

ĐỀ THI SINH VIÊN GIỎI TOÁN NĂM 2009 – VÒNG SƠ KHẢO

(Thời gian: 150p)

Câu 1. Tìm cực trị của hàm số:

$$y = \cos x + \ln(\cos x)$$

Câu 2. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2x} - x}{2\ln x - x + 1}$$

Câu 3. Cho hệ vectơ $a_1 = (2, 3, 5)$; $a_2 = (3, 7, 8)$; $a_3 = (1, -6, 1)$; $a_4 = (7, -2, m)$. Tìm m để vectơ a_4 biểu diễn tuyến tính qua các vectơ a_1, a_2, a_3 .

Câu 4. Cho $A^k = 0$, với $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ và E là ma trận đơn vị cùng cấp với A . Chứng minh rằng:

$$(E - A)^{-1} = E + A^2 + \dots + A^{k-1}$$

Câu 5. Tính định thức:

$$\begin{vmatrix} a & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

-----&&-----

ĐỀ THI SINH VIÊN GIỎI TOÁN NĂM 2010 – VÒNG SƠ KHẢO

Câu 1. Tìm giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2010^x + x)^{1/x}$$

Câu 2. Cho hàm số

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2010)$$

Tính $f'(2010)$.

Câu 3. Cho 4 vector

$$X_1 = (2, 1, -3, 2); X_2 = (-2, 0, 1, 1); X_3 = (1, 2, -1, 0); X_4 = (-1, 3, -2, 4)$$

a) Tìm hạng và một cơ sở của hệ vector.

b) Hãy biểu diễn tuyến tính các vector còn lại qua cơ sở đã chỉ ở câu a).

Câu 4. Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ -5x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = -8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

Câu 5. Tìm cực trị của hàm số

$$y = \sin^5 x + \cos^5 x \text{ trên đoạn } \left[0, \frac{2\pi}{3}\right].$$

HƯỚNG DẪN GIẢI - NĂM 2009

Câu 1.

TXĐ: $\{x : \cos x > 0\}$ (1)

$$y' = -\sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x(1 + \cos x)}{\cos x}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = k\pi \Rightarrow x = n2\pi$$

$$y'' = -\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}; y''(n2\pi) = -2 < 0$$

Suy ra y đạt cực đại tại $x = n2\pi$ và $y_{\max} = y(n2\pi) = 1$.

Câu 2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2x} - x}{2\ln x - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x \ln x} - x}{2\ln x - x + 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2e^{2x \ln x}(\ln x + 1) - 1}{\frac{2}{x} - 1} = 1.$$

Câu 3.

Để a_4 biểu diễn tuyến tính qua a_1, a_2, a_3 thì phương trình sau phải có nghiệm

$$a_4 = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$$

$$\text{Hay hệ: } \begin{cases} 2k_1 + 3k_2 + k_3 = 7 \\ 3k_1 + 7k_2 - 6k_3 = -2 \\ 5k_1 + 8k_2 + k_3 = m \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Do $r(A) = 2$ nên $r(\bar{A}) = 2$ suy ra $m = 15$.

Câu 4.

Ta có: $(E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = E - A^k = E$ (gt)

Suy ra: $(E - A)^{-1}(E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = (E - A)^{-1}E$

Suy ra: $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$ (đpcm).

Câu 5.

Nhân cột 1 với $-b$ và cộng vào cột 2 ta có:

$$D_n = \begin{vmatrix} a & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (\text{cột 2} - \text{cột 1} \times b)$$

$$= a \begin{vmatrix} a & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = a \cdot D_{n-1}$$

Suy ra $D_n = aD_{n-1} = a^2D_{n-2} = \dots = a^{n-2}D_2 = a^n$.

-----&&-----

HƯỚNG DẪN GIẢI - NĂM 2010

Câu 1. Ta có:

$$\begin{aligned}\ln I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2010^x + x)}{x} \stackrel{\text{Lop}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2010^x \ln 2010 + 1}{2010^x + x} \stackrel{\text{Lop}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2010^x \ln^2 2010}{2010^x \ln 2010 + 1} \\ &\stackrel{\text{Lop}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2010^x \ln^3 2010}{2010^x \ln^2 2010} = \ln 2010\end{aligned}$$

Vậy $I = 2010$.

Câu 2. Đặt $g(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2009)$ suy ra $f(x) = g(x)(x-2010)$.

Suy ra $f'(x) = g(x) + g'(x)(x-2010)$ suy ra $f'(2010) = g(2010) = 2010!$

Câu 3.

a) Biến đổi ma trận có các cột là các vector đã cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Do $D_{1,2,3}^{1,2,3} = -7 \neq 0$ và định thức cấp 4 bằng 0 nên $r(A) = 3$ hay $r\{X_1, X_2, X_3, X_4\} = 3$

Dễ thấy $\{X_1, X_2, X_3\}$ là một cơ sở của hệ vector $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

b) Giả sử $X_4 = aX_1 + bX_2 + cX_3$ suy ra $a = 1, b = 2, c = 1$

Vậy: $X_4 = X_1 + 2X_2 + X_3$

Câu 4. Biến đổi ma trận hệ số mở rộng

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & -5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & 7 & -2 & -1 & -8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

về dạng tam giác (nên đổi cột 1 cho cột 4, ẩn cũng đổi tương ứng), thay ẩn, ta được nghiệm duy nhất của hệ: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 0, 1, 1)$.

Câu 5.

Ta có: $y' = 5\sin^4 x \cdot \cos x - 5\cos^4 x \cdot \sin x = 5\sin x \cdot \cos x (\sin^3 x - \cos^3 x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi/2 \\ x = \pi/4 \end{cases} \quad (Do x \in [0, \frac{2\pi}{3}])$$

Lập bảng biến thiên (hoặc tính đạo hàm cấp 2 tại các điểm tới hạn) ta có:

Hàm số có 2 điểm cực đại $(0, 1)$ và $(\frac{\pi}{2}, 1)$; có 1 điểm cực tiểu $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$.

-----&&-----