toán 5: (Tạp chí toán học và tuổi trẻ - số 362)

Giả sử O là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. AO cắt BC tại M, BO cắt AC tại N, CO cắt AB tại P. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức $\left(\frac{OA.AP}{OP}\right)\left(\frac{OB.BM}{OM}\right)\left(\frac{OC.CN}{ON}\right)$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm O.



Lời giải :

Cách 1: (không dùng Mê-nêo Tố Tuổi Trẻ)

Ta có: $\frac{S_{AOP}}{S_{BOP}} = \frac{AP}{BP} \Rightarrow \frac{S_{AOP}}{S_{AOP} + S_{BOP}} = \frac{AP}{AB}$ (1)

Mặt khác: $\frac{S_{AOP} + S_{BOP}}{S_{BOM}} = \frac{OA}{OM}$ (2)

Từ (1) và (2) thu được: $\frac{S_{AOP}}{S_{BOM}} = \frac{OA.AP}{AB.OM}$ (3)

Tương tự cũng có: $\frac{S_{BOM}}{S_{CON}} = \frac{OB.BM}{BC.ON}$ (4)

$\frac{S_{CON}}{S_{AOP}} = \frac{OC.CN}{AC.OP}$ (5)

Nhân (3), (4) và (5) ta được: $\left(\frac{OA.AP}{AB.OM}\right)\left(\frac{OB.BM}{BC.ON}\right)\left(\frac{OC.CN}{AC.OP}\right)=1$

Vậy $\left(\frac{OA.AP}{OP}\right)\left(\frac{OB.BM}{OM}\right)\left(\frac{OC.CN}{ON}\right)= AB.BC.AC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm O.

Cách 2: (dùng Mê-nê-la-uyt)

Áp dụng Định lí Mê-nê-la-uyt lần lượt vào tam giác AMC với cát tuyến BON; tam giác BNC với cát tuyến AOM; tam giác BPC với cát tuyến AOM. Ta có:

$+\frac{OA}{OM}.\frac{BM}{BC}.\frac{NC}{NA}=1$

$+\frac{AN}{AC}.\frac{MC}{MB}.\frac{OB}{ON}=1 \Rightarrow \frac{OA}{OM}.\frac{BM}{BC}.\frac{NC}{NA}.\frac{AN}{AC}.\frac{OB}{ON}.\frac{OC}{OP}.\frac{AP}{AB}=1$

$+\frac{OC}{OP}.\frac{AP}{AB}.\frac{MB}{MC}=1$

Vậy $\left(\frac{OA.AP}{OP}\right)\left(\frac{OB.BM}{OM}\right)\left(\frac{OC.CN}{ON}\right)= AB.BC.AC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm O.

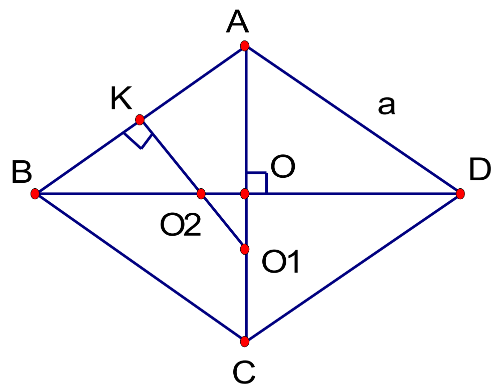
* Lời bàn:

1/ Việc sử dụng tỉ số diện tích tuy khá quen thuộc đối với học sinh lớp 8 nhưng vận dụng nó để tạo thành các đẳng thức (1), (2) và (3) liệu có dễ dàng không? Bên cạnh đó ta đối chiếu giả thiết thì cần tạo ra các tỉ số $\frac{OA}{OM};\frac{OB}{ON};\frac{OC}{OP}$ mà từ đó nghĩ sẽ dùng đến Mê-nê-la-uyt.

2/ Tiếp theo tôi bác bỏ ý kiến cho rằng: Một bài toán đã được giải bằng hình học thuần túy rồi thì không cần giải bằng định lý Mê-nê-la-uyt (vì gây khó cho học sinh). Tôi nào có ép học sinh nhất thiết phải sử dụng định lý Mê-nê-la-uyt để giải. Ý tưởng mà tôi nêu ra qua bài viết này ngoài mục đích như đã giới thiệu còn nhằm mục đích khuyến khích học sinh vận dụng định lý Mê-nê-la-uyt để giải các bài toán đã được giải. Nếu không làm được như vậy thì ít ra kiến thức và bộ não của các em đã được huy động, đưa các em tiến gần đến tập dược sáng tạo, từ đó tiến đến nghiên cứu khoa học. Để bảo vệ ý tưởng đó tôi xin giới thiệu cùng bạn đọc các bài tập sau nhằm:
+ Tập vận dụng Định lý Mê-nê-la-uyt.
+ Khai thác bài toán cũ để phát hiện kiến thức mới.

<u>Bài toán 6</u>: Cho hình thoi ABCD cạnh a. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và ABD. Chứng minh hệ thức $\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=\frac{4}{a^2}$.

<u>Lời giải:</u>



Giả sử trung trực các cạnh AB cắt AC tại O_2, cắt BD tại O_1. suy ra O_1 và O_2 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và ABC. Ta có $O_1A = R_1$; $O_2B = R_2$.

<u>*Cách 1:*</u> *(Không dùng Mê-nê-la-uyt)*

$$\Delta O_1AK \backsim \Delta BAO \Rightarrow \frac{O_1A}{AB}=\frac{AK}{AO}\Rightarrow \frac{R_1}{a}=\frac{a}{2AO}$$

$$\Delta O_2BK \backsim \Delta ABO \Rightarrow \frac{O_2B}{AB}=\frac{BK}{BO}\Rightarrow \frac{R_2}{a}=\frac{a}{2BO}$$

$$\Rightarrow 4(AO^2+BO^2)=a^4\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)\Rightarrow \frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=\frac{4}{a^2}.$$

(Với lưu ý $OA^2 + OB^2 = a^2$).

Đến đây ta đã có thể dừng lại, nhưng với một người yêu toán thì không. Hãy đặt vấn đề rằng có thể giải bài toán trên kia bằng định lý Mê-nê-la-uyt không? Và tôi đã dễ dàng tìm ra lời giải như sau:

<u>*Cách 2:*</u> *(Dùng Mê-nê-la-uyt)*

Áp dụng Định lý Mê-nê-la-uyt vào tam giác ABO với cát tuyến KO_2O_1 ta có:

$$\frac{KA}{KB}.\frac{O_2B}{O_2O}.\frac{O_1O}{O_1A}=1\Rightarrow \frac{R_2}{OB-R_2}.\frac{R_1-OA}{R_1}=1$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2}=\frac{R_1-OA}{OB-R_2}=\frac{2R_1-OA}{OB}=\frac{2R_1}{OB}-\frac{OA}{OB}\quad (1)$$

Mặt khác để ý $BKOO_1$ và AKO_2O là các tứ giác nội tiếp nên có:

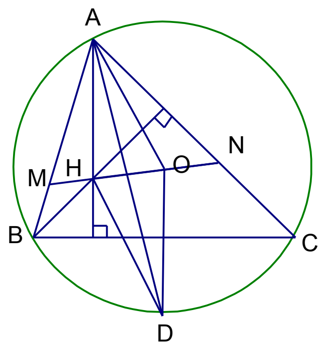
$$R_1.OA=\frac{a^2}{2}=R_2.OB\quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{R_1}{R_2}=\frac{4R_1R_2}{a^2}-\frac{R_2}{R_1}\Rightarrow \frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=\frac{4}{a^2}$ (đpcm).

- Lời bàn:

1/ Bài toán trên nếu giải cách thông thường (cách 1) trông đơn giản hơn (chỉ dùng qua hai tam giác đồng dạng) nhưng giải bằng Mê-nê-la-uy ta thấy cái hay ở chỗ bộ óc ta đã hoạt động tích cực hơn, nghiên cứu bài toán sâu hơn, giúp ta có cách nhìn toàn diện, tổng hợp được các kiến thức với nhau: đó là sự kết hợp giữa Định lí Mê-nê-la-uyt + Dãy tỉ số bằng nhau + Hệ thức lượng trong đường tròn. Vậy là ta đang tập làm công việc "to tác" là sáng tạo và ngiên cứu khoa học?

2/ Phát hiện kiến thức mới từ bài toán 6: *Cho tam giác ABC có* $\hat{A} = 60^0$*, H là trực tâm của tam giác ABC và nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHO và AOD. Chứng minh rằng* $\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=\frac{4}{R^2}$.



Lời giải vắn tắt:

Đường thẳng OH cắt AB, AC lần lượt tại M và N. Tia phân giác của góc A cắt đường tròn (O) tại D.

+ Dễ chứng minh BHOC nột tiếp được, từ đó suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{OCB} = 30^0 \Rightarrow \Delta AMN$ đều.

Mặtkhác: $\widehat{OAC} = (180^0 - \widehat{AOC}) : 2 = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{MAH}$

$\Rightarrow \Delta AMH = \Delta ANO$ (g-c-g). $\Rightarrow$ AH = AO $\Rightarrow$ AHDO là hình thoi.

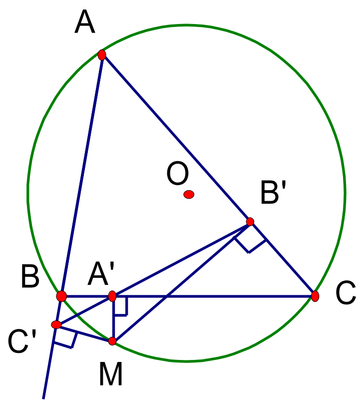
+ Áp dụng bài toán 6 ta có ngay $\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=\frac{4}{R^2}$.

<u>Bài toán 7</u>: (Đường thẳng Sim-Sơn).

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Điểm M thuộc đường tròn (O). Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng A', B', C' thuộc một đường thẳng. (Đường thẳng đó được gọi là đường thẳng Sim-Sơn).

Lời giải:

<u>*Cách 1:*</u> *(Không dùng Mê-nê-la-uyt)*



+ Nếu M trùng với một đỉnh của Δ ABC ta có đpcm.

+ Nếu M thuộc cung nhỏ BC (không chứa A).

Sử dụng các tứ giác ABMC, BA'MC', CB'A'M nội tiếp được ta có: [illegible]

Mà [illegible] nên [illegible]. Do B, A', C thẳng hàng nên C', A', B' thẳng hàng (đpcm).

- Lời bàn:

1/ Xin hỏi có bao giờ bạn nghĩ rằng sẽ giải bài toán trên bằng định lý Mê-nê-la-uýt? Có bạn nào thử dùng định lý Mê-nê-la-uýt để giải lại không? Nếu có tôi xin bắt tay hoan nghênh, em đã có tính tò mò cần thiết để trở thành một học sinh giỏi toán. Bây giờ ta thử giải lại bài toán trên bằng Mê-nê-la-uyt. Đây là vấn đề khó vì có thể ta không giải được (vì đâu phải bài toán nào cũng giải được bằng Mê-nê-la-uýt), nhưng mục đích là tập nghiên cứu, tập sáng tạo nên ta không dừng lại, tiếp tục phân tích với hy vọng sẽ giải được bài toán bằng Mê-nê-la-uyt. Thật vậy, kiên trì đến cùng và đi đến thành công. Xin giới thiệu cùng bạn đọc cách giải như sau:

<u>Cách2:</u> *(dùng Mê-nê-la-uyt)* Hãy để ý các cặp tam giác đồng dạng: Δ MA'C ∽ Δ MC'A; Δ MBA' ∽ Δ MAB' ; Δ MC'B ∽ Δ MB'C từ đó có:

$$\frac{A'C}{C'A}=\frac{MC}{MA};\frac{B'A}{BA'}=\frac{MA}{MB};\frac{BC'}{B'C}=\frac{MB}{MC}\Rightarrow\frac{A'C}{C'A}.\frac{B'A}{BA'}.\frac{BC'}{B'C}=1\Rightarrow\frac{A'C}{A'B}.\frac{C'B}{C'A}.\frac{B'A}{B'C}=1$$

Theo định lý đảo của Mê-nê-la-uyt ta có A', B', C' thẳng hàng (đpcm).

2/ Vốn quen nhìn bài toán ở nhiều góc độ khác nhau, tôi cho " tam giác ABC cố định còn M thay đổi trên cung nhỏ BC không chứa A thì MB và MC thay đổi". Khi đó ta có bài toán :

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm di động trên cung nhỏ BC không chứa điểm A. Hạ AE, AF lần lượt vuông góc với MB, MC. Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định. (Theo kết quả ở bài toán trên thì điểm cố định là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Bạn đọc tự chứng minh).

* Tóm lại, là người yêu toán hãy có ý thức và tự đặt ra cho mình câu hỏi sau lần giải mỗi bài toán: *"Bài toán này có thể giải bằng Mê-nê-la-uyt được không? hoặc nếu giải bằng Mê-nê-la-uyt được rồi thì có thể giải bằng hình học thuần túy thông thường được không? "* (*). Bẵng đi một thời gian tôi lại tìm thấy bài toán tổng quát của bài toán 7, nhân đây xin giới thiệu cùng bạn đọc.

<u>Bài toán 8</u>: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng sao cho hình chiếu của M lên 3 cạnh của tam giác là 3 điểm thẳng hàng.

Lời giải:

Gọi M là điểm thuộc tập hợp (S) phải tìm và C', A', B' theo thứ tự là hình chiếu của M lên AB, BC, CA. (xem hình trên)

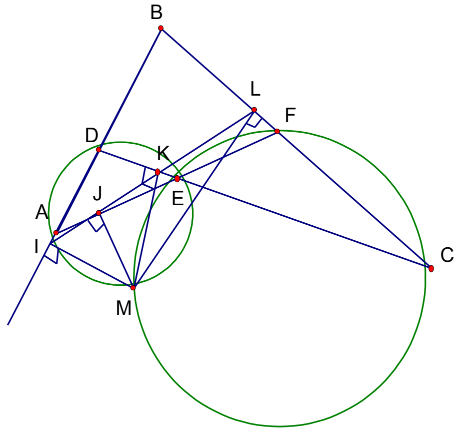
Ta có: M $\in$ (S) $\Leftrightarrow$ A', B', C' thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\hat{A'_1} = \hat{A'_2}$.

$\Leftrightarrow$ Tứ giác ABMC nội tiếp $\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn ngoại tiếp Δ ABC. Từ

bài tập 7 và 8 ta sẽ giải được bài tập nổi tiếng sau:

Bài toán 9: (Điểm Miquel)Bốn đường thẳng cắt nhau tại 6 điểm tạo thành 4 tam giác. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác này có một điểm chung. (Điểm chung đó được gọi là điểm Miquel).

Lời giải:



Giả sử 4 đường thẳng đôi một cắt nhau tạo thành 4 tam giác (xem hình vẽ). Gọi M là giao điểm khác E của các đường tròn ngoại tiếp Δ ADE và Δ CEF. Chiếu M xuống các đoạn AD, AE, DE, CF theo thứ tự là I, J, K và L.

Theo bài 7 ta có: I, J, K thẳng hàng.

J, K, L thẳng hàng.

⇒ I, J, K, L thẳng hàng.

Theo bài toán 8 ta suy ra M cũng nằm trên các đường tròn ngoại tiếp Δ ABF và Δ CBD. Vậy các đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác ADE, CFE, ABF và CBD đồng quy tại điểm M.

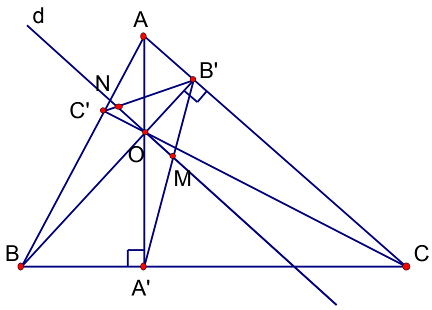
Bài toán 10: Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AA', BB' và CC' cắt nhau tại O. Đường thẳng d đi qua O và song song với AC cắt A'B' và B'C' lần lượt ở M, N. Chứng minh OM = ON.

Lời giải:

Để cho gọn trước hết ta có bổ đề quen thuộc sau:

Bổ đề: *Các đường cao AA', BB', CC' của tam giác ABC là 3 đường phân giác trong của các góc A', B', C' của tam giác A'B'C'. (A'B'C' gọi là tam giác trực tâm).*

Chứng minh:



+ Nếu là tam giác vuông thì Δ A'B'C' suy biến thành đoạn thẳng, ta có đpcm.

+ Nếu là tam giác nhọn:

Cách 1: Sử dụng kiến thức lớp 8 chứng minh qua hai tam giác đồng dạng từ đó có $\widehat{O}\,'AB\;\widehat{O}\,'CI$ ⇒ đpcm.

(việc chứng minh xin nhường cho bạn đọc).

Cách 2: Sử dụng kiến thức lớp 9 về tứ giác nội tiếp, (xem hình vẽ) Ta có: OA'CB' và OB'AC' là các tứ giác nội tiếp được nên: $\widehat{O}\,'A\,\widehat{O}\,;\widehat{O}\,'C\,\widehat{B}\,\widehat{O}\,'$

Mà $\widehat{O}\;'CO\;\widehat{A}$ nên có $\widehat{O}\,'AB\;\widehat{O}\,'CI$. Tương tự ta thu được đpcm.

+ Tam giác tù chứng minh tương tự.

Áp dụng Bổ đề kết hợp với MN song song với AC nên B'O vừa là đường cao vừa là đường phân giác, vậy ta có OM = ON.(đpcm)

Nhận xét rằng nếu đường thẳng d' cũng đi qua O và cho song song với AB, cắt B'C' và C'A' lần lượt ở E, F thì tương tự ta cũng có OE = OF. Vậy ta có bài toán :

<u>Bài toán 11</u>: Cho tam giác nhọn ABC. Các đường cao AA', BB' và CC' cắt nhau tại O. Đường thẳng d qua O và song song với AC cắt A'B' và B'C' lần lượt ở M, N; đường thẳng d' qua O và song song với AB, cắt B'C' và C'A' lần lượt ở E, F. Chứng minh MENF là hình bình hành.

Lời giải:

Hình vẽ tương tự như hình bài 10.

Áp dụng Bổ đề và theo kết quả bài tập 10 ta có: OM = ON và OE = OF. Vậy NEMF là hình bình hành (đpcm).

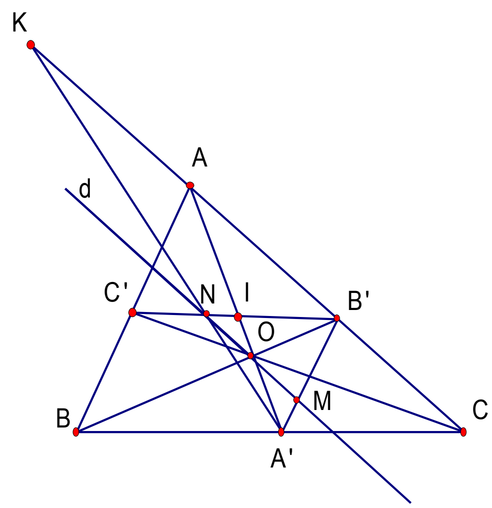
* Lời bàn: Vấn đề hợp logic mà ta dễ dàng đặt ra là AA', BB' và CC' là các đường đồng quy bất kì (tức là ta đã bỏ bớt đi giả thiết vuông góc ba cạnh) thì liệu kết quả trên còn đúng? (tức là OM = ON ?; hình NEMF có là hình bình hành nữa không?) Nếu không thì nó sẽ thay đổi như thế nào nhỉ ? Và tôi bắt tay giải quyết vấn đề. Nhưng xoay xở mãi với Ta let vẫn không giải được. Nhờ có (*) tôi tự hỏi: Không giải được bằng hình học thuần túy sao ta không thử giải bằng Mê-nê-la-uýt nhỉ ? Và tôi dùng Mê-nê-la-uyt giải lại vấn đề mở rộng trên một cách cẩn thận thì thật may mắn, tôi đã tìm ra lời giải. Hẳn bạn cũng biết là tôi vui mừng đến mức nào, và tôi muốn gặp ai đó để giới thiệu ngay bài toán mở rộng cùng với cách giải của nó mà tôi vừa tìm ra. Và hôm nay trong chuyên đề này được chia xẻ cùng bạn đọc. Xin phát biểu lại bài toán mở rộng:

<u>Bài toán 12</u>: *(Mở rộng bài toán 10)*

Cho tam giác nhọn ABC. Các đường AA', BB' và CC' cắt nhau tại O. Đường thẳng d đi qua O và song song với AC cắt A'B' và B'C' lần lượt ở M, N. Chứng minh OM = ON.

<u>Lời giải:</u>

Gọi I,K lần lượt là giao điểm của AA' và B'C'; A'N và đường thẳng AC.



Áp dụng Định lí Mê-nê-la-uyt ta có:

+ Δ AOB với cát tuyến C'IB':

$$\frac{C'A}{C'B}.\frac{B'B}{B'O}.\frac{IO}{IA}=1 \qquad (1)$$

+ Δ AOB' với cát tuyến BCA':

$$\frac{BO}{BB'}.\frac{CB'}{CA}.\frac{A'A}{A'O}=1 \qquad (2)$$

Lấy (1) nhân (2) ta được:

$$\frac{C'A}{C'B}.\frac{OB}{OB'}.\frac{CB'}{CA}.\frac{IO}{IA}.\frac{AA'}{AO}=1 \qquad (3)$$

Mặt khác $\frac{C'A}{C'B}.\frac{OB}{OB'}.\frac{CB'}{CA}=1$ (do xét Δ ABB' với cát tuyến C'OC) nên $\frac{IO}{IA}=\frac{A'O}{A'A}$. (4). Mà theo TaLet thì $\frac{A'O}{A'A}=\frac{ON}{AK};\frac{IO}{IA}=\frac{ON}{AB'}$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra AK = AB' suy ra OM = ON.

Sau đây là một số bài tập nhằm rèn luyện kĩ năng vận dụng định lí Mê-nê-la-uyt.

Bài toán 13: Cho tam giác ABC và các đường AA', BB' và CC' cắt nhau tại O. Đường thẳng d, d' đi qua O và song song với AC, AB cắt A'B' và B'C' lần lượt ở M, N, E, F. Khi đó MENF là hình bình hành.

Bài toán 14: Cho tam giác ABC, ba điểm A' , B' , C' theo thứ tự trên BC, CA, AB. Biết rằng B' chia đoạn AC theo tỉ số $\frac{AB'}{B'C} = \frac{3}{2}$. Các điểm A' và C' phải chia BC, AB theo tỉ số nào để cho diện tích tam giác A'B'C' nhỏ nhất.

Giải vắn tắt:

Tam giác A'B'C' có diện tích nhỏ nhất khi nó suy biến thành đường thẳng. Khi đó áp dụng Định lí Mê-nê-la-uyt vào tam giác ABC với cát tuyến A'C'B' .

Bài toán 15: Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tại các điểm M, N, P, Q theo thứ tự trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng PN, QM và đường chéo BD đồng quy.

Giải vắn tắt:

Giả sử MQ cắt BD tại O. Ta chứng minh N, P, O thẳng hàng. Áp dụng Định lí Mê-nê-la-uyt vào tam giác ABD với cát tuyến MQO (với chú ý: AM = AQ; BM = BN; CN = CP; DP = DQ).

V- THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM:

1. Mục đích:

- Hướng dẫn học sinh kỹ năng phân tích , tổng hợp một bài toán theo nhiều khía cạnh khác nhau thông qua việc vận dụng định lí Mê-Nê-La-Uýt nhằm làm phong phú hơn phạm vi ứng dụng khi giải toán.
- Cung cấp những bài toán có thường gặp, có nội dung hấp dẫn và khó giải quyết. Một trong những nguyên nhân gây khó giải quyết của nó là vì phương pháp tiếp cận, mổ xẻ vấn đề không phải là các phương pháp thông thường hay được áp dụng trong hình học.
- Tìm hiểu kiến thức toán rộng hơn sách giáo khoa, vận dụng sáng tạo những định lí đã học vào giải các bài toán như: Khai thác các bài toán (từ bài 1 đến bài 4); Nhìn bài toán từ nhiều hướng(từ bài 5 đến bài 12); cung cấp những phương pháp học cho các bạn yêu thích toán học, làm tài liệu tham khảo và tiếp tục phát triển.

2. Tổ chức thực nghiệm:

- Hướng dẫn học sinh khá, giỏi các lớp $9A_1$; $9A_2$; $9A_3$ và $9A_4$ khai giảng dạy nghiên cứu về định lí Mê-Nê-La-Uýt. (Tôi đã tiến hành giảng dạy cho học sinh các bài tập theo trình tự trong đề tài).
- Tiến hành từ tháng 10 đến tháng 12 năm học 2007-2008 tại trường THCS Nhơn Lộc.

3. Kết quả thực hiện:

Sau 3 tháng triển khai giảng dạy, tôi nhận thấy các em rất hứng thú và quan tâm đến đề tài mà tôi đưa ra. Hầu hết các em tiếp thu nhanh bài giảng (bởi lẽ chỉ là sự kết hợp giữa các định lí đã học), hiểu thấu đáo tầm quan trọng của định lí và cách vận dụng định lí Mê-Nê-La-Uýt vào một bài toán như thế nào. Kiến thức các em đã được nâng cao, kỹ năng lập luận, tư duy trừu tượng đã được phát triển, sử dụng thành thạo các định lí vào một bài toán. Khi kiểm tra đề tài tôi thu được kết quả như sau:

STT	Lớp	Tổng	Kết quả

số			9 – 10	7 – 8	5 – 6	3 – 4	0 – 2
1	$9A_1$	15	3	7	5	0	0
2	$9A_2$	22	4	12	5	1	0
3	$9A_3$	17	4	10	3	0	0
4	$9A_4$	18	5	6	6	1	0

VI/ LỜI KẾT.

Nếu các bạn đã học định lý Mê-nê-la-uyt và đọc bài viết này rồi tôi nghĩ bạn có thể giải các bài toán hình học gọn hơn rất nhiều. Cần nói thêm rằng phương pháp dùng Mê-nê-la-uyt mà ta nghiên cứu trên kia không phải lúc nào cũng thực hiện được (chỉ thực hiện được một chiều) và không thí điểm rộng rãi (không có trong chương trình sách giáo khoa, thành thử chỉ áp dụng cho các bạn khá, giỏi. Hy vọng ta sẽ tìm ra những bài toán cơ bản nhưng vẫn áp dụng được định lí Mê-nê-la-uyt để giải cho học sinh trung bình và tiến đến học sinh yếu kém. Điều này không thể riêng một cá nhân tôi làm được mà phải kết hợp với toàn bộ giáo viên có nhiệt huyết về toán). Nhưng các bạn cứ tập suy nghĩ như thế đi, các bạn sẽ nhận thấy nhiều điều mới lạ, tăng thêm trí suy luận, nâng cao nhận thức về tư duy trừu tượng, rèn luyện tốt kĩ năng, kĩ xảo. Đó cũng là bước đầu để các bạn tập làm quen với tìm tòi nghiên cứu sau này. Trên đây tôi đã trao đổi với các bạn vài kinh nghiệm, sáng tạo khi học toán và làm toán cũng như việc rèn luyện sự linh hoạt trong suy nghĩ. Vấn đề này hết sức phong phú, bao gồm nhiều mặt, và có lẽ nói không khi nào hết. Mong các bạn hãy suy nghĩ về phong cách học tập của mình, đúc rút kinh nghiệm, tìm ra phương pháp học tập thích hợp tốt nhất để đạt nhiều kết quả cao nhất. Xin dừng bài viết của tôi tại đây, chúc các bạn đạt được nhiều thành công trong học tập.

VII- NHỮNG KIẾN NGHỊ:

Cách dạy, cách học truyền thụ một chiều tồn tại đã khá lâu trong nhà trường từ THCS đến THPT, lại bị nạn “dạy thêm, học thêm” tràn lan làm cho năng lực tự học bị thoái hóa ngày càng trầm trọng hơn. Do vậy tôi xin đề nghị các cơ quan, ban ngành đoàn thể quan tâm đến các vấn đề sau:

+ Phải sớm thay đổi mối quan hệ thầy trò trong quá trình dạy và học. Phải từ quan hệ “thầy giảng, trò chép” thụ động chuyển sang quan hệ “thầy hướng dẫn, trò nỗ lực thực hành đến mức cao nhất”. Đẩy lùi những tiêu cực như học thêm, học tủ, gian lận trong thi cử…

+ Phát huy năng lực tự học, tự nghiên cứu của giáo viên hằng năm thông qua các hội thảo về toán học, viết chuyên đề, viết sáng kiến kinh nghiệm dạy cho học sinh khá giỏi, học sinh yếu kém … để từ đó khơi dậy và phát huy tốt nhất nội lực tự học của học sinh. Biết cách tổ chức và xây dựng quy trình tự học (làm thí điểm ở vài lớp) tiến đến phong trào tự học trong toàn học sinh.

+ Đổi mới nội dung thi cử (nhất là kì thi học sinh giỏi cấp huyện), làm cho thi cử không còn chỉ là kiểm tra trí nhớ, thách đố bằng những bài toán lắc léo mà thử thách năng lực nắm bản chất vấn đề, năng lực tư duy, năng lực phát hiện vấn đề và giải quyết vấn đề.

+ Gia đình, nhà trường và xã hội phải luôn khắn khít với nhau trong quá trình đào tạo, rèn luyện con người mới. Cần tránh đi quan điểm cho rằng: “khi nghĩ đến gia đình, chỉ mới nghĩ đến giáo dục đạo đức làm cho con chăm ngoan, còn phát triển trí tuệ thì nhường cho nhà trường” mà phải trả lời những câu hỏi sau đây: Ở trường đã có các thầy cô dạy theo hướng phát huy nội lực của con em thì về nhà ông, bà, cha, mẹ dạy cái gì, dạy như thế nào, vào những lúc nào?

+ Tôi luôn có niềm tin rằng đến một khi nào đó ta sẽ tìm ra những bài toán cơ bản nhưng vẫn áp dụng được định lí Mê-nê-la-uyt để giải cho học sinh trung bình và tiến đến học sinh yếu kém chứ không phải chỉ để dành cho học sinh khá giỏi như hiện nay. (Đây cũng là băn khoăn và khuyết điểm của sáng kiến vì không được ứng dụng rộng rãi trong nhà trường). Điều này không thể riêng một cá nhân tôi làm được mà phải kết hợp với toàn bộ giáo viên có nhiệt huyết về toán.

Trên đây là một đề tài nhỏ mà tôi nghiên cứu và tìm hiểu với bao tâm huyết. Dù đã cố gắng nhiều song nó vẫn còn tồn tại nhiều hạn chế mong thầy cô góp ý tận tình để lần sau thực hiện đề tài tốt hơn.

Bình Định, ngày 3 tháng 1 năm 2008.

ĐOÀN CÁT NHƠN.