Chuyên mục: Đề thi toán cao cấp

Đề thi chọn đội tuyển Olympic toán sinh viên 2012 ĐHSP TP Hồ Chí Minh (lần 1)

Ban Biên Tập

Thứ tư, 07 Tháng 3 2012 11:07

Ngày thi: 04/03/2012

Bài 1. Cho $X, B_0 \in M_n(R)$..Ta định nghĩa dãy ma trận bằng quy nạp: $B_k = B_{k-1}X - XB_{k-1}, k \in N^*$. Chứng minh rằng nếu $X = B_{n^2}$ thì $X = 0$.

Bài 2. Cho $a \in (-1, 1)$ và ma trận $A \in M_n$® thỏa $det(A^4 - aA^3 - aA + I) = 0$
a. Với $n = 2$ tìm $detA$.
b. Tìm điều kiện của n để tồn tại ma trận A, khi đó tính $detA$.

Bài 3. Cho $A=\begin{bmatrix}
1 & \frac{2012}{n}\\
\frac{-2012}{n}& 1
\end{bmatrix}. Tìm \lim\frac{1}{2012}(A^{n}-I), n\rightarrow +\infty $

Bài 4. Cho $A, B, X \in M_n$ ®, $n \geq 2$ thỏa $AB = A + B, rank(X) = 1, rank(A) \leq n - 2$. Chứng minh rằng ma trận $B + X$ suy biến.

Bài 5. Với mỗi $n \in N^*$, tìm một ma trận X thỏa $X^{n}=\begin{bmatrix}
4 &3 &2012 \\
0 &4 &3 \\
0 &0 &4
\end{bmatrix}$.

Bài 6. Một cuộc thi game online có 2013 game thủ phải chơi 2013 game. Mỗi game cả 2013 người cùng chơi, mỗi người chỉ thắng hoặc thua. Ta thành lập ma trận A,B vuông cấp 2013 như sau: Ba đầu gán $A = B = 0$, với

mỗi game nếu game thủ thứ i,j cùng thắng hoặc cùng thua thì tăng $)A_{ij})$ lên 1 đơn vị. Nếu game thủ i thắng j thua thì tăng (B_{ij}) lên 1 đơn vị và giảm (B_{ji}) đi 1 đơn vị. Chứng minh rằng sau khi cuộc chơi kết thúc thì $det(A+iB)$ là số nguyên không âm và chi hết cho 2^{2012}

Cùng thảo luận về đề thi này tại: http://diendantoanhoc.net/forum/index.php?showtopic=69345