



ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN OLYMPIC

MÔN ĐẠI SỐ - NĂM 2009

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (10 điểm) Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Tính ma trận A^{2009} .

Câu 2. (15 điểm) Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp sao cho $E + AB$ là ma trận khả nghịch, chứng minh rằng $E + BA$ cũng là ma trận khả nghịch.

Câu 3. (10 điểm) Cho A là ma trận không suy biến, ma trận nghịch đảo A^{-1} sẽ thay đổi như thế nào nếu ta thực hiện các phép biến đổi sau đây trên A (yêu cầu giải thích rõ lý do):

- a) Đổi chỗ dòng thứ i và j của ma trận A ;
- b) Nhân dòng i của A với số thực $\alpha \neq 0$;
- c) Cộng vào dòng thứ i tích của dòng thứ j với số thực α .

Câu 4. Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- a) (15 điểm) Tính định thức của ma trận A ;
- b) (10 điểm) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A .

Câu 5. (15 điểm) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực đôi một khác nhau và $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực bất kỳ, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_1^{n-1} x_n = b_1 \\ x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_2^{n-1} x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ x_1 + a_n x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = b_n \end{cases}$$

Câu 6.

- a) (10 điểm) Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông sao cho:

$$AT = TA, \quad \forall T \text{ không suy biến cùng cấp}$$

thì ta cũng có: $AB = BA, \quad \forall B$ vuông cùng cấp;

- b) (15 điểm) Hai ma trận A và B được gọi là đồng dạng nếu tồn tại ma trận P không suy biến sao cho $B = P^{-1}AP$. Tìm tất cả các ma trận chỉ đồng dạng với chính nó.

Chú ý: Sinh viên không được dùng tài liệu