

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH 2007

MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: Cho phương trình: $(\sqrt{1-x} + \sqrt{x})^3 - \sqrt{x(1-x)} = m$ (1) (m là tham số)

1. Giải phương trình (1) khi $m = 1$
2. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Câu 2: Với người sử dụng là số nguyên dương, đặt:

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} (\sin x)^{2n} dx \quad \text{và} \quad V_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} (\cos 2x)^{2n-1} dx$$

Chứng minh rằng:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$
2. $2U_n + V_n \leq \frac{\pi^2}{32} \quad \forall n \geq 1$

Câu 3: Ký hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Giả sử $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là một hàm số liên tục thỏa mãn $f(f(x)) = \sqrt[5]{(x+1)^5 + 1}$. Chứng minh rằng:

1. Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$
2. Hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$

Câu 4: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm C, D ở về 2 phía đối với (P) sao cho CD không vuông góc với (P) . Hãy xác định vị trí 2 điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = a$ ($a > 0$ cho trước) và tổng độ dài $CA + AB + BD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: Cho $k_1, k_2, \dots, k_n$ là các số thực dương khác nhau từng đôi một.

Chứng minh rằng: $\lambda_1 \cos(k_1 x) + \lambda_2 \cos(k_2 x) + \dots + \lambda_n \cos(k_n x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$