CÁC BÀI THI OLYMPIC TOÁN

CHÂU Á THÁI BÌNH DƯƠNG

(Phiên bản 1-230505) : Từ năm 1989 đến 2005

by Hà Duy Hưng and www.ddtoanhoc.net

Tôi nghe thì tôi sẽ quên

Tôi nghĩ thì tôi sẽ nhớ

Tôi học thì tôi sẽ hiểu

Hình 1: Logo của cuộc thi Toán APMO.

APMO là viết tắt của cụm từ "Asian Pacific Mathematics Olympiad", là một cuộc thi Toán học dành cho các học sinh cấp độ PTTH ở các nước thuộc Châu Á Thái Bình Dương. Cuộc thi được bắt đầu từ nằm 1989, diễn ra trong một ngày, trong mỗi bài thi có năm bài toán, thời gian làm bài là 4 tiếng, và không được sử dụng máy tính trong phòng thi. Việt Nam tham dự APMO lần đầu tiên vào năm 1996 và ngay năm đó chúng ta xếp hạng cao nhất. Do sự cố về đề thi năm 2001 cho nên từ năm 2002 cho đến nay Việt Nam đã không tham gia kì thi này nữa. Từ năm 1989 đến hết năm 2005 đã diễn ra cả thảy 17 cuộc thi và do đó đã có tổng cộng $17 \times 5 = 85$ bài toán từ cuộc thi này.

Danh sách các bạn đoạt huy chương vàng APMO của Việt Nam qua các năm tham dự (từ 1996 đến 2001):

1. **Ngô Đắc Tuấn:** Khối chuyên ĐHKHTN thành phố Hà Nội, năm 1996.
2. **Lê Quang Nẫm:** Khối chuyên ĐHKHTN thành phố Hồ Chí Minh năm 1997.
3. **Đoàn Nhật Dương:** Trường PTTH chuyên Thái Bình, năm 1998.
4. **Lê Thái Hoàng:** Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm 1999.
5. **Nguyễn Trung Lập:** Trường PTTH chuyên Vĩnh Phúc, năm 2000.
6. **Vũ Hoàng Hiệp:** Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm 2001.

Mục lục

Chương 1

Các bài thi từ cuộc thi APMO

1.1 Lần thứ nhất, năm 1989

1. Cho các số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ở đó n là số nguyên dương), và đặt
$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức sau
$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \leq 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}$$

2. Chứng minh rằng phương trình
$$6(6a^2 + 3b^2 + c^2) = 5n^2$$
không có nghiệm số nguyên nào ngoài nghiệm tầm thường
$$a = b = c = n = 0$$

3. Cho ba điểm A_1, A_2, A_3 trong mặt phẳng, và để cho tiện ta kí hiệu $A_4 = A_1$ và $A_5 = A_2$. Với $n = 1, 2$ và 3, giả sử rằng B_n là trung điểm của đoạn thẳng A_nA_{n+1}, và giả sử rằng C_n là trung điểm của đoạn thẳng A_nB_n. Giả sử rằng A_nC_{n+1} và B_nA_{n+2} cắt nhau tại D_n, và rằng A_nB_{n+1} và C_nA_{n+2} cắt nhau tại E_n. Hãy tính tỉ số diện tích của hai tam giác $\Delta D_1D_2D_3$ và $\Delta E_1E_2E_3$.

4. Kí hiệu S là tập hợp gồm có m cặp số nguyên dương (a, b) thoả mãn tính chất $1 \leq a < b \leq n$. Chứng minh rằng có ít nhất
$$4m \cdot \frac{m - \frac{n^2}{4}}{3n}$$
bộ ba (a, b, c) các số nguyên dương thoả mãn các cặp (a, b); (b, c) và (c, a) rơi vào S.

5. Hãy xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

   (a) $f(x)$ là hàm **tăng ngặt**, và [1]

   (b) $f(x) + g(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

   ở đó $g(x)$ là hàm ngược của hàm $f(x)$, nghĩa là hàm số $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn $f(g(x)) = x$ và $g(f(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Không có việc gì khó
Chỉ sợ lòng không bền
Đào núi và lấp biển
Quyết chí ắt là nên.

Chủ tịch Hồ Chí Minh

[1] Hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là **tăng ngặt** nếu với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y)$

1.2 Lần thứ hai, năm 1990

1. Cho tam giác ΔABC với G là trọng tâm. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. Với mỗi giá trị của số đo của góc $\widehat{BAC}$, có bao nhiêu tam giác không đồng dạng mà $AEGF$ là một tứ giác nội tiếp ?.

2. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương (với $n \in \mathbb{Z}_+$), và với mỗi $k = 1, 2, \ldots, n$ ta kí hiệu S_k là tổng của tất cả các tích của k số được lấy từ các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hãy chứng minh rằng

$$S_n \cdot S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n-1$. [2]

3. Xét tất cả các tam giác ΔABC có cạnh AB cố định và độ dài của đường cao xuất phát từ đỉnh C của tam giác là không đổi. Hỏi rằng trong các tam giác đó, tam giác nào có tích độ dài ba đường cao của nó đạt giá trị lớn nhất ?.

4. Một tập hợp có 1990 người được chia thành các tập con rời nhau theo cách sau đây

   (a) Trong một tập con bất kì không có người nào quen tất cả mọi người trong tập hợp đó,

   (b) Giữa ba người bất kì trong cùng một tập hợp con, luôn có hai người không quen nhau,

   (c) Với hai người bất kì trong cùng tập hợp con mà không quen nhau, luôn tồn tại một người cũng trong tập con đó quen cả hai người trên.

   1) Chứng minh rằng trong mỗi tập con mọi người đều có số người quen trong tập đó là bằng nhau.

   2) Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể số các tập con ?.

   Chú ý. Mỗi người đều được xem là quen chính mình và nếu người A mà quen người B thì cũng có nghĩa là người B quen người A.

5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 6$ tồn tại một lục giác lồi mà có thể chia nó ra thành đúng n tam giác đồng dạng với nhau.

---

[2] Ở đây $\binom{n}{m}$ được kí hiệu là tổ hợp chập m của n phần tử, công thức hiện của hệ số tổ hợp này là

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

trong đó $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$, tích của k số nguyên dương đầu tiên.

1.3 Lần thứ ba, năm 1991

1. Cho tam giác ΔABC với G là trọng tâm và M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Lấy các điểm X và Y trên các đường thẳng AC và AB, tương ứng, sao cho ba điểm X, Y, G thẳng hàng và đồng thời XY song song với BC. Giả sử rằng XC và GB cắt nhau tại điểm Q còn YB và GC cắt nhau tại điểm P. Chứng minh rằng tam giác ΔMPQ đồng dạng với tam giác ΔABC.

2. Trong mặt phẳng cho 997 điểm. Giả sử rằng hai điểm bất kì đều có đoạn thẳng nối chúng và trung điểm của mỗi đoạn thẳng như thế được tô mầu đỏ. Chứng minh rằng trong mặt phẳng có ít nhất 1991 điểm mầu đỏ và hãy xác định xem liệu có thể chọn các điểm đã cho sao cho có đúng 1991 điểm mầu đỏ trong mặt phẳng hay không ?

3. Cho số nguyên dương n và $2n$ số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ thoả mãn
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$
Chứng minh rằng
$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$$

4. Trong giờ giải lao, n học sinh ngồi thành một vòng tròn bao quanh thầy giáo của họ để cùng tham gia một cuộc chơi. Thầy giáo đi theo chiều ngược kim đồng hồ gần các em học sinh và đưa cho các em cầm các cây nến theo quy tắc sau đây. Thầy giáo chọn một học sinh và trao cho học sinh đó một cây nến, sau đó ông bỏ qua học sinh tiếp theo rồi lại đưa một cây nên cho học sinh kế tiếp theo, rồi ông lại bỏ qua hai học sinh kế tiếp và đưa một cây nến cho học sinh kế tiếp, rồi ông lại bỏ qua ba em học sinh, rồi cứ thế cứ thế. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương n sao cho sau một số hữu hạn vòng mỗi học sinh có ít nhất một cây nến.

5. Cho hai đường tròn tiếp xúc với nhau và một điểm P nằm trên tiếp tuyến chung của hai đường tròn mà vuông góc với đường nối hai tâm của đường tròn. Hãy dùng thước kẻ và compass để dựng tất cả các đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn đã cho và đi qua điểm P.

Không chiến thắng nào vinh quang hơn là chiến thắng chính bản thân mình.

V.I. Lenin

1.4 Lần thứ tư, năm 1992

1. Một tam giác với độ dài ba cạnh là a, b và c cho trước. Kí hiệu s là nửa chu vi của tam giác đó, nghĩa là $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Dựng tiếp một tam giác với ba cạnh là $s-a$, $s-b$ và $s-c$. Quá trình này được làm tiếp tục cho đến khi không thể dựng được thêm một tam giác nào nữa. Hãy xác định điều kiện cho tam giác ban đầu để quá trình trên có thể thực hiện vô hạn.

2. Cho đường tròn $\mathcal{C}$ có tâm là O và bán kính r. Hai đường tròn $\mathcal{C}_1$ có tâm O_1 và $\mathcal{C}_2$ có tâm O_2 nằm trong đường tròn $\mathcal{C}$, tiếp xúc trong với $\mathcal{C}$ tại các điểm tương ứng là A_1 và A_2 đồng thời hai tiếp xúc ngoài nhau tại điểm A. Chứng minh rằng ba đường thẳng OA, O_1A_2 và O_2A_1 đồng quy.

3. Cho n là một số nguyên lớn hơn 3. Giả sử rằng chúng ta đã chọn ra ba số từ tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sử dụng mỗi số trong ba số một lần và dùng các phép toán cộng, nhân, dấu ngoặc đơn để tạo ra tất cả các tổ hợp có thể

   (a) Chứng minh rằng nếu cả ba số ta chọn đều lớn hơn $n/2$ thì các giá trị của các tổ hợp nói trên là khác nhau.

   (b) Cho p là một số nguyên tố thoả mãn $p \leq \sqrt{n}$. Chứng minh rằng số tất cả các cách chọn ba số sao cho số bé nhất là p và các giá trị của các tổ hợp không phải tất cả đều phân biệt đúng bằng số tất cả các ước dương của $p-1$.

4. Hãy xác định tất cả các cặp số nguyên dương (h, s) thoả mãn tính chất sau đây: Nếu ta vẽ h đường nằm ngang và s đường thẳng khác thoả mãn:

   (a) Chúng không phải là đường nằm ngang,

   (b) Không có hai đường thẳng nào trong chúng song song

   (c) Không có ba đường nào trong số $h+s$ đường thẳng đó là đồng quy.

   thì số các miền được tạo ra bởi $h+s$ đường thẳng đó đúng bằng 1992.

5. Hãy xác định một dãy số dài nhất bao gồm các số nguyên khác không thoả mãn tổng của bảy số hạng liên tiếp bất kì đều dương và tổng của mười một số hạng liên tiếp bất kì đều âm.

Mathematics is an art, as an art choses the beauty and freedom

P. Morse

1.5 Lần thứ năm, năm 1993

1. Cho tứ giác $\Delta ABCD$ thoả mãn tất cả các cạnh của nó bằng nhau và số đo góc $\widehat{ABC}$ bằng 60^0. Một đường thẳng (l) đi qua điểm D và không cắt tứ giác (trừ tại D). Gọi E và F lần lượt là giao điểm của đường thẳng (l) với hai đường thẳng AB và BC tương ứng. Gọi M là giao điểm của CE và AF. Hãy chứng minh rằng $CA^2 = CM \cdot CE$.

2. Hãy xác định tất cả các giá trị nguyên khác nhau của hàm số
$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3}\right] + [3x] + [4x]$$
khi mà biến thực x chạy trong đoạn thẳng $[0, 100]$.

3. Cho hai đa thức hệ số thức khác không có dạng
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$g(x) = c_{n+1} x^{n+1} + c_n x^n + \cdots + c_0$$
và thoả mãn $g(x) \equiv (x + r)f(x)$ với r là hằng số thực. Kí hiệu $a = \max\{|a_n|, \ldots, |a_0|\}$ và $c = \max\{|c_{n+1}|, \ldots, |c_0|\}$. Chứng minh rằng $a \leq c(n + 1)$.

4. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương n thoả mãn phương trình
$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$$
có nghiệm số nguyên.

5. Cho 1993 điểm phân biệt $P_1, P_2, \ldots, P_{1993}$ trong mặt phẳng toạ độ thoả mãn các tính chất sau

   (a) Tất cả các toạ độ của P_i là nguyên với $i = 1, 2 \ldots, 1993$.

   (b) Không có điểm nào khác P_i và P_{i+1} trên đoạn thẳng nối hai điểm P_i và P_{i+1} mà có cả hai hoành độ và tung độ là những số nguyên, với $i = 0, 1, \ldots, 1992$. Ở đó $P_0 \equiv P_{1993}$.

   Chứng minh rằng có thể tìm được số nguyên i nào đó, với $0 \leq i \leq 1992$, thoả mãn tồn tại một điểm Q có toạ độ (u, v) nằm trên đoạn thẳng $P_i P_{i+1}$ sao cho $2u$ và $2v$ là các số nguyên lẻ.

We must know, we will know

David Hilbert

1.6 Lần thứ sáu, năm 1994

1. Hãy xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây

   (a) $f(x) + f(y) + 1 \geq f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

   (b) $f(0) \geq f(x)$ với mọi $x \in [0, 1)$

   (c) $f(1) = 1$ và $f(-1) = -1$

2. Cho tam giác ΔABC không suy biến có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác và trực tâm H và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R thì ta có đánh giá $OH < 3R$.

3. Cho n là một số nguyên dương có dạng $a^2 + b^2$, ở đó a và b là các số nguyên nguyên tố cùng nhau và thoả mãn nếu p là số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{n}$ thì p là ước của ab. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương n như thế.

4. Tồn tại hay không một tập gồm có vô hạn các điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa hai điểm bất kì đều là một số hữu tỷ.

5. Chúng ta có ba danh sách A, B và C. Danh sách A chứa tất cả các số có dạng 10^k viết trong cơ sở 10, với k là số nguyên dương tuỳ ý. Danh sách B và C cũng chứa các số tương ứng như vậy nhưng được viết trong cơ sở 2 và 5 tương ứng (xem ví dụ dưới đây)

A	B	C
10	1010	20
100	1100100	400
1000	1111101000	13000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

   Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$, có đúng một số ở đúng một trong hai danh sách B hoặc C thoả mãn số đó có đúng n chữ số.

Lucky better than clever

Ngạn ngữ cổ Hy Lạp

1.7 Lần thứ bẩy, năm 1995

1. Xác định tất cả các dãy số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$ thoả mãn điều kiện

$$2\sqrt{a_n - n + 1} \geq a_{n+1} - n + 1 \quad \text{với } n = 1, 2, \ldots, 1995$$

   ở đó ta coi $a_{1996} = a_1$

2. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là dãy các số nguyên với các giá trị từ 2 đến 1995 thoả mãn

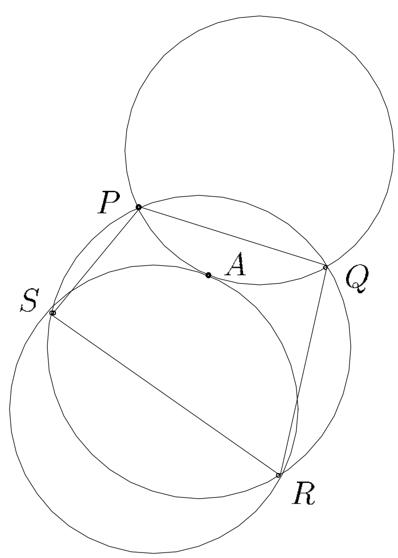
   (a) Bất kì hai trong số các số nói trên đều nguyên tố cùng nhau, nghĩa là, với mọi $i, j \in \{1, 2, \ldots, 1995\}$ mà $i \neq j$ thì $\gcd(a_i, a_j) = 1$

   (b) Với mỗi số hạng của dãy thì là số nguyên tố hoặc là tích của các số nguyên tố phân biệt.

   (c) Không có hai số nào trong dãy có cùng ước nguyên tố.

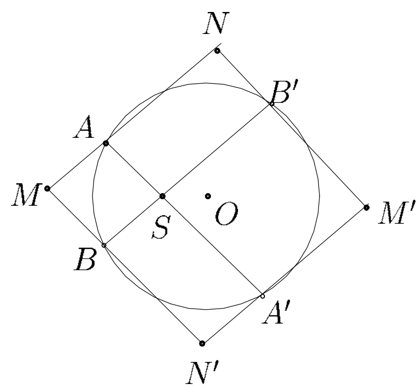
   Hãy xác định giá trị bé nhất có thể của n để đảm bảo rằng dãy sẽ chứa một số nguyên tố.

3. Cho tứ giác $PQRS$ nội tiếp được thoả mãn điều kiện PQ và RS không song song. Xét tập tất cả các đường tròn đi qua hai điểm P và Q, và tập tất cả các đường tròn đi qua hai điểm R và S. Hãy xác định tập hợp A tất cả các điểm tiếp xúc của các đường tròn trong hai tập hợp đó.



4. Cho $\mathcal{C}$ là một đường tròn với bán kính R và tâm O, và S là một điểm cố định bên trong $\mathcal{C}$. Cho AA' và BB' là các dây cung vuông góc với nhau và cùng đi qua điểm S. Xét các hình chữ nhật $SAMB$, $SBN'A'$, $SA'M'B'$, và

$SB'NA$. Hãy xác định tập hợp tất cả các điểm M, N', M' và N khi mà A chuyển động vòng quanh cả đường tròn.



5. Tìm số nguyên dương k bé nhất thoả mãn tồn tại một hàm số f đi từ $\mathbb{Z}$ tập tất cả các số nguyên đến tập hợp $\{1, 2, \ldots, k\}$ với tính chất $f(x) \neq f(y)$ với mọi $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$.

Trời có bốn mùa, đất có bốn phương, con người có bốn đức "Cần kiệm, liêm chính, chí công, vô tư" thiếu một trong bốn đức ấy thì không phải là người cách mạng.

Chủ tịch Hồ Chí Minh

1.8 Lần thứ tám, năm 1996

1. Cho tứ giác $ABCD$ với $AB = BC = CD = DA$. Gọi MN và PQ là các đoạn thẳng vuông góc với đường chéo BD và thoả mãn khoảng cách giữa chúng bằng $d > \frac{BD}{2}$, với $M \in AD$, $N \in DC$, $P \in AB$ và $Q \in BC$. Chứng minh rằng chu vi của lục giác $AMNCQP$ không phụ thuộc vào vị trí của MN và PQ khi mà khoảng cách giữa chúng luôn là hằng số.

2. Cho cac số nguyên dương m và n thoả mãn $n \leq m$. Chứng minh bất đẳng thức
$$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2+m)^n$$

3. Cho bốn điểm P_1, P_2, P_3, P_4 cùng nằm trên một đường tròn và I_1 là tâm nội tiếp của tam giác $\Delta P_2P_3P_4$. Các điểm I_2, I_3, I_4 được xác định tương tự. Chứng minh rằng bốn điểm I_1, I_2, I_3, I_4 là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

4. Hội đồng hôn nhân quốc gia muốn mời n cặp tạo thành 17 nhóm dưới các điều kiện sau đây:

   (a) Tất cả các thành viên trong cùng một nhóm phải có cùng giới tính

   (b) Số người trong hai nhóm chỉ sai khác nhau hoặc là 0 hoặc là 1.

   (c) Tất cả các nhóm có ít nhất một người.

   (d) Mỗi người phải thuộc ít nhất một nhóm.

   Hãy tìm tất cả các số n thoả mãn $n \leq 1996$ mà việc chia nhóm như trên là có thể thực hiện được. Chứng minh các trả lời của bạn.

5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$
và hãy xác định xem khi nào đẳng thức xảy ra dấu bằng.

Còn đường dẫn tới vinh quang không có dấu chân của kẻ lười biếng.

Ngạn ngữ cổ

1.9 Lần thứ chín, năm 1997

1. Ta kí hiệu S là giá trị của tổng
$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1993006}}$$
ở đó các mẫu số chứa các tổng riêng của dãy các số tam giác nghịch đảo. Chứng minh rằng $S > 1001$.

2. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương n thoả mãn $100 \leq n \leq 1997$ và số
$$\frac{2^n + 2}{n}$$
là một số nguyên.

3. Cho tam giác ΔABC và kí hiệu
$$l_a = \frac{m_a}{M_a},\ l_b = \frac{m_b}{M_b},\ l_c = \frac{m_c}{M_c}$$
ở đó m_a, m_b, m_c là độ dài của các đường phân giác trong và M_a, M_b, M_c là độ dài của các đường phân giác ngoài tính từ đỉnh đến giao điểm của nó với đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng
$$\frac{l_a}{\sin^2 A} + \frac{l_b}{\sin^2 B} + \frac{l_c}{\sin^2 C} \geq 3$$
và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔABC là một tam giác đều. equilateral triangle.

4. Cho tam giác $\Delta A_1A_2A_3$ vuông ở A_3. Một dãy các điểm được xác định như quá trình sau đây. Từ điểm A_n (ở đó n là một số nguyên dương, $n \geq 3$) một đường thẳng vuông góc được vẽ cắt $A_{n-2}A_{n-1}$ tại A_{n+1}.
   (a) Chứng minh rằng nếu quá trình nói trên là vô hạn, thì có đúng một điểm P nằm trong tam giác $\Delta A_{n-2}A_{n-1}A_n$ với $n \geq 3$
   (b) Cho A_1 và A_3 là các điểm cố định. Xét tất cả các khả năng có thể của A_2 trên mặt phẳng, tìm quỹ tích của điểm P.

5. Giả sử rằng có n người A_1, A_2,..., A_n, ($n \geq 3$) ngồi theo một vòng tròn và A_i có a_i vật thoả mãn
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nN$$
ở đó N là số nguyên dương. Để mỗi người có cùng số vật, mỗi người A_i đưa hoặc nhận được một số các vật từ những người ngồi bên cạnh là A_{i-1} và A_{i+1} (ở đó ta lấy theo modulo n, nghĩa là hiểu A_{n+1} là A_1, A_n cũng có nghĩa là A_0). Hỏi phải chuyển các đồ vật như thế nào để tổng số các đồ vật được chuyển là bé nhất.

1.10 Lần thứ mười, năm 1998

1. Ta kí hiệu $\mathcal{F}$ là tập tất cả cá bộ gồm n phần tử $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ thoả mãn A_i là một tập con của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 1998\}$. Kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A. Hãy xác định
$$\sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in F} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a và b thì số $(36a+b)(36b+a)$ không thể là luỹ thừa của 2.

3. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

4. Cho tam giác ΔABC với D là chân đường cao hạ từ đỉnh A. Cho E và F nằm trên đường thẳng đi qua điểm D thoả mãn AE vuông góc với BC, AF vuông góc với CF, trong đó cácđiểm E và F khác điểm D. Lấy các điểm M và N là trung điểm của các đoạn thẳng BC và EF, tương ứng. Chứng minh rằng AN vuông góc với NM.

5. Hãy xác định số nguyên dương n lớn nhất thoả mãn n chia hết cho tất cả các số nguyên dương bé hơn $\sqrt[3]{n}$.

Những phát minh của tôi được bắt nguồn từ đâu ư ? Hồi tôi còn đi học, các bạn của tôi luôn hiểu bài rất nhanh còn tôi thì không được như vậy. Vì vậy khi học vấn đề nào tôi cũng phải học tập nhiều hơn và suy nghĩ lâu hơn so với các bạn, thậm chí có nhiều vấn đề về sau này tôi mới hiểu. Bởi lý do đó cho nên các vấn đề tôi thường hiểu sâu hơn so với các bạn. Chỉ có vậy thôi.

Albert Einstein

1.11 Lần thứ mười một, năm 1999

1. Hãy xác định số nguyên dương n bé nhất thoả mãn tính chất sau đây: không tồn tại một cấp số cộng gồm 1999 số hạng mà trong đó chứa đúng n số nguyên.

2. Cho dãy số thực $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thoả mãn $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots,$. Chứng minh rằng
$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$
với mỗi số nguyên dương n.

3. Cho hai đường tròn Γ_1 và Γ_2 cắt nhau tại hai điểm P và Q. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn, điểm mà gần P hơn, tiếp xúc với Γ_1 ở điểm A và tiếp xúc với Γ_2 tại điểm B. Tiếp tuyến của Γ_1 tại điểm P cắt Γ_2 ở điểm C khác với P, và đường thẳng AP cắt BC ở điểm R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔPQR tiếp xúc với BP và BR.

4. Hãy xác định tất cả các cặp số nguyên (a, b) thoả mãn tính chất: các số $a^2 + 4b$ và $b^2 + 4a$ đồng thời là các số chính phương.

5. Cho S là tập hợp gồm có $2n+1$ điểm trong mặt phẳng thoả mãn không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào nằm trên đường tròn. Một đường tròn được gọi là *tốt* nếu nó chứa ba điểm của S (tức là có ba điểm của S nằm trên đường tròn đó), $n-1$ điểm nằm trong đường tròn và $n-1$ điểm còn lại nằm ngoài đường tròn. Chứng minh rằng số các đường tròn *tốt* cùng tính chẵn lẻ với n.

Mọi thứ đều do làm việc mà có.

Alex Ferguson

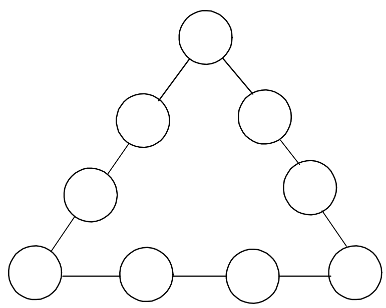
1.12 Lần thứ mười hai, năm 2000

1. Hãy xác định giá trị của tổng

$$S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$$

ở đó $x_i = \dfrac{i}{101}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 101$.

2. Cho một tam giác mà trên đó đặt các đường tròn như hình vẽ dưới đây



Mỗi một trong các số $1, \ldots, 9$ sẽ được viết vào trong những đường tròn đó, sao cho mỗi đường tròn chứa đúng một số và thoả mãn:

(a) Tổng của bốn số trên mỗi cạnh của tam giác là bằng nhau.

(b) Tổng của bình phương của bốn số trên mỗi cạnh cũng bằng nhau.

Hãy xác định tất cả các cách điền số thoả mãn yêu cầu.

3. Cho tam giác ΔABC. Gọi M và N là các giao điểm của đường trung tuyến và đường phân giác trong tại A với cạnh BC, tương ứng. Cho Q và P là điểm ở đó đường vuông góc tại điểm N tới NA cắt MA và AB, tương ứng, và O là điểm mà ở đó đường vuông góc tại điểm P tới BA cắt AN. Chứng minh rằng QO vuông góc với BC.

4. Cho các số nguyên dương n và k thoả mãn $n > k$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{k^k \cdot (n-k)^{n-k}} < \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} < \frac{n^n}{k^k \cdot (n-k)^{n-k}}$$

5. Cho một hoán vị $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ của dãy $0, 1, \ldots, n$. Một chuyển trí các a_i và a_j được gọi là *hợp lý* nếu $a_i = 0$ với $i > 0$, và $a_{i-1} + 1 = a_j$. Hoán vị $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ được gọi là *chính quy* nếu sau một số các chuyển trí *hợp lý* nó trở thành $(1, 2, \ldots, n, 0)$. Hỏi rằng số n phải thoả mãn điều kiện gì thì hoán vị $(1, n, n-1, \ldots, 3, 2, 0)$ là chính quy?

1.13 Lần thứ mười ba, năm 2001

1. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $S(n)$ là tổng của các chữ số viết trong cơ sở thập phân của n. Bất kì một số nguyên dương nào nhận được bằng cách bỏ đi một số các chữ số (ít nhất phải có một số bỏ đi) từ cuối bên phải của biểu diễn thập phân của n đều được gọi là một *gốc* của n. Kí hiệu $T(n)$ là tổng của tất cả các số *gốc* của n. Chứng minh rằng $n = S(n) + 9T(n)$.

2. Tìm số nguyên dương N lớn nhất thoả mãn số các số nguyên trong tập hợp $\{1, 2, \ldots, N\}$ chia hết cho 3 bằng với số các số nguyên trong tập đó mà chia hết cho 5 hoặc 7 hoặc cả hai.

3. Cho hai đa giác đều n cạnh S và T trong mặt phẳng thoả mãn giao của chúng là một $2n$ giác ($n \geq 3$). Các cạnh của đa giác S được tô mầu đỏ và các cạnh của T được tô mầu xanh. Chứng minh rằng tổng các độ dài của các cạnh có mầu xanh của đa giác $S \cap T$ bằng tổng độ dài của các cạnh tô mầu đỏ.

4. Một điểm trong mặt phẳng toạ độ được gọi là *điểm hỗn tạp* nếu một trong các toạ độ của nó là hữu tỷ và cái còn lại là vô tỷ. Hãy xác định tất cả các đa thức với hệ số thực thoả mãn các đồ thị của chúng không chứa một *điểm hỗn tạp* nào cả.

5. Hãy xác định số nguyên lớn nhất n, thoả mãn có $n + 4$ điểm A, B, C, D, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ trong mặt phẳng với $AB \neq CD$ thoả mãn điều kiện sau: với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$ các tam giác ΔABX_i và ΔCDX_i là bằng nhau.

"Nếu như tôi đã phát hiện những chân lý mới mẻ nào đó trong Khoa học thì tôi có thể khẳng định rằng tất cả các chân lý đó đều hoặc là những hệ quả trực tiếp của năm hay sáu bài toán chủ yếu mà tôi đã giải được, hoặc tuỳ thuộc vào các bài toán đố và tôi xem chúng như những cuộc chiến đấu trong đó niềm vui thắng lợi thuộc về tôi".

Decartes

1.14 Lần thứ mười bốn, năm 2002

1. Cho các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là dãy các số nguyên không âm, ở đó n là một số nguyên dương. Đặt

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Chứng minh rằng

$$a_1! \cdot a_2! \cdots a_n! \geq \left([A_n]!\right)^n$$

2. Hãy xác định tất cả các số nguyên dương a và b thoả mãn

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} \quad \text{và} \quad \frac{b^2 + a}{a^2 - b}$$

đồng thời là các số nguyên.

3. Cho tam giác ΔABC đều. Điểm P nằm trên cạnh AC và Q nằm trên cạnh AB sao cho cả hai tam giác ΔABP và ΔACQ đều nhọn. Kí hiệu R là trực tâm của tam giác ΔABP và S là trực tâm của tam giác ΔACQ. Gọi T là điểm giao của các đoạn thẳng BP và CQ. Hãy xác định tất cả các giá trị có thể của góc $\widehat{CBP}$ và $\widehat{BCQ}$ sao cho tam giác ΔTRS là đều.

4. Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + xz} + \sqrt{z + xy} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

5. Kí hiệu $\mathbb{R}$ là tập tất cả các số thực. Hãy xác định tất cả các hàm số f đi từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau đây

   (a) Có hữu hạn số thực $s \in \mathbb{R}$ thoả mãn $f(s) = 0$ và

   (b) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Bạn không nhất thiết phải tin vào Chúa, nhưng đã là một con người thì bạn nên tin vào sách.

Paul Erdos

1.15 Lần thứ mười năm, năm 2003

1. Cho các số thực a, b, c, d, e, f thoả mãn đa thức

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

phân tích thành tích của tám nhân tử tuyến tính $x - x_i$, với $x_i > 0$ với $i = 1, 2, \ldots, 8$. Xác định tất cả các giá trị có thể của f.

2. Giả sử rằng $ABCD$ là một hình vuông có độ dài cạnh là a. Trên mặt phẳng có hai đường thẳng l_1 và l_2 song song cách nhau một đoạn là a. Hình vuông $ABCD$ được đặt trên mặt phẳng đó sao cho các cạnh AB và AD giao l_1 tại E và F tương ứng. Đồng thời, các cạnh CB và CD giao l_2 ở tại G và H tương ứng. Các chu vi của tam giác ΔAEF và ΔCGH là m_1 và m_2 tương ứng. Chứng minh rằng tổng của $m_1 + m_2$ không phụ thuộc vào cách đặt của hình vuông.

3. Cho $k \geq 14$ là một số nguyên, và p_k là số nguyên tố lớn nhất bé hơn hẳn k. Bạn có thể giả sử rằng $p_k \geq \dfrac{3k}{4}$. Cho n là một hợp số nguyên. Chứng minh rằng

   (a) Nếu $n = 2p_k$, thì n không chia hết $(n-k)!$.

   (b) Nếu $n > 2p_k$ thì n chia hết $(n-k)!$

4. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, thỏa mãn $a + b + c = 1$, và cho $n \geq 2$ là một số nguyên. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}$$

5. Cho hai số nguyên m và n, tìm số nguyên dương bé nhất k thoả mãn giữa k người bất kì, hoặc là có $2m$ người trong số họ mà có thể tạo thành m cặp quen biết lẫn nhau hoặc là có $2n$ người trong số họ mà có thể tạo thành n cặp không quen biết nhau.

Biết thì nói rằng biết, không biết thì nói rằng không biết. Thế mới là biết.

Khổng Tử

1.16 Lần thứ mười sáu, năm 2004

1. Hãy xác định tất cả các tập hợp hữu hạn S các số nguyên dương thoả mãn

$$\frac{i+j}{\gcd(i,j)}$$

   là một phần tử của S với mọi $i, j \in S$

2. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm của tam giác ΔABC. Chứng minh rằng diện tích của một trong các tam giác ΔAOH, ΔBOH và ΔCOH là bằng tổng của hai tam giác còn lại.

3. Cho S là một tập hợp bao gồm 2004 điểm trong mặt phẳng, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Kí hiệu $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả các đường thẳng được xác định bởi một cặp điểm từ tập hợp S. Chứng minh rằng có thể tô mầu các điểm của S với ít nhất hai mầu, thoả mãn bất kì điểm p, q nào của S, số các đường thẳng trong $\mathcal{L}$ mà tách hai điểm p và q là số lẻ khi và chỉ khi chúng có cùng mầu. (Một đường thẳng l được gọi là tách hai điểm p và q nếu p và q nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau có bờ là đường l và không điểm nào trong chúng nằm trên l).

4. Với mỗi số thực x ta kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x, nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì

$$\left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)}\right]$$

   là một số nguyên chẵn.

5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có bất đẳng thức

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca)$$

"Một cuộc sống cân bằng là gì ư ? Hãy học một thứ gì đó và nghĩ một thứ gì đó và vẽ và sơn và hát và nhảy và chơi hàng ngày."

Robert Fulghum

1.17 Lần thứ mười bảy, năm 2005

1. Chứng minh rằng với mọi số vô tỷ a, có các số vô tỷ b và c sao cho $a+b$ và ac là các số hữu tỷ trong khi đó các số ab và $a+c$ lại là các số vô tỷ.

2. Cho các số dương a, b, c thoả mãn $abc = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

3. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác thoả mãn có thể cắt nó thành 2005 tam giác con đồng dạng.

4. Trong một thị trấn nhỏ, có $n \times n$ ngôi nhà được đánh số bởi (i, j) với $1 \leq i, j \leq n$ với $(1, 1)$ là ngôi nhà ở góc trên bên trái, ở đây i và j là các chỉ số hàng và cột, tương ứng. Tại thời điểm 0, một ngọn lửa bốc lên từ ngôi nhà $(1, c)$ ở đó $c \leq \frac{n}{2}$. Trong suốt thời gian trong đoạn $[t, t+1]$, những người dập lửa bảo vệ một ngôi nhà chưa cháy trong khi ngọn lửa lan toả đến tất cả các ngôi nhà lân cận mà không có người bảo vệ tại thời điểm t. Khi mà một ngôi nhà được bảo vệ thì nó sẽ được an toàn tại mọi thời điểm. Quá trình này kết thúc khi mà ngọn lửa không thể lan toả đi được nữa. Hỏi rằng có nhiều nhất là bao nhiêu ngôi nhà có thể được cứu bởi những người dập lửa.
   Chú ý. Một ngôi nhà ở vị trí (i, j) được gọi là lân cận của một ngôi nhà tại (k, l) nếu $|i-k| + |j-l| = 1$.

5. Trong một tam giác ΔABC, các điểm M và N nằm trên các cạnh AB và AC tương ứng, sao cho $MB = BC = CN$. Kí hiệu R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ΔABC, tương ứng. Biểu diễn tỷ số MN/BC theo R và r.

Giáo dục không phải là sự chuẩn bị cho cuộc sống; Chính Giáo dục là cuộc sống.

John Dewey