ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ
NĂM 2011

Ngày thi thứ nhất (09/4/2011)

Thời gian làm bài: **240 phút**

Bài 1. (*5,0 điểm*)

Tại điểm (1; 1) của mặt phẳng tọa độ *Oxy*, có một con cào cào. Từ điểm đó, con cào cào chỉ nhảy đến các điểm nguyên dương khác theo quy tắc: từ điểm nguyên dương *A*, con cào cào nhảy đến điểm nguyên dương *B* nếu tam giác *AOB* có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

1/ Tìm tất cả các điểm nguyên dương (m; n) mà con cào cào có thể nhảy đến sau một số hữu hạn bước nhảy, xuất phát từ điểm (1; 1).

2/ Giả sử (m; n) là một điểm nguyên dương có tính chất đã nêu ở câu 1/. Chứng minh rằng tồn tại một cách nhảy của con cào cào từ điểm (1; 1) đến điểm (m; n) mà số bước nhảy không vượt quá $|m - n|$.

(Điểm (x; y) được gọi là *điểm nguyên dương* nếu x và y là các số nguyên dương).

Bài 2. (*7,0 điểm*)

Trong mặt phẳng, cho đường tròn (*O*) và một điểm *A* nằm ngoài đường tròn đó. Qua *A*, kẻ các tiếp tuyến tới (*O*); gọi *B* và *C* là các tiếp điểm. Xét một điểm *P* di động trên tia đối của tia *BA* và một điểm *Q* di động trên tia đối của tia *CA* sao cho đường thẳng *PQ* tiếp xúc với (*O*). Đường thẳng *BC* cắt đường thẳng đi qua *P*, song song với *AC* tại *E* và cắt đường thẳng đi qua *Q*, song song với *AB* tại *F*. Chứng minh rằng

1/ Đường thẳng *EQ* luôn đi qua một điểm cố định, gọi là *M*; đường thẳng *FP* luôn đi qua một điểm cố định, gọi là *N*.

2/ Tích *PM*.*QN* không đổi.

Bài 3. (*8,0 điểm*)

Cho số nguyên $n \geq 3$. Xét n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i/ $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$;

ii/ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$;

iii/ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n(n-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $S = x_1 + x_2$.

Ngày thi thứ hai (10/4/2011)

Thời gian làm bài: **240 phút**

Bài 4. (*6,0 điểm*)

Cho dãy số nguyên dương (a_n) xác định bởi

$$a_0 = 1,\ a_1 = 3 \text{ và } a_{n+2} = 1 + \left[\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right] \text{ với mọi } n \geq 0.$$

Chứng minh rằng $a_{n+2}.a_n - a_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi số tự nhiên n.

([x] kí hiệu phần nguyên của số thực x).

Bài 5. (*7,0 điểm*)

Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho $2^{n+2}.(2^n - 1) - 8.3^n + 1$ là một số chính phương.

Bài 6. (*7,0 điểm*)

Cho *n* là một số nguyên lớn hơn 1. Có *n* học sinh ngồi quanh một chiếc bàn tròn, mỗi em có một số chiếc kẹo (có thể có em không có chiếc kẹo nào) và tổng số kẹo của tất cả các em là một bội của *n*. Các em thực hiện việc chuyển kẹo cho nhau như sau:

Với số kẹo mỗi em có lúc đầu, nếu có ít nhất một em có nhiều kẹo hơn bạn ngồi ngay bên phải mình thì một em (tùy ý) trong số những em như thế chuyển 1 chiếc kẹo của mình cho bạn ngồi ngay bên phải. Với số kẹo mỗi em có sau lần chuyển thứ nhất, nếu có ít nhất một em có nhiều kẹo hơn bạn ngồi ngay bên phải mình thì một em (tùy ý) trong số những em như thế lại chuyển 1 chiếc kẹo của mình cho bạn ngồi ngay bên phải. Quá trình chuyển kẹo cứ như thế được tiếp tục.

Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần chuyển kẹo như vậy, tất cả các em đều có số kẹo như nhau.

-- **HẾT** --