

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
DỰ THI QUỐC GIA CẤP THPT NĂM HỌC 2014-2015

Câu I. (3,0 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{y^2 + xy + 2x^2} = 2(x + y) \\ (8y - 6)\sqrt{x - 1} = (2 + \sqrt{x - 2})(y + 4\sqrt{y - 2} + 3) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu II. (3,0 điểm)

Cho 2014 số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$ thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + \dots + a_{2014} = 2014$.

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^{20}}{a_2^{11}} + \frac{a_2^{20}}{a_3^{11}} + \dots + \frac{a_{2013}^{20}}{a_{2014}^{11}} + \frac{a_{2014}^{20}}{a_1^{11}} \geq 2014$.

Câu III. (4,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) với $n \in \mathbb{N}^*$ được xác định bởi
$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_n = \frac{9}{10}x_{n-1} + \frac{1007}{5x_{n-1}^9}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn này.

Câu IV. (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$6f(8x) - 5f(4x) + f(2x) = 60420x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu V. (3,0 điểm)

Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2 z^2$.

Câu VI. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A có H, M lần lượt là trung điểm BC và AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM cắt đoạn AH tại D và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn BM tại K . Gọi I là giao điểm của AK với BD và E là giao điểm của CI với BM . Chứng minh:

- 1) Tam giác AKC vuông.
- 2) I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABE .

-----HẾT-----