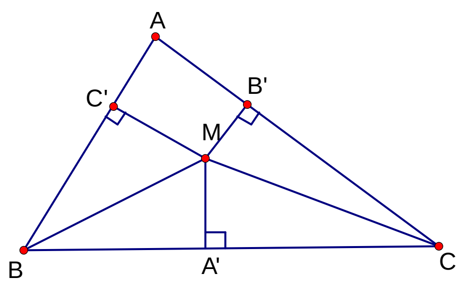
BÀI TẬP LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN MIỀN NAM LẦN THỨ XVIII

Chủ đề: LƯỢNG GIÁC- HÌNH HỌC PHẲNG

(VĂN PHÚ QUỐC- GV. TRƯỜNG ĐH QUẢNG NAM)

1. Giả sử M là điểm nằm trong $\triangle ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\left(\frac{MA}{MB'+MC'}\right)^2+\left(\frac{MB}{MC'+MA'}\right)^2+\left(\frac{MC}{MA'+MB'}\right)^2 \geq 3$.

HD:



Ta có: $\frac{MB'+MC'}{MA}=\frac{MB'}{MA}+\frac{MC'}{MA}=\sin\widehat{MAB'}+\sin\widehat{MAC'}$

$$= 2\sin\frac{\widehat{MAB'}+\widehat{MAC'}}{2}.\cos\frac{\widehat{MAB'}-\widehat{MAC'}}{2}\leq 2\sin\frac{A}{2}$$

Suy ra: $\frac{MA}{MB'+MC'}\geq\frac{1}{2\sin A}$.

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{MB}{MC'+MA'}\geq\frac{1}{2\sin B}$; $\frac{MC}{MA'+MB'}\geq\frac{1}{2\sin C}$.

Khi đó: $\left(\frac{MA}{MB'+MC'}\right)^2+\left(\frac{MB}{MC'+MA'}\right)^2+\left(\frac{MC}{MA'+MB'}\right)^2\geq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$

Ta có bất đẳng thức: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$.

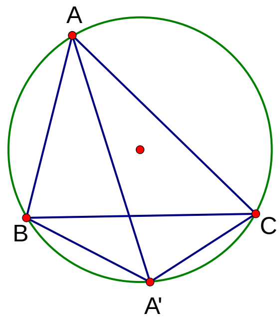
Do đó: $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}}=12$.

Vậy $\left(\frac{MA}{MB'+MC'}\right)^2+\left(\frac{MB}{MC'+MA'}\right)^2+\left(\frac{MC}{MA'+MB'}\right)^2\geq 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều và M là trọng tâm tam giác này.

2. Cho $\triangle ABC$. Các đường phân giác xuất phát từ A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại A', B', C' tương ứng. Chứng minh: $AA'.BB'.CC' \geq 16R^2 r$.

HD:



Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABA'C$ ta có:

$AA'.BC = AB.A'C + AC.A'B$ hay $aAA' = cA'C + cA'B$.

Do AA' là tia phân giác $\widehat{BAC}$ nên A' là điểm chính giữa của cung BC.

Suy ra: $aAA' = (b+c)A'C = (b+c)2R\sin\frac{A}{2}$ (theo định lý sin)

$$\Rightarrow AA' = \frac{2R(b+c)}{a}\sin\frac{A}{2}.$$

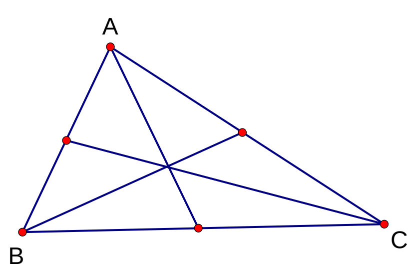
Chứng minh tương tự ta được: $BB' = \frac{2R(a+c)}{b}\sin\frac{B}{2}$; $CC' = \frac{2R(a+b)}{c}\sin\frac{C}{2}$.

Khi đó: $AA'.BB'.CC' = \frac{8R^3(b+c)(a+c)(a+b)}{abc}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Do $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ và $(b+c)(a+c)(a+b) \geq 8abc$ nên $AA'.BB'.CC' \geq 16R^2 r$.

3. Cho $\triangle ABC$ thỏa $m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau xảy ra: $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b,\ m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

HD:



Theo giả thiết: $m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c$ (1)

Đã biết: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{3}{2}b\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}b\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}}{2}c\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (3)

Bình phương hai vế của (3) ta được: $m_a m_b m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}b.\frac{\sqrt{3}}{2}c$ (4)

Từ (1), (3) và (4) suy ra: $\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}c$ là 3 nghiệm của một phương trình bậc 3.

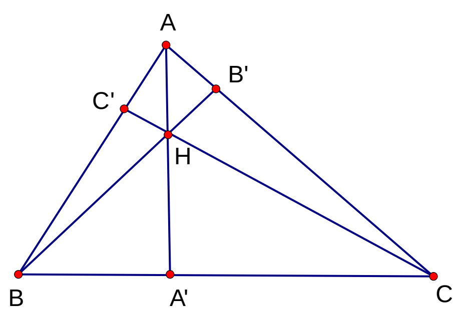
Giả sử $a \le b \le c \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a \le \frac{\sqrt{3}}{2}b \le \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Ta có kết quả quen thuộc sau: $m_c \le m_b \le m_a$.

Từ các nhận xét trên dễ dàng suy ra: $m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}b$.

4. Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn với trực tâm H. Gọi diện tích các tam giác HAB, HBC, HCA lần lượt là: S_1, S_2, S_3. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều $\Leftrightarrow \frac{2(S_1+S_2+S_3)}{27} \ge \frac{R}{r}$.

HD:



Ta có:

$$\frac{8(S_1+S_2+S_3)^3}{27S_1S_2S_3} = \frac{1}{S_1S_2S_3}\left[\frac{(S_1+S_2)+(S_2+S_3)+(S_3+S_1)}{3}\right]^3$$

$$\ge \frac{S_1+S_2}{S_3}.\frac{S_2+S_3}{S_1}.\frac{S_3+S_1}{S_3}$$ (bất đẳng thức AM-GM).

Gọi A', B', C' lần lượt là các chân đường cao.

Ta có: $\frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{HB}{HB'} = \frac{HB}{HA}.\frac{HA}{HB'} = \frac{\sin\widehat{HAB}}{\sin\widehat{HBA}}.\frac{1}{\sin\widehat{HAC}} = \frac{\cos B}{\cos A\cos C}$.

Chứng minh tương tự ta được: $\frac{S_2+S_3}{S_1} = \frac{\cos C}{\cos A\cos B}$; $\frac{S_3+S_1}{S_2} = \frac{\cos A}{\cos B\cos C}$.

Khi đó: $$\frac{S_1+S_2}{S_3}.\frac{S_2+S_3}{S_1}.\frac{S_3+S_1}{S_3} = \frac{1}{\cos A\cos B\cos C} \ge \frac{8}{(\cos A+\cos B)(\cos B+\cos C)(\cos C+\cos A)}$$

$$\ge \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{4R}{r}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 = S_3 \\ A = B = C \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

5. Gọi A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{C}{2}\right) < \left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}}.$$

HD:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left(1+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{C}{2}\right)\le\frac{1}{27}\left(3+\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)^3 \quad (1)$$

Đã biết: $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4}$ (2)

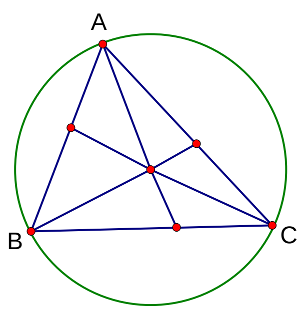
Từ (1) và (2) suy ra: $\left(1+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{C}{2}\right)\le\frac{1}{27}\left(3+\frac{9}{4}\right)^3=\left(1+\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{3}}$ (3)

Áp dụng bất đẳng thức Bernouli ta có: $1+\frac{3}{4}=1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}<\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{\sqrt{3}}\Rightarrow\left(1+\frac{3}{4}\right)^3<\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\left(1+\cos^2\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos^2\frac{C}{2}\right)<\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}}$.

6. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $m_a+m_b+m_c\le\frac{9R}{2}$.

HD:



Đã biết: $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\le\frac{9}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$m_a+m_b+m_c\le\sqrt{3\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)}=\sqrt{3.\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

$$=\sqrt{9R^2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)}\le\sqrt{9R^2.\frac{9}{4}}=\frac{9R}{2}.$$

7. Chứng minh rằng: $\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2\ge\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\frac{a^2}{\alpha}+\frac{b^2}{\beta}+\frac{c^2}{\gamma}\right)$, $\forall\alpha,\beta,\gamma>0$, $\forall M\in(ABC)$.

HD:

Dựng điểm $I\in(ABC)$ sao cho: $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MC}\right)=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{IM}=-\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}\right)$$

Đặt $x=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$, $y=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$, $z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{IM} = -\left(x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\right)$$

$$\Rightarrow IM^2 = x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 + 2xy\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + 2yz\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC} + 2zx\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}$$

$$= x^2MA^2 + y^2MB^2 + z^2MC^2 + xy\left(MA^2 + MB^2 - AB^2\right) + yz\left(MB^2 + MC^2 - BC^2\right) + zx\left(MC^2 + MA^2 - AC^2\right)$$

Do $IM^2 \geq 0$ nên suy ra được điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv I$.

8. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $m_a.m_b.m_c \geq p\sqrt{r_a.r_b.r_c.r}$

HD:

Ta có: $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$.

Suy ra: $S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)r_a.r_b.r_c.r = S^2 r_a.r_b.r_c.r \Rightarrow S = \sqrt{r_a.r_b.r_c.r}$ (1)

Mặt khác: $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4} \geq \dfrac{(b+c)^2 - a^2}{4} = \dfrac{(b+c+a)(b+c-a)}{4} = p(p-a) \Rightarrow m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$.

Tương tự chứng minh được: $m_b \geq \sqrt{p(p-b)}$; $m_c \geq \sqrt{p(p-c)}$.

Suy ra: $m_am_bm_c \geq p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $m_a.m_b.m_c \geq p\sqrt{r_a.r_b.r_c.r}$.

9. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r} \geq \dfrac{9\sqrt{3}}{2p}$.

HD: Ta có: $abc = 4R.S = 4Rrp$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $(2p)^3 = (a+b+c)^3 \geq 27abc = 27.4Rrp \Rightarrow p^2 \geq \dfrac{27}{2}Rr$ (1)

Mà $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \leq \dfrac{\sqrt{p\left[\dfrac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3}}{p} = \dfrac{p}{3\sqrt{3}}$

Suy ra: $p \geq 3\sqrt{3}r$ (2).

Từ (1) và (2) ta được: $p^3 \geq \dfrac{81\sqrt{3}}{2}Rr^2 \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1}{4Rr^2}} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2p}$.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2r} + \dfrac{1}{2r} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{4Rr^2}} \geq \dfrac{9\sqrt{3}}{2p}$

10. Cho 2012 điểm $A_1, A_2, ..., A_{2012}$ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = 1$ sao cho: $\sum_{i=1}^{2012} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$. Hãy xác định vị trí điểm B thuộc mặt phẳng chứa đường tròn này sao cho: $M = \dfrac{\sum_{i=1}^{2012} BA_i^3}{\sum_{i=1}^{2012} BA_i^4}$ lớn nhất.

HD: Với mọi $i = 1, 2, ..., 2012$ ta có:

$$BA_i = \left|\overrightarrow{BA_i}\right| = \left|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OA_i}\right| \geq \left(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OA_i} = OA_i^2 - \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OA_i}$$

Suy ra: $\sum_{i=1}^{2012} BA_i \geq 2012 - \overrightarrow{OB}.\sum_{i=1}^{2012} \overrightarrow{OA_i} = 2012$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA_i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., 2012 \Leftrightarrow B \equiv O$.

Không giảm tính tổng quát, giả sử: $BA_1 \leq BA_2 \leq ... \leq BA_{2012}$.

Áp dụng bất đẳng thức Trebưsep cho hai dãy đơn điệu tăng: $\begin{cases} BA_1 \leq BA_2 \leq ... \leq BA_{2012} \\ BA_1^3 \leq BA_2^3 \leq ... \leq BA_{2012}^3 \end{cases}$ ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^{2012} BA_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2012} BA_i^3\right) \leq 2012\left(\sum_{i=1}^{2012} BA_i^4\right) \Rightarrow M \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} BA_1 = BA_2 = ... = BA_{2012} \\ B \equiv O \end{cases} \Leftrightarrow B \equiv O$. Vậy $\max M = 1$

11. Trong tất cả các tứ giác lồi $ABCD$ có chu vi bằng 1, tìm tứ giác sao cho biểu thức:

$$P = \frac{AB^4}{(AB + BC)\sin B} + \frac{BC^4}{(BC + CD)\sin C} + \frac{CD^4}{(CD + DA)\sin D} + \frac{DA^4}{(DA + AB)\sin A}$$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HD:

Đặt: $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và $S = \dfrac{a^2}{a+b} + \dfrac{b^2}{b+c} + \dfrac{c^2}{c+d} + \dfrac{d^2}{d+a}$.

Do $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} + \dfrac{b^2 - c^2}{b - c} + \dfrac{c^2 - d^2}{c - d} + \dfrac{d^2 - a^2}{d + a} = 0$ nên $2S = \dfrac{a^2 + b^2}{a+b} + \dfrac{b^2 + c^2}{b+c} + \dfrac{c^2 + d^2}{c+d} + \dfrac{d^2 + a^2}{d+a}$.

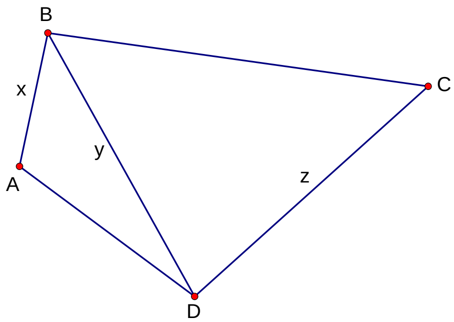
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $2S \geq \dfrac{1}{2}(a+b) + \dfrac{1}{2}(b+c) + \dfrac{1}{2}(c+d) + \dfrac{1}{2}(d+a) = 1$.

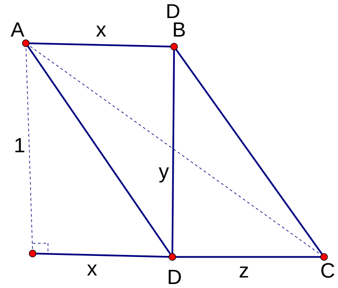
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = \dfrac{1}{4}$.Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $\dfrac{1}{4} \leq S^2 \leq ... \leq 4P$.

Suy ra: $P \geq \dfrac{1}{16}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $\dfrac{1}{4}$.

12. Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ thỏa $AB+BD+DC\le 2$. Tìm AC ?

HD:





Giả sử $AB=x, BD=y, CD=z$. Khi đó: $x+y+z\le 2$

$$S_{\triangle ABD}\le\frac{1}{2}xy,\ S_{\triangle BCD}\le\frac{1}{2}yz,\ S_{ABCD}=\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}y(x+z)\Rightarrow y(x+z)\ge 1$$

Nhưng $x+z\le 2-y\Leftrightarrow y(x+z)\le y(2-y)$.

Suy ra: $y(2-y)\ge 1\Leftrightarrow (y-1)^2\le 0\Leftrightarrow y=1;\ x+z=1$ và tất cả các bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Như vậy $AB\perp BD, CD\perp BD$

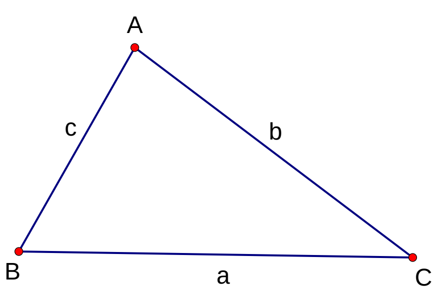
Hạ AK vuông góc với đường thẳng CD.

Áp dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông AKC:

$$AC=\sqrt{AK^2+KC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

13. Tam giác ABC có $\widehat{C}=45^0$. Chứng minh rằng: $AB^4=\left(BC^2-AB^2\right)^2+\left(CA^2-AB^2\right)^2$.

HD:



Áp dụng định lý hàm số cosin ta có:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 45^0=a^2+b^2-\sqrt{2}.ab$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2-c^2=\sqrt{2}ab-b^2\\ b^2-c^2=\sqrt{2}ab-a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(a^2-c^2\right)^2=2a^2b^2-2\sqrt{2}ab^3+b^4\\ \left(b^2-c^2\right)^2=2a^2b^2-2\sqrt{2}a^3b+a^4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(a^2-c^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2=\left(a^2+b^2-\sqrt{2}ab\right)^2=\left(c^2\right)^2.$$

14. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{5}$. Hai đường chéo của tứ giác vuông góc với nhau tại K và $OK=1$. Gọi S là diện tích của tam giác KCD. Chứng minh: $1\le S\le 4$.

HD:

Vẽ đường kính AE. Khi đó $BD//CE\Rightarrow CBDE$ là hình thang cân, dẫn đến $BC=DE$.

Mặt khác, $KA^2+KB^2+KC^2+KD^2=AD^2+BC^2=AD^2+DE^2=AE^2=20$ (1)

Lại có: $KA.KC=KB.KD=\left|OK^2-R^2\right|=4\Rightarrow KA=\frac{4}{KC}, KB=\frac{4}{KD}$ (2)

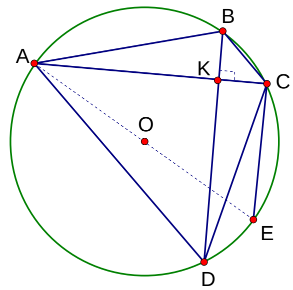
Thay (2) vào (1) ta có: $20=\left(KC^2+KD^2\right)\left(1+\frac{16}{KC^2KD^2}\right)$

$$\geq 2KC.KD\left(1+\frac{16}{KC^2KD^2}\right)=4S\left(1+\frac{16}{4S^2}\right)=4S+\frac{16}{S}$$

$$\Leftrightarrow 5\geq S+\frac{4}{S}\Leftrightarrow S^2-5S+4\leq 0\Leftrightarrow 1\leq S\leq 4.$$

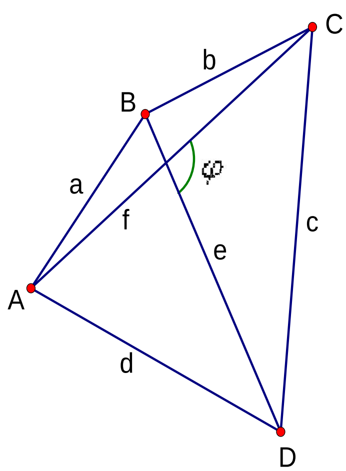
$$S=1\Leftrightarrow KC=KD=\sqrt{2}$$

$$S=4\Leftrightarrow KC=KD=2\sqrt{2}.$$



15. Trong tứ giác lồi, tổng các bình phương các cạnh và đường chéo bằng m. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác không vượt quá $\frac{m}{8}$.

HD:



Theo điều kiện bài toán ta có:

$$m=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\geq 2ab+2cd+2ef$$

Và $S_{\triangle ABC}\leq\frac{1}{2}ab$, $S_{\triangle ACD}\leq\frac{1}{2}cd$

Suy ra: $S\leq\frac{1}{2}(ab+cd)$.

Mặt khác $S=\frac{1}{2}ef\sin\varphi\leq\frac{1}{2}ef\Leftrightarrow 2S\leq ef$.

Lại có: $2S\leq ab+cd\Leftrightarrow 4S\leq 2ab+2cd$.

Như vậy $m\geq 8S\Leftrightarrow S\leq\frac{m}{8}$.

16. Tính các góc của tam giác ABC biết rằng: $\begin{cases} p(p-a)\leq\frac{bc}{4} \\ 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)\end{cases}$.

HD:

Điều kiện bài toán: $\begin{cases} 4p(p-a)\leq bc & (1) \\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{2\sqrt{2}-3}{8} & (2)\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}\leq 1\Leftrightarrow\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}\leq 1\Leftrightarrow\frac{2bc(1+\cos A)}{bc}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{A}{2}\leq\frac{1}{4}\geq\sin^2\frac{A}{2}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sin\frac{A}{2}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(\text{vì } 0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}).\qquad(3)$$

$$VT(2)=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin^2\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2} = -\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Từ (3) ta suy ra: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \cos\frac{B-C}{2}=1 \\ \sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2\pi}{3} \\ B=C=\frac{\pi}{3} \end{cases}$.

17. Cho tam giác ABC thoả mãn điều kiện: $S=a^2-(b-c)^2$. Chứng minh rằng: $\tan A=\frac{8}{15}$.

HD:

Ta có: $S=a^2-(b-c)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = b^2+c^2-2bc\cos A-b^2+2bc-c^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = 2bc(1-\cos A) \Rightarrow bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 4bc\sin^2\frac{A}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = 4\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$.

Từ đó ta có: $\tan A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$.

18. Gọi *x, y, z* là khoảng cách từ điểm M thuộc miền trong của $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn đến các cạnh *BC, CA, AB*. Chứng minh rằng: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$.

HD:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax}+\frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{by}+\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{cz}$$

$$\leq \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(ax+by+cz)} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)2S} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{abc}{2R}} == \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{2R}} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$$

19. Các đường phân giác AA', BB', CC' của $\triangle ABC$ bất kỳ cắt nhau tại điểm K. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{KA'}{AK}}+\sqrt{\frac{KB'}{BK}}+\sqrt{\frac{KC'}{CK}} \geq 2.$$

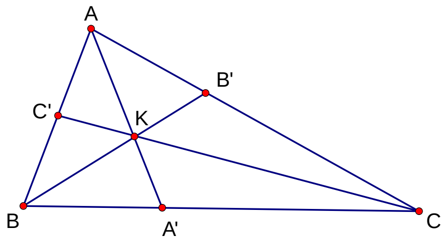
HD:

Ta sẽ chứng minh: $\frac{KA'}{AK}=\frac{a}{b+c}$?

Đặt $A'B=x \Rightarrow A'C=a-x$. Ta có: $\frac{x}{a-x}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b} \Leftrightarrow bx=ac-cx \Leftrightarrow x=\frac{ac}{b+c}$.

$\frac{KA'}{AK} = \frac{A'B}{AB} = \frac{x}{c} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = \frac{a}{b+c}$. Chứng minh tương tự ta được: $\frac{KB'}{BK} = \frac{b}{a+c}$; $\frac{KC'}{CK} = \frac{c}{a+b}$

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$



Áp dụng AM-GM ta có: $\frac{\frac{b+c}{a}+1}{2} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}} \Leftrightarrow \frac{p}{a} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{a}{p}$

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{b}{p}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{p}{c}$.

Cộng vế theo vế của ba bất đẳng thức này ta được điều phải chứng minh.

20. Các đường phân giác AA', BB', CC' của $\triangle ABC$ bất kỳ cắt nhau tại điểm K. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{AK}{AA'}.\frac{BK}{BB'}.\frac{CK}{CC'}} \leq \frac{2}{3}.$$

HD:

Dễ dàng chứng minh được: $\frac{AK}{AA'}.\frac{BK}{BB'}.\frac{CK}{CC'} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$; $\frac{AK}{AA'}.\frac{BK}{BB'}.\frac{CK}{CC'} = 2$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta suy ra được đpcm.

21. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý trong mp(ABC). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c}$$

HD:

Ta có: $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2 \Rightarrow 2(b^2+c^2+a^2) = 4m_a^2 + 3a^2 \geq 4m_a a\sqrt{3} \Rightarrow am_a \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$.

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Khi đó: $\frac{MA}{a} = \frac{MA.GA}{aGA} \geq \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA}}{\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}.\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)\overrightarrow{GA} = \frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+GA^2\right)$

Làm tương tự với $\frac{MB}{b}$; $\frac{MC}{c}$

Suy ra: $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$

Để ý rằng: $GA^2+GB^2+GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Suy ra: $P \geq \sqrt{3}$.

22. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

Ta có: $h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$; $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$

Suy ra: $\frac{h_a}{l_a}=\frac{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a\sqrt{bc}}\ge\frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}$ (bất đẳng thức AM-GM)

Làm tương tự cho $\frac{h_b}{l_b}$; $\frac{h_c}{l_c}$?

Suy ra: $\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c}\ge 2\left(\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}+\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b}+\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{c}\right)$.

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

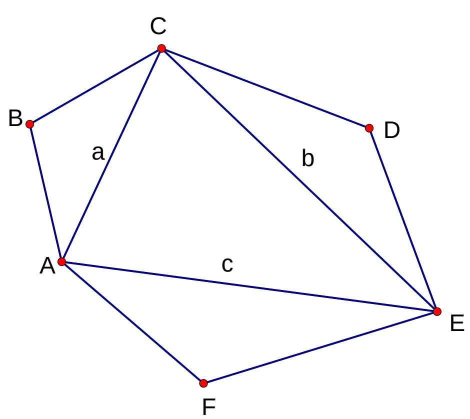
$$\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}+\frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b}+\frac{\sqrt{(p-a)(p-c)}}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}$$

Suy ra: $\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c}\ge 6\sqrt[3]{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}=6\sqrt[3]{\frac{S^2}{p4RS}}=6\sqrt[3]{\frac{pr}{4pR}}=3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

23. Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn: $AB=BC,\ CD=DE,\ EF=FA$.

Chứng minh rằng: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{3}{2}$.

HD:



Áp dụng bất đẳng thức Ptôlêmê cho tứ giác ACEF, ta có:

$$AC.EF+CE.AF\ge AE.CF\Rightarrow AF(a+b)\ge cCF\Rightarrow\frac{FA}{FC}\ge\frac{c}{a+b}$$

Chứng minh tương tự cho $\frac{DE}{DA}$; $\frac{BC}{BE}$?

Khi đó: $\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

(bất đẳng thức Nesbit)

24. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng: $r_a^2+r_b^2+r_c^2\ge m_a^2+m_b^2+m_c^2$ (1). Dấu "=" xảy ra khi nào?

HD:

Ta có: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=(p-a)r_a\Rightarrow r_a=\frac{\sqrt{p(p-b)(p-c)}}{p-a}$

Và $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow p\left[\frac{(p-b)(p-c)}{p-a}+\frac{(p-c)(p-a)}{p-b}+\frac{(p-a)(p-b)}{p-c}\right]\ge\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ (2)

Đặt $x = p - a,\ y = p - b,\ z = p - c \Rightarrow \begin{cases} p = x + y + z \\ a = y + z;\ b = z + x;\ c = x + y \end{cases}$.

(2) thành: $(x+y+z)\left(\frac{yz}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right) \geq \frac{3}{4}\left[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right]$ (3)

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3)

Thật vậy, $VT(3) = xy + yz + zx + x^2\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) + y^2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) + z^2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

$$\geq xy + yz + zx + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq \frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right) = VP(3).$$