Chuyên mục: Đại số và Giải tích - Olympic

Chuyên đề về đa thức

Minh Huyền

Thứ tư, 18 Tháng 9 2013 07:35

Đa thức là một trong những khái niệm trung tâm của toán học. Trong chương trình phổ thông, chúng ta đã làm quen với khái niệm đa thức từ bậc trung học cơ sở, từ những phép cộng, trừ, nhân đa thức đến phân tích đa thức ra thừa số, dùng sơ đồ Horner để chia đa thức, giải các phương trình đại số.



Bài giảng này sẽ hệ thống hoá lại những kiến thức cơ bản nhất về đa thức 1 biến, các dạng toán thường gặp về đa thức. Ở cuối bài sẽ đề cập 1 cách sơ lược nhất về đa thức nhiều biến.

1. Đa thức và các phép toán trên đa thức

1.1. Định nghĩa. Đa thức trên trường số thực là biểu thức có dạng

$P(x)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_{1}x+a_{0}$, trong đó $a_{i}\in \mathbb{R}$ và $a_{n}\neq 0$.

a_{1} được gọi là các hệ số của đa thức, trong đó a_{n} được gọi là *hệ số cao nhất* và a_{0} được gọi là *hệ số tự do.*

n được gọi là *bậc* của đa thức và kí hiệu là $n=deg(P)$. Ta quy ước bậc của đa thức hằng $P(x)=a_{0}$ với mọi x là bằng 0 nếu $a_{0}\neq 0$ và bằng nếu $a_{0}=0$.

Để tiện lợi cho việc viết các công thức, ta quy ước với đa thức $P(x)$ bậc n thì vẫn có các hệ số a_{k} với $k>n$, nhưng chúng đều bằng 0.

Tập hợp các đa thức 1 biến trên trường các số thực được kí hiệu là $R[x]$. Nếu các hệ số được lấy trên tập hợp các số hữu tỷ, các số nguyên thì ta có khái niệm đa thức với hệ số hữu tỷ, đa thức với hệ số nguyên và tương ứng là các tập hợp $Q[x],Z[x]$.

Loading web-font TeX/Size2/Regular

1.2. Đa thức bằng nhau

Hai đa thức $P(x)=\sum_{k=0}^{m}a_{k}x^{k},Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_{k}x^{k}$ bằng nhau khi và chỉ khi

$m=n$ và $a_{k}=b_{k}\forall k=0,1,2,...,m.$

1.3. Phép cộng trừ đa thức.

Cho hai đa thức $P(x)=\sum_{k=0}^{m}a_{k}x^{k},Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_{k}x^{k}$. Khi đó phép cộng và trừ hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ được thực hiện theo từng hệ số của x_{k}, tức là

$$P(x)\pm Q(x)=\sum_{k=0}^{max\begin{Bmatrix} m,n \end{Bmatrix}}(a_{k}\pm b_{k})x^{k}$$

Ví dụ: $(x^{3}+3x^{2}-x+2)+(x^{2}+x-1)=x^{3}+4x^{2}+1$

1.4. Phép nhân đa thức

Cho hai đa thức $P(x)=\sum_{k=0}^{m}a_{k}x^{k},Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_{k}x^{k}$. Khi đó $P(x).Q(x)$ là một đa thức có bậc $m+n$ và có các hệ số xác định bởi

$$c_{k}=\sum_{i=0}^{k}a_{i}b_{k-i}$$

Ví dụ: $(x^{3}+x^{2}+3x+2)(x^{2}+3x+1)=(1.1)x^{5}+(1.3+1.1)x^{4}+(1.1+1.3+3.1)x^{3}+(1.1+3.3+2.1)x^{2}+(3.1+2.3)x+(2.1)=x^{5}+4x^{4}+7x^{3}+12x^{2}+9x+1$

1.5. Bậc của tổng, hiệu và tích của các đa thức

Từ các định nghĩa trên đây, dễ dàng suy ra các tính chất sau đây

Đinh lý 1. Cho $P(x),Q(x)$ là các đa thức bậc m,n tương ứng. Khi đó

a) $deg(P\pm Q)\leq max\begin{Bmatrix} m,n \end{Bmatrix}$ trong đó nếu $deg(P)\neq deg(Q)$ thì dấu bằng xảy ra. Trong trường hợp $m=n$ thì $deg(P\pm Q)$ có thể nhận bất cứ giá trị nào $\leq m$.

b) $deg(P.Q)=m+n$

1.6. Phép chia có dư

Định lý 2. Với hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ bất kỳ, trong đó $deg(Q)\geq 1$, tồn tại duy nhất các đa thức $S(x)$ và $R(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện:

i)$P(x)=Q(x).S(x)+R(x)$

ii)$deg(R)<deg(Q)$

Chứng minh. Tồn tại. Ta có thể chứng minh bằng quy nạp theo $m=deg(P)$. Nếu $deg(P)<deg(Q)$ thì ta có thể chọn $S(x)\equiv 0$ và $R(x)=P(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện i) và ii). Giả sử $m\geq n$ và định lý đã được

chứng minh với đa thức có bậc nhỏ hơn m. Ta chứng minh định lý đúng với các đa thức bậc m. Giả sử

$P(x)=\sum_{k=0}^{m}a_{k}x^{k},Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_{k}x^{k}$

Xét đa thức

$H(x)=P(x)-\dfrac{a_{m}}{b_{n}}x^{m-n}Q(x)$

$=(a_{m}x^{m}+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_{1}x+a_{0})-\dfrac{a_{m}}{b_{n}}x^{m-n}(b_{n}x^{n}+...+b_{0})$

$=\begin{pmatrix} a_{m-1}-\dfrac{a_{m}b_{n-1}}{b_{n}} \end{pmatrix}x^{m-1}+...$

Do hệ số của x^{m} ở hai đa thức bị triệt tiêu nên bậc của $H(x)$ không vượt quá $m-1$.

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại các đa thức $S^*(x)$ và $R^*(x)$ sao cho

$H(x)=S^*(x).Q(x)+R^*(x)$

Nhưng khi đó

$P(x)=H(x)+\frac{a_{m}}{b_{n}}x^{m-n}Q(x)=(\frac{a_{m}}{b_{n}}x^{m-n}+S^*(x))+R^*(x)$

Vậy đặt $S(x)=\frac{a_{m}}{b_{n}}x^{m-n}+S^*(x)$ và $R(x)=R^*(x)$ ta được biểu diễn cần tìm cho $P(x)$

Duy nhất. Giả sử ta có hai biểu diễn $P(x)=S(x).Q(x)+R(x)$ và $P(x)=S^*(x).Q(x)+R^*(x)$ thoả mãn điều kiện ii). Khi đó

$Q(x).(S(x)-S^*(x))=R^*(x)-R(x).$

Ta có, theo điều kiện ii) và định lý 1 thì $\deg(R^*(x)-R(x))<\deg(Q)$. Mặt khác, nếu $S(x)-S^*(x)$ không đồng nhất bằng 0 thì

$\deg(Q(x).(S(x)-S^*(x)))=\deg(Q(x))+\deg(S(x)-S^*(x))\geq \deg(Q).$

Mâu thuẫn vì hai vế bằng nhau.

Theo ký hiệu của định lý thì $S(x)$ được gọi là thương số và $R(x)$ được gọi là dư số trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$.

Phép chứng minh nói trên cũng cho chúng ta thuật toán tìm thương số và dư số của phép chia hai đa thức, gọi là *phép chia dài* (long division) hay *sơ đồ Horner*

Ví dụ: Thực hiện phép chia $3x^{3}-2x^{2}+4x+7$ cho $x^{2}+2x$ được $3x-8$, dư $20x+7$.

1,7. Sự chia hết. Ước và bội.

Trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$, nếu dư số $R(x)$ đồng nhất bằng 0 thì ta nói rằng đa thức $P(x)$ *chia hết cho* đa thức $Q(x)$. Như vậy,

$P(x)$ *chia hết* cho $Q(x)$ nếu tồn tại đa thức $S(x)$ sao cho $P(x) = Q(x).S(x)$. Trong trường hợp này ta cũng nói $Q(x)$ *chia hết* $P(x)$,$Q(x)$ là

ước của P(x) hoặc P(x) là *bội* của Q(x). Ký hiệu tương ứng là Q(x) | P(x) và P(x)\vdots Q(x).

Cho P(x) và Q(x) là các đa thức khác 0. Ước chung lớn nhất của P(x) và Q(x) là đa thức D(x) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

i)D(x) là đa thức đơn khởi, tức là có hệ số cao nhất bằng 1

ii)D(x) là ước chung của P(x) và Q(x), tức là D(x) | P(x) và D(x) | Q(x)

iii) Nếu D'(x) cũng là ước chung của P(x) và Q(x) thì D(x) cũng là ước của D'(x).

Tương tự, ta có khái niệm bội chung nhỏ nhất của hai đa thức.

Cho P(x) và Q(x) là các đa thức khác 0. Bội chung lớn nhất của P(x) và Q(x) là đa thức M(x) thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

iv)M(x) là đa thức đơn khởi, tức là có hệ số cao nhất bằng 1

v)M(x) là bội chung của P(x) và Q(x), tức là P(x) | M(x) và Q(x) | M(x)

vi) Nếu M'(x) cũng là bội chung của P(x) và Q(x) thì M'(x) cũng là bội của M(x).

Ký hiệu UCLN và BCNN của hai đa thức P(x), Q(x) là GCD(P(x),Q(x)), LCM(P(x), Q(x)) hay đơn giản hơn là (P(x),Q(x)),[P(x), Q(x)].

Hai đa thức P(x),Q(x) được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu (P(x), Q(x))= 1.

1.8. Thuật toán Euclide

Để tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức P(x), Q(x), ta sử dụng thuật toán Euclide sau đây:

Định lý 3. Giả sử có hai đa thức P(x), Q(x), trong đó deg(P)\geq deg(Q). Thực hiện phép chia P(x) cho Q(x) được thương số là S(x) và dư số là R(x). Khi đó

Nếu R(x)=0 thì (P(x),Q(x))=q{*-1}Q(x), trong đó q^* là hệ số cao nhất của đa thức Q(x)

Nếu R(x)\neq 0 thì (P(x),Q(x))=(Q(x),R(x))

Chứng minh: Nếu R(x)=0 thì P(x)=Q(x).S(x). Khi đó đa thức q^{*-1}Q(x) rõ ràng thoả mãn tất cả các điều kiện của UCLN.

Nếu R(x)\neq 0, đặt D(x)=(P(x),Q(x)), D'(x)=(Q(x),R(x)). Ta có D(x)|P(x)-Q(x).S(x)=R(x), suy ra là ước chung của Q(x),R(x), theo định

nghĩa của D'(x), ta có D'(x) là ước của D(x). Mặt khác D'(x)|Q(x)S(x)+R(x)= P(x), suy ra D'(x) là ước chung của P(x),Q(x), theo định

nghĩa của D(x), ta có D(x) là ước của D'(x). Từ đây, do D và D' đều là các đa thức đơn khởi, ta suy ra D=D'.

Định lý trên giải thích cho thuật toán Euclide để tìm UCLN của hai đa thức theo như ví dụ dưới đây:

Ví dụ: Tìm ước chung lớn nhất của hai đa thức x^5-5x+4 và x^3-3x^2+2

Ta lần lượt thực hiện các phép chia

x^5-5x+4 cho x^3-3x^2+2 được x^2+3x+9 dư 25x^2-11x-14

x^3 – 3x^2 + 2 cho 25x^2 –11x – 14 được \frac{25x – 64}{625}, dư \frac{354}{625}(x-1)

25x^2 – 11x – 14 cho x-1 được 25x + 14 dư 0

Vậy (x^5 – 5x + 4, x^3 – 3x^2 + 2) = x – 1.

Lưu ý, trong quá trình thực hiện, ta có thể nhân các đa thức với các hằng số khác 0. Ví dụ trong phép chia cuối cùng, thay vì chia 25x^2 – 11x – 14 cho \frac{354}{625}(x-1) ta đã chia cho x – 1.

1.9. Tính chất của phép chia hết

Nhắc lại, hai đa thức P(x),Q(x) được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu (P(x), Q(x))= 1. Ta có định lý thú vị và có nhiều ứng dụng sau về các đa thức nguyên tố cùng nhau:

Định lý 4. (Bezout) Hai đa thức P(x) và Q(x) nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại các đa thức U(x),V(x) sao cho P(x).U(x)+Q(x).V(x)=1.

Chứng minh. Giả sử tồn tại các đa thức U(x) và V(x) thoả mãn điều kiện P(x).U(x)+Q(x).V(x)=1.

Đặt D(x)=(P(x),Q(x)) thì D(x)|P(x),D(x)|Q(x) suy ra D(x)|1=P(x).U(x) + Q(x).V(x). Suy ra D(x)=1.

Ngược lại, giả sử (P(x),Q(x)) =1. Ta chứng minh tồn tại các đa thức U(x) và V(x) sao cho

P(x).U(x)+Q(x).V(x)=1. Ta chứng minh bằng quy nạp theo m=min\begin{Bmatrix} deg(P),deg(Q)\end{Bmatrix}.

Nếu m = 0 thì điều cần chứng minh là hiển nhiên. Chẳng hạn nếu deg(Q)=0 thì Q=q là hằng số và ta chỉ cần chọn U(x)=0,V(x)=q^{-1} thì

ta được P(x).U(x)+ Q(x).V(x)=1.

Giả sử ta đã chứng minh định lý đúng đến m. Xét hai đa thức P(x), Q(x) có min\begin{Bmatrix} deg(P),deg(Q) \end{Bmatrix}=m+1.

Không mất tính tổng quát, giả sử m+1=deg(Q). Thực hiện phép chia P(x) cho Q(x) được thương là S(x) và dư là R(x). Không thể xảy ra

trường hợp R(x)=0 vì khi đó 1=(P(x),Q(x))=q^{*-1}Q(x). Vì vậy, ta có 1=(P(x),Q(x))=(Q(x),R(x))

Lúc này, do min(deg(Q),deg(R))=deg(R)<m +1 nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại các đa thức U*(x),V*(x) sao cho

Q(x)V*(x) + R(x)U*(x) = 1. Thay R(x)= P(x)–Q(x).S(x), ta được

Q(x)V*(x) + (P(x) – Q(x)S(x))U*(x) =1

Hay

P(x)U*(x) + Q(x)(V*(x) – S(x)U*(x)) =1

Đặt U(x) = U*(x),V(x) = V*(x) – S(x)U*(x) ta được đpcm.

Tính chất của phép chia hết

i)Q| P, Q|R suy ra Q|P+R hay tổng quát hơn Q|P.U+R.V với U,V là các đa thức bất kỳ.

ii)Q|P,P|R suy ra Q|R (tính bắc cầu)

iii)Q|P, P|Q suy ra tồn tại số thực khác 0 a sao cho Q=aP (ta gọi P và Q là các đa thức *đồng dạng*)

iv) Nếu Q_1|P_1 và Q_2|P_2 thì Q_{1}.Q_{2}|P_{1}.P_{2}.

v) Nếu Q|P.R và (P, Q)=1 thì Q|R.

vi) Nếu Q|P,R |P và (Q, R)=1 thì Q.R|P

Chứng minh. Các tính chất i)-iv) là hiển nhiên xuất phát từ định nghĩa Q|P tồn tại S sao cho P=Q.S.

Để chứng minh các tính chất v) và vi), ta sẽ áp dụng định lý Bezout.

v) Từ giả thiết Q|P.R và (P,Q) =1 suy ra tồn tại S sao cho P.R = Q.S và U,V sao cho P.U+Q.V=1

Khi đó R=(P.U+Q.V).R=(P.R)U+Q.V.R=Q.S.U+Q.V.R=Q.(SU+VR) suy ra Q|R.

vii) Từ giả thiết Q|P, R|P và (Q, R)=1 suy ra P=Q.S. Vì P=Q.S chia hết cho R, mà (Q, R)=1 nên theo v) suy ra S chia hết cho R,

tức là S=R.S1. Vậy P=Q.S =(Q.R).S1 suy ra P chia hết cho Q.R.

1.10. Các ví dụ có lời giải

Bài toán 1. Tìm tất cả các cặp số a,b sao cho x^4+4x^3+ax^2+bx+1 là bình phương của một đa thức.

Giải: Nếu x^4+4x^3+ax^2+bx+1 là bình phương của một đa thức thì đa thức đó phải có bậc 2. Giả sử x^4+4x^3+ax^2+bx+1=(Ax^2+Bx+C)^2

\Leftrightarrow x^4+4x^3+ax^2+bx+1=A^2x^4+2ABx^3+(2AC+B^2)x^2+2BCx+C^2

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được

A^2= 1,2AB=4,2AC+B^2=a,2BC=b,C^2 =1.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử A=1, suy ra B=2. C có thể bằng 1 hoặc -1. Nếu C = 1 thì a=6,b=4. Nếu C = -1 thì a=2,b=-4.

Vậy có hai cặp số (a, b) thoả mãn yêu cầu bài toán là (6,4) và (2,-4).

Bài toán 2. Cho đa thức P(x) và hai số a, b phân biệt. Biết rằng P(x) chia cho x-a dư A,P(x) chia cho x-b dư B. Hãy tìm dư của phép chia P(x) cho (xa)(xb).

Giải: Giả sử P(x) = (xa)(xb)Q(x) + Cx + D. Lần lượt thay x = a,b, ta được

A = Ca + D, B = Cb + D

Từ đó suy ra C = \frac{AB}{ab}, D = A – AB\frac{a}{ab} = \frac{aB – bA}{ab}.

Bài toán 3. Tìm dư trong phép chia x^{100} cho \left (x-1 \right)^2.

Giải: Giả sử x^{100}=\left (x-1 \right)^2Q\left (x \right)+Ax+B. Thay x=1, ta được

1 = A + B.

Lấy đạo hàm hai vế rồi cho x = 1, ta được

100 = A

Từ đó suy ra dư là 100x – 99.

Trần Nam Dũng

Mời bạn thảo luận thêm tại đây