

Câu I. (5 điểm)

1. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$, $m \in \mathbb{R}$

a) Khảo sát vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

2. Tìm tất cả các giá trị của a, b để phương trình

$$\frac{x^2 - 2ax + b}{bx^2 - 2ax + 1} = m$$

có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

Câu II. (4 điểm)

1. Cho phương trình: $2\cos 2x + \sin^2 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^2 x = m(\sin x + \cos x)$, với m là tham số.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$$

Câu III. (3 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y + xy^2 = -6x \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$$

Câu IV. (5 điểm)

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Trên AB lấy điểm M , trên CC' lấy điểm N , trên $D'A'$ lấy điểm P sao cho $AM = CN = D'P = x$ với $(0 \leq x \leq a)$.

1. Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

Tính diện tích tam giác MNP theo a và x . Tìm x để diện tích ấy nhỏ nhất.

2. Khi $x = \frac{a}{2}$ hãy tính thể tích khối tứ diện $B'MNP$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Câu V. (3 điểm)

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^n}{1+x^{n+1}} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{x^n - 1}{n(x-1)}$$

trong đó x là số thực dương, $x \neq 1$; $n \in \mathbb{N}^*$

———— Hết ————