

SỞ GD & ĐT NGHỆ AN

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI
HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2010 - 2011**

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC

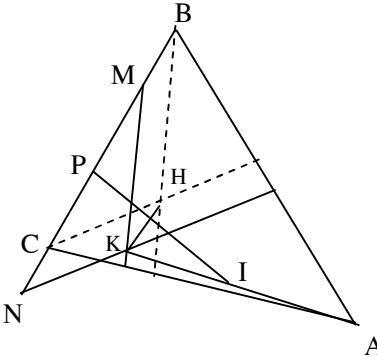
(Hướng dẫn và biểu điểm chấm gồm 04 trang)

Môn: TOÁN (Ngày 08/10/2010)**I. Hướng dẫn chung**

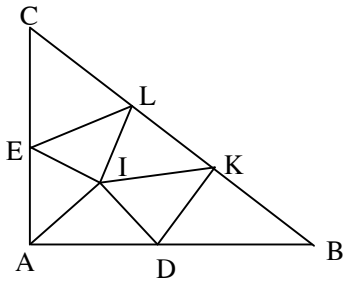
1. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
2. Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong Hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch với Hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.

II. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
Câu 1 (4,0 đ)	Đặt $k = c^2 + PQd^2$; $h = 2cd$. Ta có $k^2 - PQh^2 = (c^2 - PQd^2)^2 = 1$. Vậy $(k; h)$ là nghiệm của phương trình $x^2 - PQy^2 = 1$. Do đó $k \geq a$; $h \geq b$.	1.0
	Ta chứng minh chiều ngược lại. Từ $a^2 - PQb^2 = 1$ và $c^2 - PQd^2 = -1$ $\Rightarrow (a^2 - PQb^2)(c^2 - PQd^2) = -1$ hay $(ac - PQbd)^2 - PQ(ad - bc)^2 = -1$. Đặt $m = ac - PQbd $; $n = ad - bc $ ta có $m^2 - PQn^2 = -1$.	1.0
	Do m, n nguyên dương nên $m^2 \geq c^2$ hay $(ac - PQbd)^2 \geq c^2 \Leftrightarrow (ac)^2 + (PQbd)^2 - c^2 \geq 2PQabcd$ $\Leftrightarrow c^2(a^2 - 1) + (PQbd)^2 \geq 2PQabcd \Rightarrow PQb^2c^2 + (PQbd)^2 \geq 2PQabcd$ $\Rightarrow b(c^2 + PQd^2) \geq 2acd$.	1.0
	$\Rightarrow bk \geq ah \Rightarrow (bk)^2 \geq (ah)^2 \Rightarrow b^2(1 + PQh^2) \geq h^2(1 + PQb^2)$. Điều này chứng tỏ $b \geq h$, suy ra $b = h \Rightarrow a = k$.	1.0
Câu 2 (4,0 đ)	Thay $x=0$ vào (i) ta có $f(y^2 + 2f(0)) = f^2(y)$ (1). Thay y bởi $\frac{y}{x}$ vào (i) ta có $f\left(x^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2f(y)\right) = f^2\left(x + \frac{y}{x}\right)$ (2). Theo (1) ta có $f^2\left(x + \frac{y}{x}\right) = f\left(\left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + 2f(0)\right)$ (3). Từ (2) và (3) ta có $f\left(x^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2f(y)\right) = f\left(\left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + 2f(0)\right) \forall x \neq 0, y \in \mathbb{Q}$ (4).	1.0

	Với mỗi $y_0 \in \mathbb{Q}$, chọn $x \in \mathbb{Q}$ sao cho $\begin{cases} x^2 + \frac{y_0^2}{x^2} + 2f(y_0) > 2010 \\ \left(x + \frac{y_0}{x}\right)^2 + 2f(0) > 2010 \end{cases} \quad (**).$	2.0
	Áp dụng (ii) vào (4) ta có $x^2 + \left(\frac{y_0}{x}\right)^2 + 2f(y) = \left(x + \frac{y_0}{x}\right)^2 + 2f(0) \Leftrightarrow f(y_0) = y_0 + f(0) \quad (5).$ Thay (5) vào (1) ta có $f(0) = 0 \Rightarrow f(y_0) = y_0, \forall y_0 \in \mathbb{Q}$. Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$. Thay vào thử lại thấy thỏa mãn.	1.0
Câu 3 (4,0 đ)	Từ giả thiết ta có $\overline{MN} = \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{BM} = \overline{CN}$ trong đó P là trung điểm của BN, cũng là trung điểm của MC. 	0.5
	Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\overline{BM}$ biến B thành M, C thành N, BH thành d_1, CH thành d_2. Vì $BH \cap CH = H$ và $d_1 \cap d_2 = K$ nên $T_{\overline{BM}}$ biến H thành K $\Rightarrow \overline{HK} = \overline{BM} = \overline{CN}$	1.5
	Vì P, I tương ứng là trung điểm của MC và KA nên $2\overline{PI} = \overline{MA} + \overline{CK} = \overline{MC} + \overline{CA} + \overline{CK} = \overline{MK} + \overline{CA} = \overline{BH} + \overline{CA}$ $\Rightarrow 2\overline{PI} = \overline{OH} - \overline{OB} + \overline{OA} - \overline{OC} = (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) - \overline{OB} + \overline{OA} - \overline{OC}$ (Do $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$) $\Rightarrow \overline{PI} = \overline{OA}.$	1.0
	Vậy I là ảnh của P qua $T_{\overline{OA}}$ mà $P \in BC$ nên I nằm trên đường thẳng d cố định là ảnh của đường thẳng BC qua $T_{\overline{OA}}$.	1.0
Câu 4 (4,0 đ)	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $\frac{a^2}{b+2c} + \frac{(b+2c)a^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+2c} \cdot \frac{(b+2c)a^2}{9}} = \frac{2a^2}{3}.$ Tương tự $\frac{b^2}{c+2a} + \frac{(c+2a)b^2}{9} \geq \frac{2b^2}{3}, \frac{c^2}{a+2b} + \frac{(a+2b)c^2}{9} \geq \frac{2c^2}{3}.$	1.0

	Suy ra: $F = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}$ $\geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{9}[a^2(b+2c)+b^2(c+2a)+c^2(a+2b)] \quad (*)$ Lại áp dụng AM – GM, ta có $a^2c+b^2a+c^2b \leq \frac{a^3+a^3+c^3}{3} + \frac{b^3+b^3+a^3}{3} + \frac{c^3+c^3+b^3}{3} = a^3+b^3+c^3 \quad (**)$	1.0
	Từ (*) và (**) suy ra: $F \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{9}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ $\geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$	1.0
	Đặt $t = \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$, từ giả thiết ta có: $25(a^2+b^2+c^2) - 48 = 9(a^4+b^4+c^4) \geq 3(a^2+b^2+c^2)^2$ $\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)^2 - 25(a^2+b^2+c^2) + 48 \leq 0 \Rightarrow 3 \leq a^2+b^2+c^2 \leq \frac{16}{3}$ Do đó $F \geq \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{27}t^3 = f(t)$ với $t \in [3; 4]$ (***) Mà $\min_{t \in [3; 4]} f(t) = f(3) = 1$ (****). Từ (***) và (****) suy ra $F \geq 1$. Vậy $\min F = 1$ xảy ra khi $a=b=c=1$.	1.0
Câu 5 (4,0 đ)	Ta chia các đỉnh của n tam giác nhọn thành ba tập hợp. - Tập X gồm 3 đỉnh là 3 đỉnh của tam giác ABC. - Tập Y gồm b đỉnh hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC (khác A, B, C) hoặc nằm trên cạnh của các tam giác nhọn nhưng không phải là đầu mút của cạnh đó. - Tập Z gồm c đỉnh còn lại. Số các góc của n tam giác nhọn là $3n$ và tổng số đo của các góc là $n\pi$. Nhận xét: +) Các đỉnh thuộc X có A phải lặp lại ít nhất 2 lần, B và C ít nhất 1 lần. +) Các đỉnh thuộc Y phải lặp lại ít nhất 3 lần vì $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. +) Các đỉnh thuộc Z phải lặp lại ít nhất 5 lần vì $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Ta có $\begin{cases} 3n \geq 4+3b+5c \\ n\pi = \pi + b\pi + 2c\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n \geq 4+3b+5c \\ n = 1+b+2c \end{cases} \Rightarrow 3(1+b+2c) \geq 4+3b+5c \Rightarrow c \geq 1$ Gọi M là một điểm Z, suy ra có ít nhất 5 tam giác chung đỉnh M.. Do đó $n \geq 5$.	1,0

	Nếu $n = 5 \Rightarrow \begin{cases} 15 \geq 4 + 3b + 5c \\ 5 = 1 + b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0, c = 2 \\ b = 2, c = 1 \end{cases}$. +) $b = 0; c = 2$ suy ra chỉ có hai loại đỉnh là X, Z. Vì $\begin{cases} 15 = 5 + 5.2 \\ 5 = 1 + 2.2 \end{cases}$ nên loại đỉnh X lặp tối đa 5 lần, suy ra chỉ có tối đa 2 đỉnh thuộc tập X lặp lại ít nhất 2 lần. Do đó M chỉ được nối với 2 đỉnh của tam giác ABC và đỉnh còn lại của tập hợp Z, suy ra M chỉ có chung 3 góc (mâu thuẫn). +) $b = 2; c = 1$ suy ra có 3 loại đỉnh X, Y và duy nhất đỉnh M thuộc loại Z. Vì $\begin{cases} 15 = 4 + 3.2 + 5.1 \\ 5 = 1 + 2 + 2.1 \end{cases}$ nên loại đỉnh X lặp 4 lần, suy ra chỉ có đỉnh A lặp 2 lần. Do đó M chỉ được nối với đỉnh A, hai đỉnh thuộc tập hợp Y, suy ra M chỉ có chung 3 góc (mâu thuẫn). Từ đó $n > 5$.	1.0
	Nếu $n = 6 \Rightarrow \begin{cases} b = 1, c = 2 \\ b = 3, c = 1 \end{cases}$. +) $b = 1; c = 2$ suy ra có 3 loại đỉnh là X, Y, Z vì $\begin{cases} 18 = 5 + 3.1 + 5.2 \\ 6 = 1 + 3 + 2 \end{cases}$. Do đó loại đỉnh X lặp tối đa 5 lần, suy ra chỉ có tối đa 2 đỉnh thuộc X lặp ít nhất 2 lần. Suy ra M chỉ được nối với 2 đỉnh của tam giác ABC và 1 đỉnh thuộc tập Y, đỉnh còn lại thuộc tập Z, hay M chỉ có chung 4 góc (mâu thuẫn). +) $b = 3; c = 1$ suy ra có 3 loại đỉnh là X, Y và duy nhất đỉnh M thuộc tập hợp Z. Vì $\begin{cases} 18 = 4 + 3.3 + 5.1 \\ 6 = 1 + 3 + 2 \end{cases}$ nên loại đỉnh thuộc tập X lặp tối đa 4 lần. Do đó chỉ có tối đa đỉnh A được lặp lại. Suy ra M được nối với đỉnh A và 3 đỉnh thuộc tập Y, hay M chỉ có chung 4 góc (mâu thuẫn). Từ đó $n > 6$.	1.0
	Với $n = 7$ ta có thể chia như sau: Lấy D, E là trung điểm của AB, AC và K, L nằm trên cạnh BC sao cho $BK = BD$, $CE = CL$ và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có 7 tam giác nhọn BDK, CEL, AID, AIE, EIL, LIK, KID. Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 7.	1.0

--- Hết ---

Chú ý: Học sinh giải theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.