

TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN TRONG TUẦN PSW

diendantoanhoc.net

Ngày 30 tháng 4 năm 2013

Chú ý. Hầu hết các bài toán đã được giải quyết. Nhấp vào các ô số thứ tự để đến topic thảo luận của bài toán.

1 Cho hàm số bậc hai $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$. Gọi S là diện tích tam giác có các đỉnh là giao điểm của parabol $y = f(x)$ với trục Ox và đỉnh của parabol ấy. Tìm tất cả các số hữu tỷ p sao cho S là số nguyên.

2 Chứng minh rằng đồ thị hàm số sau có ba điểm uốn thẳng hàng $y = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$.

3 Trong một lớp học, mỗi học sinh có không quá ba người bạn thân. Chứng minh rằng có thể chia lớp ra làm hai tổ sao cho ở mỗi tổ mỗi bạn có không quá một bạn thân.

4 Cho tam giác ABC vuông cân có $AB = AC = 10$. Tam giác DEF vuông cân ở D nội tiếp tam giác ABC (D thuộc AB , F thuộc AC , E thuộc BC). Xác định vị trí của điểm D để diện tích tam giác DEF nhỏ nhất.

5 Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^3 + y^3 + z^3 = 4^n \cdot n^3$$

6 Tìm các nguyên hàm sau

$$I = \int \frac{x^5}{x^6 - x^3 - 2} dx; J = \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6} dx; Q = \int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)}$$

7 Tìm điều kiện của tham số m để phương trình sau có đúng một nghiệm

$$x - 2m\sqrt{x-1} + m - 4 = 0$$

8 Cho trước số nguyên dương n , chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}^2}{(2k+1) \binom{2n}{2k}} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)! (2n+1)!}$$

9 Bên trong hình vuông cạnh 100, ta đặt một đường gấp khúc L có tính chất là mỗi điểm của hình

vuông đều cách L một khoảng không lớn hơn 0,5. Chứng minh rằng khi đó trên L có hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1 nhưng khoảng cách dọc theo L giữa chúng không nhỏ hơn 198.

10 Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD biết $AB = CD = 2a$ và góc giữa đường thẳng AB và CD là 60° . Tính diện tích thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng qua MN và song song với AB .

11 Tìm tất cả các song ánh $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

12 Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - p} + 2x^2 - 1 = x$$

Với p là hằng số thực.

13 Trong cuộc tranh giải cờ tướng, mỗi đấu thủ giành được $\frac{1}{2}$ số điểm của mình trong các trận đấu với các đối thủ xếp ở cuối bảng. Hỏi có mấy đấu thủ tham gia tranh giải? Biết rằng trong một trận đấu tổng số điểm của hai đấu thủ bằng 1, thắng 1 điểm, thua 0 điểm, hòa $\frac{1}{2}$ điểm.

14 Cho bốn số dương a, b, c, d . Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd} \leq \sqrt[3]{(a+b+c)(b+c+d)}$$

15 Cho hình thang cân $ABCD$ ($AD \parallel BC$) ngoại tiếp ($O; 1\text{cm}$) và nội tiếp (I). Gọi M là trung điểm cạnh AB , biết $MI = 4\text{cm}$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

16 Tam thức bậc hai $f(x)$ luôn dương với mọi x . Chứng minh rằng $f(x)$ có thể viết dưới dạng tổng bình phương của hai nhị thức bậc nhất.

17 Cho một đa giác lồi, không có hai cạnh nào song song với nhau. Với mỗi cạnh của đa giác, ta xét góc mà đỉnh xa nhất với cạnh đó nhìn trên cạnh đó. Chứng minh rằng tổng các góc đó là 180° .

18 Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^{10} + y^{10} = z^{10} + 199$$

19 Giải phương trình

$$\sin^{2006} x + \cos^{2005} x = 1$$

20 Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^n = n!, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

21 Qua một điểm M ngoài tam giác ABC , chỉ bằng thước thẳng và compa dựng một đường thẳng chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

22 Trong mặt phẳng toạ độ vuông góc Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $(d): x-2y+6=0$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh BC, CD sao cho $BM = CN$. Biết AM giao BN tại điểm $I\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right)$. Xác định toạ độ đỉnh C .

23 Cho các số $a_1, a_2, \dots, a_q, x_1, x_2, \dots, x_q$ và m là các số nguyên thỏa mãn $m \mid a_1 x_1^k + \dots + a_q x_q^k, \quad \forall k \geq 0$. Chứng minh rằng

$$m \mid a_1 (x_1 - x_2) (x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_q)$$

24 Giải biện luận phương trình

$$|x+1| + m|x-1| = (m+1)(3x+7 \mid mx+5)$$

25 Giải phương trình

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1$$

26 Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c = -abc$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}$$

27 Tìm a, b, c, d nguyên dương thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $bd > ad + bc$

ii) $(9ac + bd)(ad + bc) = a^2 d^2 + 10abcd + b^2 + c^2$

28 Ta biết rằng nếu $OABC$ là tứ diện vuông tại O thì ABC là tam giác nhọn. Hỏi các với mỗi tam giác nhọn ABC liệu có tồn tại tứ diện vuông $OABC$ tại O ?

29 Xác định các hàm số liên tục $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

i) $f(2x) = 2f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ii) $f(f^2 x) = xf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

iii) $f(x) \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$

30 Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn, có chu vi là 20cm, một đường tròn nội tiếp. Một tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp song song với cạnh BC cắt hai cạnh còn lại tại MN và $MN = 2,4$ cm. Tính BC .

31 Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $u_1 \neq 0$ và $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, $\forall n \geq 1$. Chứng minh rằng $|u_{100}| > 14$.

32 Cho p là một số nguyên tố lẻ. Xét p giác đều có cạnh đơn vị. Từ các cạnh của đa giác này, dựng ở miền ngoài đa giác các hình chữ nhật kích thước $1 \times k$ (k là số nguyên dương), mỗi hình chữ nhật được chia thành k ô đơn vị. Gọi P là hình sao được tạo thành, gồm kp ô đơn vị và p giác đều (như vậy có $kp + 1$ miền). Mỗi miền được tô bởi một trong ba màu, các miền kề nhau có màu khác nhau. Hơn nữa đòi hỏi phép tô màu đó không có trục đối xứng. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như vậy?

33 Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c^2} + \frac{b}{c+a^2} + \frac{c}{a+b^2} \geq \frac{9}{3+a+b+c}$$

34 Cho hình vuông $ABCD$, trên các cạnh BC, CD tương ứng lấy các điểm E, F . Gọi P, Q là hình chiếu vuông góc của C trên AE, AF tương ứng, biết $\frac{CP}{AE} + \frac{CQ}{AF} = 1$. Chứng minh $\widehat{AEF} = 45^\circ$.

35 Tìm $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- i) Nếu a chia hết b thì $f(a) \geq f(b)$
- ii) $f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b)$

36 Giải phương trình

$$31x^5 + 165x^4 + 310x^3 + 330x^2 + 155x + 33 = 0$$

37 Cho hàm số $(C) : y = f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Xác định $M(x; y) \in C$, $\forall x > 1$ sao cho chu vi của tam giác hợp bởi tiếp tuyến tại M và hai tiệm cận nhỏ nhất.

38 Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh xuất phát từ A đôi một vuông góc với nhau. Gọi a là cạnh lớn nhất xuất phát từ A và r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện. Chứng minh rằng

$$a \geq (3 + \sqrt{3})r$$

39 Tìm số nguyên n với $100 \leq n \leq 1997$ thỏa $n \mid 2^n + 2$.

40 Tìm tất cả các nghiệm dương của phương trình

$$x^2 - x - 1 = 2^x - \log_2(x^2 + 2^x)$$

41 Một miền phẳng bị chặn có diện tích S đã được phủ bởi họ hữu hạn F các hình tròn. Chứng minh rằng F chứa họ con các hình tròn rời nhau mà tổng diện tích không nhỏ hơn $\frac{S}{9}$.

42 Giải phương trình

$$\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x + 1}$$

43 Xác định c để phương trình sau có các nghiệm đều là số thực

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{2000} = c$$

44 Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA . Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

45 Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{bc}{a^2b + a^2c} + \frac{ac}{b^2a + b^2c} + \frac{ab}{c^2a + c^2b}$$

46 Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua I kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại F . Trên BC lấy P sao cho $3BP = BC$. Chứng minh rằng $\widehat{BFP} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.

47 Tìm tam giác đều nhỏ nhất sao cho có thể đặt ba đĩa bán kính 2, 3, 4 vào đó mà không chồng lên nhau.

48 Cho t là số dương tùy ý, số các phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($0 < a, b \leq t$) được kí hiệu là $d(t)$. Tính

$$S = \sum_{i=1}^{1996} d\left(\frac{1996}{i}\right)$$

49 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $S = \sqrt{a - b \cos x} + \sqrt{a - b \cos(\alpha - x)}$ trên $(0; \alpha)$ với a, b, α là các hằng số và $a \geq b > 0, 0 < \alpha \leq \pi$.

50 Cho $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp đường tròn tâm O có độ dài các cạnh là a, b, c, d . Chứng minh rằng

$$OA \cdot OC + OB \cdot OD = \sqrt{abcd}$$

51 Giải phương trình

$$\sqrt{\sqrt{2} - 1 - x} + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

52 Cho tứ diện $ABCD$ và M là một điểm nằm trong tứ diện. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là hình chiếu vuông góc của M lên các mặt của tứ diện. Gọi D_a là đường thẳng qua A vuông góc với $(B_1C_1D_1)$, các đường thẳng D_b, D_c, D_d xác định tương tự. Chứng minh rằng D_a, D_b, D_c, D_d đồng quy.

53 Cho dãy số nguyên dương $\{a_n\}_{n \geq 1}^{+\infty}$ thỏa mãn $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{mn} = a_m \cdot a_n, a_{m+n} \leq C(a_m + a_n), \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ (trong đó $C \geq 1$ là hằng số cho trước). Chứng minh rằng $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

54 Ứng với mỗi $k > 1$, gọi

$$M(k) = \max \left\{ \frac{n}{s(n)} \mid 10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1 \right\}$$

$$m(k) = \min \left\{ \frac{n}{s(n)} \mid 10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1 \right\}$$

Hỏi có thể biểu diễn $M(k), m(k)$ theo k hay không?

55 Cho x, y, z là các hằng số và A, B, C là ba góc tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x \sin^2 A + y \sin^2 B + z \sin^2 C$$

56 Cho đa thức $P(x)$ và $Q(x) = aP(x) + bP'(x) + cP''(x)$ với a, b, c là các số thực và $a \neq 0, b^2 - 4ac > 0$. Chứng minh rằng nếu $Q(x)$ vô nghiệm thì $P(x)$ vô nghiệm.

57 Cho C là một điểm nằm trên đường kính AB của nửa đường tròn tâm O khác A, B, O . Hai tia vuông góc với nhau qua C cắt nửa đường tròn tại D, E . Đường thẳng qua D vuông góc với DC cắt lại đường tròn tại K . Chứng minh rằng nếu K không trùng E thì KE song song AB .

58 Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + 3zx + z^2 = 1 \\ 3y^2 + 3yz + z^2 = 4 \\ x^2 - xy + y^2 = m \end{cases}$$

59 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp, M là một điểm bất kì. X, Y, Z, T, U, V lần lượt là hình chiếu của M lên các đường thẳng AB, CD, AC, BD, AD, BC . Gọi E, F, G thứ tự là trung điểm của XY, ZT, UV . Chứng minh rằng E, F, G thẳng hàng.

60 Chứng minh tồn tại dãy số $\{a_n\}$ ($n = \overline{1; \dots}$ là dãy tăng các số nguyên dương sao cho dãy $\{b_n\}$ với $b_n = k + a_n, \forall n$ chứa hữu hạn các số nguyên tố (với mọi số tự nhiên k).

61 Tính tích phân

$$I = \int_1^e \frac{\ln x (\ln x + 1)}{(1 + x + \ln x)^3} dx$$

62 Cho a, b, c là các số nguyên (b lẻ) xác định dãy $f(n)$, $n = \overline{0; \dots}$ như sau

$$\begin{cases} f(0) = 4, f(1) = 0, f(2) = 2c, f(3) = 3b \\ f(n+3) = af(n-1) + bf(n) + cf(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m và mọi số nguyên tố p ta có $f(p^m)$ chia hết cho p .

63 Cho tam giác ABC nhọn, M di động trên đoạn BC . Đường tròn đường kính AM cắt AB , AC ở P, Q . Tiếp tuyến của nó tại P, Q cắt nhau ở T . Tìm quỹ tích T khi M di động.

64 Giải phương trình

$$\sin x \sin 2x \sin 3x + \cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}$$

65 Kéo dài các trung tuyến của tam giác ABC cho đến khi chúng cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác, gọi độ dài của các đoạn này là M_a, M_b, M_c . Chứng minh rằng $M_a + M_b + M_c \geq \frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c)$ và $M_a + M_b + M_c \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}(a + b + c)$. Khi nào thì có dấu đẳng thức?

66 Cho $P(x) = x^2 + ax + b$. Biết rằng với mọi x thỏa mãn $|x| \leq 1$ thì ta có $|P(x)| \leq \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $a^3 + b^3$.

67 Cho tam giác ABC có trục tâm H . Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$, H thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - y - 4 = 0$, trung điểm của AB là $M(2; 3)$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác.

68 Cho tam giác ABC . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$F = \sin A^n \sin B^{n+1} \sin C^{2n+1}$$

69 Chứng minh rằng tổng các bình phương khoảng cách từ các đỉnh của tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ đến đường thẳng d bất kỳ qua O không đổi.

70 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x) \geq 0$ trên toàn bộ $\mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$ cố định. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) - (a - x)f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

71 Cho $n \geq 3$ và $a_k > 0$, ($k = \overline{1; n}$). Đặt $S = \sum_{i=1}^n a_i$ và $P = \prod_{i=1}^n a_i$. Bất đẳng thức sau có đúng không?

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{S - a_i} < \sqrt[n]{\frac{S}{P}}$$

72 Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, kí hiệu $a(n)$ là số chữ số 1 của n (trong hệ thập phân). Hỏi có tồn tại hay không số n thỏa $a(n^2 + 1) = 7a(n)$ không?

73 Trong không gian cho tam giác ABC , dựng đường thẳng d bất kỳ qua A . Từ B và C kẻ các đường vuông góc với d lần lượt tại B' và C' . Biết độ dài ba cạnh tam giác là a, b, c . Hãy tính giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $BCB'C'$.

74 Cho n là một số nguyên dương và b là số nguyên lớn nhất mà bé hơn $(\sqrt[3]{28} - 3)^{-n}$. Chứng minh rằng b không chia hết cho 6.

75 Cho hai phương trình $x^2 + px + q = 0$ và $x^2 + mx + n = 0$ (p, q, m, n nguyên) có một nghiệm chung không phải là số nguyên. Chứng minh rằng $p = m, q = n$.

76 Trong không gian cho hai đường thẳng x, y chéo nhau. Giả sử A, B là hai điểm cố định trên x và CD là đoạn thẳng có chiều dài l cho trước có thể di chuyển trên y . Tìm vị trí của CD sao cho diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ nhỏ nhất.

77 Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i) $f(f(n)) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ii) $n \mid f(1) + f(2) + \dots + f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

78 Cho trước số thực dương a , đường thẳng d và hai điểm A, B nằm cùng phía đối với d . Dựng điểm M thuộc d sao cho $AM + BM = a$.

79 Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq \sqrt{3} - 2$$

80 Một tờ giấy có dạng hình vuông $ABCD$. Gấp tờ giấy sao cho C nằm trên cạnh AB . Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{MR}{RQ}$.

81 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x+y)^2} = \frac{85}{3} \\ 2x + \frac{1}{x+y} = \frac{13}{3} \end{cases}$$

82 Giải phương trình

$$4 \cos 15x \cos 5x \cos 3x \cos x + \cos 15x \cos 5x + \cos 3x \cos x = 0$$

83 Gọi L là tập các điểm nguyên trên mặt phẳng. Chứng minh rằng với mọi cặp ba điểm A, B, C thuộc L thì tồn tại điểm thứ tư D sao cho phần trong của các đoạn thẳng (phần đoạn thẳng trừ đi hai đầu mút) AD, BD, CD không chứa một điểm nào thuộc L .

84 Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến PE, PF tới đường tròn (E, F là hai tiếp điểm). Một cát tuyến thay đổi đi qua P , cắt đường tròn tại hai điểm A, B (A nằm giữa

P và B) và cắt EF tại Q .

a) Khi cát tuyến đi qua O chứng minh rằng $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$.

b) Đẳng thức trên có còn đúng không, khi cát tuyến trên không đi qua điểm O ? Hãy chứng minh điều đó.

85 Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^{10}}{x^{10} + 1} dx$$

86 Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại n số nguyên dương: $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{a_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

87 Cho n là một số nguyên dương. Giải phương trình

$$(x-1)^2 [1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n] = 1$$

88 Cho tứ diện $S \cdot ABC$ có $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$. Xác định giá trị góc α để góc nhị diện cạnh SC bằng 60° .

89 Cho k là số nguyên dương và $S_n = \{1; 2; \dots; n\}$ ($n \geq 3$). Hàm $f : S_n^k \rightarrow S_k$ thỏa mãn nếu $a, b \in S_n^k$ và chúng khác nhau ở tất cả các vị trí thì $f(a) \neq f(b)$. Chứng minh rằng có $i \in \{1; 2; \dots; k\}$ sao cho

$$f(a_1, a_2, \dots, a_k) = a_i, \quad \forall a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in S_n^k$$

90 Cho tứ giác $ABCD$, điểm M di động trên đoạn AB . Hai đường tròn (MAC) , (MBD) giao nhau tại M, N . Tìm quỹ tích điểm N .

91 Trong một hình vuông có cạnh bằng 1, đặt một hình F mà khoảng cách giữa hai điểm bất kì của nó không bằng 0,0001. Chứng minh rằng diện tích của hình đó không lớn hơn:

a) 0,34

b) 0,287

92 Cho a, b, c là ba cạnh tam giác và x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(x+y+z) \left(\frac{xc^2}{a^2} + \frac{ya^2}{b^2} + \frac{zb^2}{c^2} \right) \geq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) (a^2yz + b^2zx + c^2xy)$$

93 Các đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B , CD là đường thẳng qua O_1 cắt (O_1) tại D và tiếp xúc với (O_2) tại C , AC tiếp xúc với (O_1) tại A . Kẻ AE vuông góc CD và AE cắt (O_1) tại E . Kẻ AF vuông góc DE và AF cắt DE tại F . Chứng minh rằng BD chia đôi AF .

94 Bạn Bình và Nam chơi một trò chơi khá thú vị với một đa thức bậc ít nhất là 4 được cho

sau đây $x^{2n} + \dots x^{2n-1} + \dots x^{2n-2} + \dots + \dots x + 1$. Họ lần lượt điền vào các hệ số còn trống trong đa thức trên bằng các số thực tùy ý. Nếu quá trình điền số hoàn tất mà đa thức nhận được vô nghiệm thì bạn Bình là người thắng cuộc, còn ngược lại thì bạn Nam thắng. Nếu bạn Bình điền số trước thì ai sẽ đảm bảo có chiến thuật thắng cuộc chơi?

95 Cho chóp $S \cdot ABC$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A . Lấy M, N lần lượt thuộc SA, BC sao cho $AM = CN = x$ ($0 < x < 2a$). Tìm x để độ dài MN nhỏ nhất.

96 Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_1 = u_2 = 1$ và $\begin{cases} u_{2k+1} = 3u_{2k} + 6u_{2k-1}, \\ u_{2k+2} = 3u_{2k+1} - 6u_{2k} \end{cases}, \forall k \geq 1$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

97

- 1) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $n!$ tận cùng bằng 1987 chữ số 0.
- 2) Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$(y+1)^x = y! + 1$$

98 Xét tập $A = \{1; 2; \dots; n\}$. Với bất kì tập con khác rỗng M của A , $M = \{m_1; m_2; \dots; m_k\}$ và $m_1 > m_2 > \dots > m_k$. Đặt $S(M) = m_1 - m_2 + m_3 - \dots + (-1)^{k+1} m_k$. Tính $S = \sum_{M \subset A} S(M)$.

99 Cho tập hợp hữu hạn các đoạn thẳng trong mặt phẳng có tổng độ dài là 1. Chứng minh rằng tồn tại đường thẳng l sao cho hình chiếu của tất cả các đoạn đó trên l có tổng độ dài nhỏ hơn $\frac{2}{\pi}$.

100 Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3 + 2} + \frac{b}{b^3 + 2} + \frac{c}{c^3 + 2} \leq 1$$

Tài liệu

- [1] www.diendantoanhoc.net/
- [2] www.forum.mathscoper.org/
- [3] www.artofproblemsolving.com/
- [4] www.boxmath.vn/
- [5] Tạp chí Toán học tuổi trẻ