

Chuyên mục: [Đề thi toán cao cấp](#)

Đề thi chọn đội tuyển Olympic sinh viên ĐH Ngoại thương 2013

Phạm Tuấn Cường

Chủ nhật, 13 Tháng 1 2013 00:00



Câu 1. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Đặt $U_n = E + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} A^k$ với E là ma trận đơn vị cấp 3. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

Câu 2. Dãy số Fibonacci được định nghĩa bởi $F_0 = 1; F_1 = 1; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ nếu $n \geq 1$

a) Chứng minh rằng: $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n$ nếu $n \geq 1$

b) Tính giá trị của $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{F_n^2} \right)$

Câu 3. Với $a_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là các số thực cho trước đôi một phân biệt. Xét hệ phương trình sau:

Soạn công thức: 100%

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{a_1 - b_1} + \frac{x_2}{a_1 - b_2} + \dots + \frac{x_n}{a_1 - b_n} = 1 \\ \frac{x_1}{a_2 - b_1} + \frac{x_2}{a_2 - b_2} + \dots + \frac{x_n}{a_2 - b_n} = 1 \\ \vdots \\ \frac{x_1}{a_n - b_1} + \frac{x_2}{a_n - b_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n - b_n} = 1 \end{array} \right.$$

b) Tính tổng các nghiệm của hệ

Câu 4. Cho $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là một ma trận thực hoặc phức với các giá trị riêng phân biệt λ_1, λ_2 và các vector riêng tương ứng X_1, X_2 . Cho $P = [X_1 \mid X_2]$. CMR hệ $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$ có nghiệm là $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \alpha \lambda_1^n X_1 + \beta \lambda_2^n X_2$ trong đó α, β được xác định bởi phương trình $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

Câu 5. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tìm tất cả các ma trận X thỏa mãn $AX = XA$

$$1 + x + P(x) = m[P(x + 1) + P(x - 1)]$$

Các bạn thảo luận tại đây