

ĐỀ THI ĐẠI HỌC KINH TẾ 2010

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Câu 1. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Giải.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow d_2 - d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 - d_1}} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & m-1 & 0 \\ 1-m & 0 & 0 \end{vmatrix} = (m-1)^2$$

Trường hợp 1: Khi $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$

$$\text{Với } \det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m-1; \det A_2 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m-1; \det A_3 = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2(m-1)$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{m-1}; x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{1}{m-1}; x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = -\frac{2}{m-1}$$

Trường hợp 2: Khi $\det A = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

$$\text{Lập ma trận mở rộng } \overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{d_2 \rightarrow d_2 - d_1 \\ d_3 \rightarrow d_3 - d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Vậy $r(A) = 1 < r(\overline{A}) = 2$. Hệ vô nghiệm

Chú ý: Nếu bạn tính theo $\det$ thì sẽ dễ bị lừa vì trong trường hợp này $\det A_j = 0, \forall j$ mà hệ vẫn vô nghiệm

Câu 2. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ m, & x = 0 \end{cases}$

a) Tìm m để hàm số liên tục

Giải.

Để xét tính liên tục của hàm số ta tiến hành qua 3 bước sau:

- Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ Áp dụng Vô cùng bé $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Lưu ý: Nếu bạn không biết áp dụng Vô cùng bé theo công thức $\lim_{x \rightarrow x_0} (e^{\alpha(x)} - 1) = \alpha(x)$ thì bạn có thể

sử dụng quy tắc L'hospital như sau

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \left(\frac{0}{0} \right) \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x e^{\sin x}) = 1$$

- $f(0)=m$
- Để hàm số liên tục thì $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = 1$

b) Tính đạo hàm của hàm số tại 0.

Giải.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{\sin x} - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2} \left(\frac{0}{0} \right) \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x * e^{\sin x} - 1}{2x} \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x * e^{\sin x} + \cos^2 x * e^{\sin x}}{2} = \frac{1}{2}$$

Kết luận: Hàm số có đạo hàm tại $x=0$ với giá trị là $f'(0) = 1/2$.

Câu 3. Cho

$$\pi = p_1 q_1 + p_2 q_2 - C - t q_2$$

$$p_1 = 80; p_2 = 75; C = q_1^2 + q_2^2 + q_1 q_2 + 4, t = 5$$

Tìm q_1, q_2 để lợi nhuận đạt cực đại toàn cục

Giải.

Hàm lợi nhuận được viết lại như sau: $\pi = -q_1^2 - q_2^2 - q_1 q_2 + 80q_1 + 70q_2 - 4$

Điều kiện cần để lợi nhuận đạt cực đại là

$$\begin{cases} \pi'_{q_1} = 0 \\ \pi'_{q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2q_1 - q_2 + 80 = 0 \\ -q_1 - 2q_2 + 70 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 30 \\ q_2 = 20 \end{cases}$$

Điều kiện đủ để lợi nhuận đạt cực đại là

$$\pi''_{q_1 q_1} = (-2q_1 - q_2 + 80)'_{q_1} = -2,$$

$$\pi''_{q_1 q_2} = (-2q_1 - q_2 + 80)'_{q_2} = -1,$$

$$\pi''_{q_2 q_2} = (-q_1 - 2q_2 + 70)'_{q_2} = -2.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} H_1 = -2 < 0 \\ H_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \end{cases} \forall q_1, q_2 \Rightarrow \pi \text{ lõm ngặt} \Rightarrow \pi \text{ đạt cực đại toàn cục tại } \begin{cases} q_1 = 30 \\ q_2 = 20 \end{cases}$$

Câu 4. Cho ma trận hệ số đầu vào

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Do cải tiến kỹ thuật ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu của ngành 3. Khi đó, hãy tìm ma trận đảo $(I - A)^{-1}$ với I là ma trận đơn vị cấp 3. Dùng kết quả đó tìm mức sản lượng của 3 ngành biết yêu cầu của ngành kinh tế mở là $D = (19; 38; 19)$

Giải.

Do ngành 1 tiết kiệm được 25% nguyên liệu của ngành 3 nên lượng nguyên liệu của ngành 3 cần cho ngành 1 giảm đi 25% nghĩa là $a_{31}' = 0,4 - 0,4 * 0,25 = 0,3$. Vậy ma trận hệ số đầu vào lúc này

$$\text{sẽ là } A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ta có } I - A = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,2 \\ -0,3 & -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Đặt

$$B = 10(I - A) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = (10(I - A))^{-1} = 10^{-1} * (I - A)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (I - A)^{-1} = 10 * B^{-1}$$

Lưu ý: Mục đích của cách giải này là giúp bạn dễ tìm $(I - A)^{-1}$ vì sẽ không đụng tới số thập phân.

$$\text{Ta tìm } B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}; B_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{ij}$$

$\det B_{ij}$ là định thức có được từ định thức B bằng cách bỏ đi dòng i , cột j của định thức $\det B$

$$\det B = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 190$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{190} * \begin{pmatrix} 44 & 14 & 20 \\ 14 & 39 & 15 \\ 20 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = 10 * B^{-1} = \frac{1}{19} * \begin{pmatrix} 44 & 14 & 20 \\ 14 & 39 & 15 \\ 20 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vậy } X = (I - A)^{-1} * D = \frac{1}{19} * \begin{pmatrix} 44 & 14 & 20 \\ 14 & 39 & 15 \\ 20 & 15 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 38 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92 \\ 107 \\ 85 \end{pmatrix}$$

PHẦN XÁC SUẤT

Câu 5.

Một hộp chứa 3 đồng xu đồng chất: 2 đồng xu công bằng có một mặt hình và một mặt chữ, một đồng xu có cả 2 mặt hình. Người ta lấy ngẫu nhiên từ hộp ra một đồng xu và gieo nó 3 lần độc lập.

a) Tính xác suất để cả 3 lần gieo đều xuất hiện mặt hình

Giải.

Nhận xét: Câu a của bài toán và dữ kiện đề bài cho ta thấy rằng câu hỏi được chia làm 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Lấy ngẫu nhiên 1 đồng xu

Giai đoạn 2: Tung đồng xu 3 lần độc lập

Vậy ta tiến hành đặt biến cố như sau:

Gọi A_1 là biến cố lấy được đồng xu công bằng

A_2 là biến cố lấy được đồng xu có 2 mặt hình

Gọi B là biến cố cả 3 lần gieo đồng xu đều xuất hiện mặt hình

Ta có

$$P(B) = P(A_1) * P(B / A_1) + P(A_2) * P(B / A_2)$$

Đây là công thức đầy đủ

Xác suất để cả 3 lần gieo đồng xu đều xuất hiện mặt hình được tính bằng xác suất để chọn được đồng xu công bằng và xác suất gieo đồng xu này cả 3 lần đều xuất hiện mặt hình **hoặc** xác suất chọn được đồng xu có 2 mặt hình và xác suất gieo đồng xu này cả 3 lần đều xuất hiện mặt hình

Với

$$P(A_1) = 2/3$$

$$P(B / A_1) = (1/2)^3$$

$$P(A_2) = 1/3$$

$$P(B / A_2) = 1$$

Kết luận: Vậy $P(B) = 5/12$

b) Biết rằng cả 3 lần gieo đều xuất hiện mặt hình, tính xác suất để đồng xu lấy ra là đồng xu công bằng

Nhận xét: Đây chính là xác suất có điều kiện (Công thức Bayes)

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 * B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) * P(B / A_1)}{P(B)} = \frac{1}{5}$$

Câu 6. Một trạm du lịch bãi biển có thuê tàu cano để cho khách hàng thuê lại. Hàng ngày trạm phải trả cho chủ tàu là 520 ngàn đồng trên mỗi chiếc tàu(chủ tàu không cần biết tàu có được khách hàng

thuê lại hay không). Mỗi chiếc tàu được trạm cho khách hàng thuê lại với giá 980 ngàn đồng một ngày. Qua một thời gian theo dõi số liệu thống kê, trạm ghi nhận được số yêu cầu thuê tàu trung bình mỗi ngày là 3,6. Trạm du lịch này quyết định thuê thường xuyên 3 tàu để phục vụ lại cho khách hàng.

- a) Hãy tìm luật phân phối xác suất của số tiền lãi thu được trong một ngày của trạm. Biết rằng số yêu cầu của khách hàng thuê tàu của trạm trong một ngày là đại lượng ngẫu nhiên có quy luật phân phối poisson

Giải.

Gọi X là số tiền lãi thu được trong một ngày của trạm.

Phân tích: Số tiền lãi phải dựa trên số tàu trong một ngày khách hàng thuê lại mà số tàu khách hàng thuê lại có thể là **0 thuê chiếc nào; 1 chiếc; 2 chiếc; 3 chiếc**. Từ đây ta sẽ tính được X nhận được các giá trị là bao nhiêu.

* Khi không có chiếc tàu nào được thuê thì số tiền lãi không có nhưng trạm du lịch vẫn phải trả tiền thuê nên số tiền lãi trong trường hợp này là một giá trị âm: $-520 \cdot 3 = -1560$ ngàn đồng

* Tương tự cho các trường hợp có 1, 2, 3 chiếc được thuê

- 1 chiếc được thuê nên số tiền lãi là: $980 - 3 \cdot 520 = -580$ ngàn đồng

- 2 chiếc được thuê nên số tiền lãi là: $980 \cdot 2 - 3 \cdot 520 = 400$ ngàn đồng

- 3 chiếc được thuê nên số tiền lãi là: $980 \cdot 3 - 3 \cdot 520 = 1380$ ngàn đồng

Số tiền lãi thu được dựa trên số yêu cầu của khách hàng thuê tàu của trạm trong một ngày nên ta gọi

Z là số yêu cầu của khách hàng thuê trạm trong một ngày, $Z \sim P(\lambda) = P(3,6)$

$$P(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \text{ Với } \lambda \text{ là giá trị trung bình; } \lambda = 3,6$$

Vì $Z=0$ tương ứng với không có chiếc tàu nào được thuê nên

$$P(Z=0) = \frac{e^{-3,6} \cdot (3,6)^0}{0!} \text{ (không có yêu cầu thuê tàu từ khách hàng) nên số tiền lãi là : -1560}$$

Tương tự

$$P(Z=1) = \frac{e^{-3,6} \cdot (3,6)^1}{1!} \text{ (có 1 yêu cầu thuê) nên số tiền lãi là : -580}$$

$$P(Z=2) = \frac{e^{-3,6} \cdot (3,6)^2}{2!} \text{ (có 2 yêu cầu thuê) nên số tiền lãi là: 400}$$

$$P(Z \geq 3) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) - P(Z=2) = 1 - \frac{e^{-3,6} \cdot (3,6)^0}{0!} - \frac{e^{-3,6} \cdot (3,6)^1}{1!} - \frac{e^{-3,6} \cdot (3,6)^2}{2!}$$

(có từ 3 yêu cầu thuê của khách hàng trở lên) nên số tiền lãi là: 1380

Vậy ta có quy luật phân phối xác suất của X như sau

X	-1560	-580	400	1380
P(Z)	$\frac{e^{-3,6} * (3,6)^0}{0!}$	$\frac{e^{-3,6} * (3,6)^1}{1!}$	$\frac{e^{-3,6} * (3,6)^2}{2!}$	$P(Z \geq 3)$

- b) Nếu dựa vào số tiền lãi trung bình thu được trong một ngày của trạm để quyết định thì trạm nên thuê thường xuyên 3 hay 4 tàu?.

Các bạn làm tương tự như câu a nhưng ở đây số tàu trạm thuê là 4

Vì $Z=0$ tương ứng với không có chiếc tàu nào được thuê nên

$$P(Z=0) = \frac{e^{-3,6} * (3,6)^0}{0!} \text{ (không chiếc tàu nào được thuê) nên số tiền lãi là } Y = -2080$$

$$P(Z=1) = \frac{e^{-3,6} * (3,6)^1}{1!} \text{ (1 chiếc được thuê) nên số tiền lãi là } Y = -1100$$

$$P(Z=2) = \frac{e^{-3,6} * (3,6)^2}{2!} \text{ (2 chiếc được thuê) nên số tiền lãi là } Y = -120$$

$$P(Z=3) = \frac{e^{-3,6} * (3,6)^3}{3!} \text{ (3 chiếc được thuê) nên số tiền lãi là } Y = 860$$

$$P(Z \geq 4) = 1 - P(Z=0) - P(Z=1) - P(Z=2) - P(Z=3) \text{ (4 chiếc được thuê) nên số tiền lãi là } Y = 1840$$

Vậy ta có quy luật phân phối xác suất của Y như sau

Y	-2080	-1100	-120	860	1840
P(Z)	$\frac{e^{-3,6} * (3,6)^0}{0!}$	$\frac{e^{-3,6} * (3,6)^1}{1!}$	$\frac{e^{-3,6} * (3,6)^2}{2!}$	$\frac{e^{-3,6} * (3,6)^3}{3!}$	$P(Z \geq 4)$

Lúc này ta có ta so sánh EX và EY để kết luận 3 hay 4 tàu thuê là tốt nhất.

$$EX = 933,61 \text{ (ngàn đồng)}$$

$$EY = 888,91 \text{ (ngàn đồng)}$$

Kết luận: $EX > EY$ nên thuê 3 tàu là tốt nhất cho trạm

PHẦN THỐNG KÊ

Câu 1.

Tại một nông trường, để điều tra kết quả sử dụng loại phân bón mới trên một loại trái cây, người ta lấy một mẫu ngẫu nhiên cân thử và thu được số liệu như sau:

	Khối lượng(gam)	Trái cây
50	45-55	10
57,5	55-60	35
62,5	60-65	75

67,5	65-70	130
72,5	70-75	35
80	75-85	15

a) Với độ tin cậy 96%, hãy ước lượng khối lượng trung bình của loại trái cây trên nông trường

Gọi $\bar{x}$ là trọng lượng trung bình của loại trái cây trong mẫu khảo sát

Theo mẫu khảo sát ta có

$$\text{Bước 1: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i = 65,7083(\text{gam}); s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 * n_i} = 5,9802(\text{gam})$$

$$\text{Bước 2: Với } \gamma = 96\% \Rightarrow \varphi(z_\alpha) = 0,48 \Rightarrow z_\alpha = 2,05$$

(Bước này tôi chỉ chọn giá trị gần z_α nhất trong bảng tra mà thôi)

$$\text{Bước 3: } \varepsilon = z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,7078(\text{gam})$$

Bước 4: Vậy với độ tin cậy 96% thì khoảng ước cho khối lượng trung bình của một trái cây thuộc nông trường là $\mu \in (\bar{x} \pm \varepsilon) = (65,7083 \pm 0,7078)(\text{gam})$

b) Trước kia, khối lượng trung bình của loại trái cây trên là 64 gam. Với mức ý nghĩa là 2%, hãy đánh giá xem loại phân bón có mang lại hiệu quả thực sự không?.

Bước 1:

Gọi μ_0 là trọng lượng trung bình của loại trái cây theo giả thuyết

Gọi μ là trọng lượng trung bình của loại trái cây khi áp dụng loại phân bón mới

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 64(\text{gam}) \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 = 64(\text{gam}) \end{cases}$$

$$\text{Bước 2: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i = 65,7083(\text{gam}); s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 * n_i} = 5,9802(\text{gam})$$

$$\text{Bước 3: Với mức ý nghĩa là } 2\% \Rightarrow z_\alpha = 2,33$$

$$\text{Bước 4: } Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} = 4,9477$$

$$\text{Bước 5: Vậy } |Z_0| = 4,9477 > z_\alpha, \text{ bác bỏ } H_0.$$

Kết luận. Loại phân bón mới có mang lại hiệu quả thực sự

c) Người ta quy định rằng những trái cây có khối lượng từ 70 gam trở lên thì được xếp vào loại I. Hãy ước lượng tỷ lệ trái cây loại I, với độ tin cậy 95%.

$$\text{Bước 1: Gọi } f \text{ là tỷ lệ trái cây loại I trong mẫu khảo sát, } f = \frac{m}{n} = \frac{50}{300} = 1/6$$

Bước 2: Với $\gamma = 95\% \Rightarrow \varphi(z_\alpha) = 0,475 \Rightarrow z_\alpha = 1,96$

Bước 3: $\varepsilon = z_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0,0421$

Bước 4: Vậy với độ tin cậy 95% thì khoảng ước lượng tỷ lệ trái cây loại I là $p \in (f \pm \varepsilon)$

Câu 2.

Trong hội chợ việc làm dành cho sinh viên sắp tốt nghiệp. Chọn một mẫu ngẫu nhiên 81 sinh viên trong số những người dự tuyển vào một công ty liên doanh ABC và được đánh giá theo thang điểm tối đa là 100. Trong mẫu 81 sinh viên này có 27 người là nữ.

- a) Tài liệu lưu trữ của công ty ABC cho biết tỷ lệ nữ tham gia dự tuyển năm trước là 43%. Với mức ý nghĩa 4% hãy đánh giá xem có phải tỷ lệ nữ tham gia năm nay có thực sự giảm so với năm trước không?.

Giải.

Bước 1:

Gọi p_0 là tỷ lệ nữ tham gia dự tuyển năm trước vào công ty liên doanh ABC

Gọi p là tỷ lệ nữ tham gia dự tuyển năm nay vào công ty liên doanh ABC

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 = 43\% \\ H_1 : p < p_0 = 43\% \end{cases}$$

Bước 2:

$$f = \frac{m}{n} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$$

Bước 3: Với mức ý nghĩa là 4% $\Rightarrow z_{2\alpha} = 1,75$

$$\text{Bước 4: } Z_0 = \frac{(f - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n} = -1,7573$$

Bước 5: Vậy $|Z_0| = 1,7573 > z_{2\alpha}$, bác bỏ H_0 .

Kết luận. Tỷ lệ nữ năm nay đã thực sự giảm so với năm trước ($f = 1/3 < p_0 = 0,43$)

- b) Với số liệu trên, nếu muốn phép ước lượng tỷ lệ nữ tham gia dự tuyển có độ chính xác 9% và độ tin cậy 96% thì phải chọn mẫu có kích thước ít nhất là bao nhiêu ?

Giải.

Với $\varepsilon = 9\% = 0,09; \gamma = 96\% \Rightarrow z_\alpha = 2,05$

$$\text{Ta có } \varepsilon = z_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \Rightarrow n = \frac{f(1-f) * z_\alpha^2}{\varepsilon^2} = 115,294 \Rightarrow n \approx 116$$

Trong quá trình giải có thể sai sót rất mong nhận được sự góp ý của các bạn theo mail:

onthicaohoc_toankinhhte@yahoo.com

