

## ĐÁP ÁN ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN VÒNG 2

Môn thi : Đại số

Đáp án gồm có: 3 trang

**Câu 1:** Ta có  $A.A^T = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2).E$  nên ta được  $(\det A)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^4$ . Mặt khác, trong khai triển của  $\det A$  thì  $x_1^4$  mang dấu dương nên ta suy ra  $\det A = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2$  hay

$$\det A = ((x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4))^2.$$

Do  $x_1, x_2, x_3, x_4$  là các nghiệm của phương trình

$$x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

nên ta được  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$  và  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -3$ .  
 Vậy,  $\det A = (4^2 - 2 \cdot (-3))^2 = 484$ .

**Câu 2:** a) Ta có

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(A - A')'(A - A')] &= \text{Tr}(A'A - A'A' - AA + AA') \\ &= \text{Tr}(A'A) - \text{Tr}(AA)' - \text{Tr} A^2 + \text{Tr}(AA') = \text{Tr}(AA') - \text{Tr}(AA)' \\ &= \text{Tr} A^2 - \text{Tr} A^2 = 0. \end{aligned}$$

b) Theo đề bài ta có  $AD + B = C$  suy ra  $ADC^{-1} + BC^{-1} = I$  và  $C^{-1}AD + C^{-1}B = I$  trong đó  $I$  là ma trận đơn vị cùng cấp. Từ đó ta có  $ADC^{-1} + C^{-1}AD = 2I$ . Suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 3:** Chéo hóa ma trận  $A$  ta tìm được ma trận khả nghịch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ và } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

sao cho  $A = PDP^{-1}$ . Đặt  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  và  $B = PCP^{-1}$ . Ta có

$$B^2 = PC^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Chú ý rằng  $B$  và  $C$  đồng dạng nên  $B$  và  $C$  có cùng giá trị riêng. Do đó ma trận  $B$  có các giá trị riêng không âm thỏa mãn  $B^2 = A$ .

**Câu 4:** Ta có  $2 = \text{rank}(ABC) = \text{rank}(ABC)^2 \leq \text{rank}(CAB)$ . Mà  $CAB$  là ma trận cấp 2 nên  $\text{rank}(CAB) = 2$  hay  $CAB$  là ma trận khả nghịch. Mặt khác,  $(CAB)^2 = CABCAB = C(ABC)AB = C(ABC)^2AB = CABCABCAB = (CAB)^3$

Suy ra  $CAB = I_2$ . Nếu  $BCA$  khả nghịch ta có  $(BCA)^2 = BCABCA = BCA$  do đó  $BCA = I_4$ . Từ đó suy ra  $\det[(BCA)^{2010} - I_4] = 0$ .

**Câu 5:** Do  $A$  chéo hóa được nên tồn tại ma trận  $P$  khả nghịch sao cho  $A = PDP^{-1}$ , trong đó  $D$  là ma trận đường chéo.

Ta có  $A^{2010}B = 0 \Leftrightarrow D^{2010}(P^{-1}B) = 0$ . Giả sử

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ và } P^{-1}B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta có

$$D^{2010}(P^{-1}B) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2010}a_{11} & \lambda_1^{2010}a_{12} & \lambda_1^{2010}a_{13} & \dots & \lambda_1^{2010}a_{1n} \\ \lambda_2^{2010}a_{21} & \lambda_2^{2010}a_{22} & \lambda_2^{2010}a_{23} & \dots & \lambda_2^{2010}a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{2010}a_{n1} & \lambda_n^{2010}a_{n2} & \lambda_n^{2010}a_{n3} & \dots & \lambda_n^{2010}a_{nn} \end{pmatrix}$$

Do đó

$$D^{2010}(P^{-1}B) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i^{2010}a_{ij} = 0 \Leftrightarrow \lambda_i a_{ij} = 0 \Leftrightarrow D(P^{-1}B) = 0 \Leftrightarrow AB = 0.$$

**Câu 6:** Gọi các nghiệm của  $P(x)$  là  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , trong đó  $a_i < a_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Xét hàm số  $f(x) = e^x.P(x)$ . Khi đó,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$  nên ta suy ra phương trình  $f(x) = 0$  có  $n$  nghiệm phân biệt là  $a_i$ .

Mặt khác,  $f'(x) = e^x.P(x) + e^x.P'(x) = e^x(P(x) + P'(x))$ , nên ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) + P'(x) = 0$ .

Do  $f(a_i) = f(a_{i+1}) = 0$  nên tồn tại  $b_i \in (a_i, a_{i+1})$  sao cho  $f'(b_i) = 0$  hay  $P(b_i) + P'(b_i) = 0$ . Mà có  $n-1$  khoảng  $(a_i, a_{i+1})$  nên suy ra  $P(x) + P'(x)$  có  $n-1$  nghiệm phân biệt  $b_i$ , khi đó ta có thể viết lại như sau

$$P(x) + P'(x) = Q(x) \prod_{i=1}^{n-1} (x - b_i).$$

Mà  $P(x) + P'(x)$  là một đa thức bậc  $n$  nên suy ra  $Q(x)$  là đa thức bậc 1. Do vậy,  $Q(x)$  có 1 nghiệm là  $c$ .

Giả sử  $\exists i$  sao cho  $c = b_i$ . Khi đó,  $f'(x)$  có nghiệm kép là  $b_i$  và sẽ không đổi dấu khi qua  $b_i$ . Khi đó,  $f(x)$  đơn điệu trên các khoảng  $(-\infty, b_2)$  hoặc  $(b_{i-1}, b_{i+1})$  hoặc  $(b_{n-1}, +\infty)$  nên có nhiều nhất 1 nghiệm trên các khoảng này. Điều này

vô lý do  $f(x) = 0$  có 2 nghiệm là  $\{a_1, a_2\}$  hoặc  $\{a_i, a_{i+1}\}$  hoặc  $\{a_{n-1}, a_n\}$  trong các khoảng này. Vậy,  $c \neq b_i, \forall i = \overline{1, n-1}$ .

Từ đó suy ra  $f(x)$  hay  $P(x) + P'(x)$  có  $n$  nghiệm phân biệt.

————— Hết —————