

Câu 1. Chứng minh rằng hàm số $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

liên tục, có các đạo hàm riêng f'_x, f'_y gián đoạn nhưng f khả vi tại $(0, 0)$.

Câu 2. a) Cho dãy số $\{a_n\}$ và hàm số $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(0) = 0$ và $f(x) = a_n$ nếu $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng nếu $\{a_n\}$ bị chặn thì f khả tích trên $[0, 1]$; và nếu $|a_n| \geq n$ với mọi n thì f không khả tích trên $[0, 1]$.

b) Xét tính khả tích Lebesgue của f và tính $(L) \int_0^1 f d\mu$ (nếu có) với

$$f(x) = \begin{cases} 8x^{2011} & , x \in \mathbb{Q} \cap [0; 1] \\ x^2 & , x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0; 1/2] \\ x \ln x & , x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [1/2; 1] \end{cases}$$

Câu 3. a) Xét không gian định chuẩn c các dãy số hội tụ với chuẩn cho bởi $\|x\| = \sup_n |x_n|$ với mọi $x = \{x_n\} \in c$. Chứng minh rằng tập hợp c_0 các dãy số hội tụ về 0 là không gian con đóng và không đâu trù mật trong c .

b) Cho X là không gian mê-tric đầy đủ và $\{f_n : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ là các dãy hàm liên tục sao cho với mọi $x \in X$ tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Chứng minh rằng tồn tại tập $V \subset X$ mở, khác rỗng và tồn tại $M > 0$ sao cho $|f_n(x)| \leq M$ với mọi $x \in V$ và mọi $n \in \mathbb{N}$.

Câu 4. Cho X là không gian Banach trên trường số $\mathbb{C}$. Xét dãy $\{x_n^*\}_{n \geq 0} \subset X^*$ và không gian vector

$$l_1(X) = \left\{ x = \{x_n\} \subset X : \sum_{n \geq 0} \|x_n\| < \infty \right\}$$

1) Chứng minh rằng $l_1(X)$ là không gian Banach với chuẩn $\|x\|_0 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|$.

2) a) Giả sử dãy $\{x_n^*\}$ bị chặn. Với mỗi $n \geq 0$ đặt $A, A_n : l_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ cho bởi

$$Ax = \sum_{k \geq 0} x_k^*(x_k); \quad A_n x = \sum_{0 \leq k \leq n} x_k^*(x_k) \quad \forall x = \{x_k\}_{k \geq 0} \in l_1(X)$$

Chứng minh rằng A, A_n xác định các ánh xạ tuyến tính liên tục. Tính các chuẩn $\|A\|, \|A_n\|$.

Chứng minh rằng $\{A_n\}$ bị chặn và hội tụ theo điểm về A .

b) Giả sử ánh xạ A cho trong câu a) hoàn toàn xác định. Chứng minh rằng dãy $\{x_n^*\}$ bị chặn.

3) Cho dãy $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$. Sử dụng câu 2) chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương:

a) $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\}_{n \geq 0} \in l_\infty$ với mỗi $x_n \in l_1$;

b) $\{a_n\} \in l_\infty$.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.